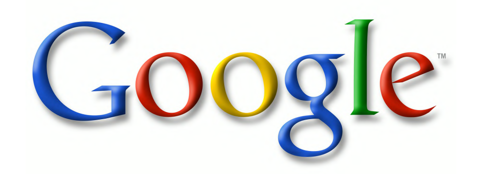
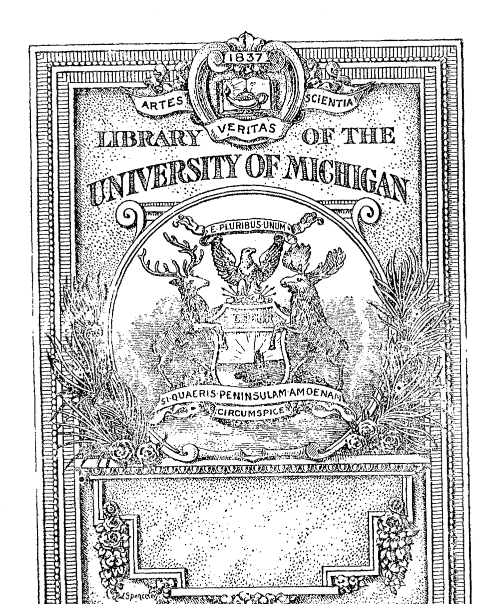


B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Diese Sammlung bietet in einzelnen in sich abgeschlossenen Werken zusammenfassende Darstellungen der wichtigsten Abschnitte der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen. Im einzelnen wollen diese Werke in ihrer ausführlichen, neben der rein wissenschaftlichen auch pädagogische Momente berücksichtigenden Darstellung die Möglichkeit zu selbständ ... bhängigem Eindringen ... Gesamtheit aber sollen si ... chen Nachweise ein gena ... on dem gegenwärtigen ... und ihrer Anwendung



Bisher ... ln usw. ver-

P. Bach ... 1 u. 2.] I. Band. X, 402 ... n. *M* 17.—

E. Blasc ... e Lehre von den statist ... [Bd. XXXIII.]

H. Brun ... re. VIII, 310 S. und A

G. H. B ... dealing mainly with ... , 204 S. 1907. n. *M*

E. Czube ... g auf Fehlerausgleich ... n. [Bd. IX, 1 u. 2.]
I. Band ... aßlehre. X, 410 S.
II. — ... rsicherung. X, 470 S.

L. E. Di ... ois Field theory. X, 312

F. Dinge ... Differential- und Integr
I. Teil.
II. —

O. Fisch ... lebenden Körper mit sp ... hige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. X, 372 S. 1906. n. *M* 14.—. [Bd. XXII.]

Ph. Forchheimer, Lehrbuch der Hydraulik. 1913. [ca. 400 S.] [Bd. XXXIX.]

A. Gleichen, Lehrb. d. geometrisch. Optik. XIV, 511 S. 1902. n. *M* 20.—. [Bd. VIII.]

L. Henneberg, graphische Statik der starren Systeme. XV, 782 S. 1911. n. *M* 24.—. [Bd. XXXI.]

A. Krazer, Lehrbuch d. Thetafunktionen. XXIV, 509 S. 1903. n. *M* 24.—. [Bd. XII.]

H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. XVI, 787 S. 1907. n. *M* 20.—. [Bd. XXVI.]

R. von Lilienthal, Vorles. üb. Differentialgeometrie. [Bd. XXVIII, 1 u. 2.] In 2 Bd.
I. Band. Kurventheorie. VI, 368 S. 1908. n. *M* 12.—
II. — I. Teil: Flächentheorie. VIII, 268 S. 1913. n. *M* 13.—

H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. IV, 332 S. 1909. n. *M* 9.—. (Englisch.) [Bd. XXIX.]

VIII. 13.

G. Loria, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von Fr. Schütte. 2. Auflage. In 2 Teilen. [Bd. V, 1 u. 2.]
I. Teil: Die algebraischen Kurven. XXVI, 488 S. 1910. n. ℳ 18.—
II. — Die transzendenten Kurven. VIII, 384 S. 1911. n. ℳ 14.—

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch v. Fr. Schütte. 2 Teile. [Bd. XXV, 1 u. 2.]
I. Teil. Die Darstellungsmethoden. XI, 219 S. 1906. n. ℳ 6.80. Geh. ℳ 6.— Geb. ℳ 7.—
II. — Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven u. Flächen. XV, 295 S. 1913. n. Geh. ℳ. 11.— Geb. ℳ 12.—

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. XVI, 664 S. 1907. n. ℳ 16.—. [Bd. XXIV.]

R. Mehmke, Vorlesungen über Vektoren- und Punktrechnung. 2 Bände. 1912. [XXXVII.] I. Bd. Punktrechnung. 1. Teilband. VIII, 394 S. Geheftet n. ℳ 14.—

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. VIII, 260 S. 1901. n. ℳ 9.—. [Bd. VII.]

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 2. Aufl. XII, 750 S. 1912. n. ℳ 18.—. [Bd. XX, 1.]

E. Pascal, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neueren Forschungen. Deutsch von H. Leitzmann. XVI, 266 S. 1900. n. ℳ 10.—. [Bd. III.]

O. Perron, d. Lehre v. d. Kettenbrüchen. XII, 520 S. 1912. n. ℳ 22.— [Bd. XXXVI.]

Fr. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. X, 519 S. 1906. n. ℳ 16.—. [Bd. XIX.]

D. Seliwanoff, Lehrb. d. Differenzenrechn. VI, 92 S. 1904. n. ℳ 4.—. [Bd. XIII.]

O. Staude, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. VIII, 447 S. 1905. n. ℳ 14.—. [Bd. XVI.]

—— analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche II. Ordnung. In 2 Bänden. [Bd. XXX, 1 u. 2.] I. Band. X, 548 S. 1910. n. ℳ 22.—. II. Band. IV, S. 549—1000. 1910. n. ℳ 18.—

—— analytische Geometrie d. kub. Kegelschnitte. VIII, 242 S. 1913. [Bd. XXXVIII.]

O. Stolz und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik.
I. Abteilung: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. 2. Aufl. umgearb. von J. A. Gmeiner. (3., umgearb. Aufl. der Abschnitte 1—4 des I. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz.) [VI u. 148 S.] 1911. ℳ 5.20. [Bd. IV, 1.]
II. — Die Lehre von den reellen und komplexen Zahlen. (2. Aufl. der Abschnitte 5—8, 10, 11 des I. und 1, 2, 5 des II. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz.) [XI u. S. 99—402.] 1902. n. ℳ 8.— [Bd. IV, 2.]

—— Einleitung i. d. Funktionstheorie. 2. Aufl. X, 598 S. 1905. n. ℳ 15.—. [Bd. XIV.]

R. Sturm, die Lehre von den geometr. Verwandtschaften. 4 Bde. [Bd. XXVII, 1—4.]
I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. XII, 415 S. 1908. n. ℳ 16.—
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. VIII, 346 S. 1908. n. ℳ 16.—
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. VIII, 574 S. 1909. n. ℳ 20.—
IV. — Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. X, 486 S. 1909. n. ℳ 20.—

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. X, 380 S. 1908. n. ℳ 16.—. [Bd. I.]

K. Th. Vahlen, Konstruktionen u. Approximationen. 1911. XII, 349 S. n. ℳ 12.— [Bd. XXIII.]

W. Voigt, Lehrbuch der Kristall-Physik (mit Ausnahme der Kristall-Optik). XXIV, 964 S. 1910. n. ℳ 32.—. [Bd. XXXIV.]

G. Wallenberg und **A. Guldberg,** Theorie der linearen Differenzengleichungen. XIV, 290 S. 1911. n. ℳ 11.—. [Bd. XXXV.]

J. G. Wallentin, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. X, 444 S. 1904. n. ℳ 12.—. [Bd. XV.]

E. von Weber, Vorlesungen üb. das Pfaffsche Problem u. die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XI, 622 S. 1900. n. ℳ 24.—. [Bd. II.]

A. G. Webster, the Dynamics of Particles and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. 2. ed. XII, 588 S. 1912. n. ℳ 14.—. [Bd. XI.] (Eine deutsche Ausgabe von C. H. Müller befind. sich in Vorbereitung.)

—— Partial Differential Equations of Mathematical Physics. (Englisch.)

E. J. Wilczynski, projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces. VIII, 298 S. 1906. n. ℳ 10.—. (Englisch.) [Bd. XVIII.]

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXIX

LEHRBUCH DER ABZÄHLENDEN METHODEN DER GEOMETRIE

VON

H. G. ZEUTHEN

MIT 38 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914



Vorwort.

102 Jahre sind verflossen, seitdem *Poncelet* in Saratow die Muße eines Kriegsgefangenen durch Wiederaufnahme der auf der polytechnischen Schule unternommenen, aber zu schnell abgebrochenen mathematischen Studien ausfüllte. Da mußte er denn oft solche Lehren der analytischen Geometrie, deren er sich nicht mehr genau erinnerte, durch neuerfundene Methoden ersetzen; dabei gelang es ihm, solche zu ersinnen, die viel schneller zum Ziele führen, als die alten. Dies gilt nicht nur von der von ihm begründeten projektiven Geometrie, sondern auch von dem sogenannten Kontinuitätsprinzip, auf das er selbst ein großes Gewicht legte. Die Anwendungen dieses Prinzips, die er in seinem *Traité de la Géométrie Projective* gibt, lassen nicht nur erkennen, wie schnell und leicht man mit ihm ohne algebraische Rechnungen zu Resultaten geführt wird, sondern zeigen tatsächlich auch, daß seine Methode ganz dieselbe Sicherheit, wie die wirkliche Durchführung dieser Rechnungen leisten kann. Die Existenz der algebraischen Gleichungen, deren Grade man durch Betrachtung von Spezialfällen bestimmt, ist nämlich in allen den von ihm behandelten Fällen ganz unzweifelhaft.

Die so gewonnene Sicherheit beruht jedoch darauf, daß die Möglichkeit einer algebraischen Behandlung dieser Aufgaben gegeben ist. *Poncelet* wollte aber sein neues Prinzip als eine der algebraischen Behandlung entgegengesetzte geometrische Methode aufgefaßt wissen oder es wenigstens unabhängig von einer solchen machen. Zwar läßt es sich auch in gewissen Fällen anwenden, in denen die Kontinuität, die die Voraussetzung für eine exakte Anwendung seines Prinzips sein muß, nicht durch die Möglichkeit einer algebraischen Darstellung, sondern durch eine rein geometrische Definition gesichert wird, und eine solche Definition fordert *Poncelet* jedenfalls. Solche Fälle (die wir übrigens auch hier ausschließen werden) waren aber damals noch nicht bekannt und selbst für *Poncelet*s weitreichenden Blick dämmerten sie wohl nur undeutlich auf. *Cauchy* konnte daher das von *Poncelet* ausgesprochene Prinzip, dessen Nützlichkeit und — innerhalb der richtigen Grenzen — vollständige Zuverlässigkeit er kaum richtig würdigte, als „une forte induction“ bezeichnen.

Dieses Urteil hinderte jedoch nicht, daß sich die Anwendungen des Prinzips nach und nach vermehrten, gab aber zu einer oft überflüssigen Vorsicht beim Gebrauch Anlaß. Um die Voraussetzungen für seine Zuverlässigkeit klar hervorzuheben, hat daher *Schubert* dem Prinzip einen neuen Namen: „Prinzip der Erhaltung der Anzahl“ gegeben und daran eine neue Formulierung geknüpft, durch die die Verbindung mit der Algebra berücksichtigt wird. Diese Formulierung hat aber selbst wieder zur Kritik Anlaß gegeben. Zwar hat man durch spätere Beifügungen einwandfreie Formulierungen erhalten. Sie würden aber dem

Anfänger zu künstlich vorkommen, um in einem Lehrbuch den Ausgangspunkt für die praktischen Anwendungen bilden zu können. Sie würden auch für eine solche Verwendung nicht genügen, da sie nichts darüber aussagen, wievielmal jede Art von Lösungen in einer gesuchten oder gefundenen Anzahl mitzuzählen ist.

Daher sehen wir in diesem Lehrbuche von einer Formulierung eines „Prinzips der Erhaltung der Anzahl" ab, oder wir beschränken dieses Prinzip auf das rein algebraische, daß „der Grad oder die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung von den Werten der Koeffizienten dieser Gleichung unabhängig ist". Nur muß man die verschiedenen Wurzeln, auch unendliche, imaginäre und zusammenfallende, in Übereinstimmung mit den Forderungen der Algebra abzählen. „Die Methoden der Erhaltung der Anzahl" zielen darauf ab, diese Abzählungen auszuführen, und zwar geschieht dies durch Befolgung gewisser Regeln, sowie dadurch, daß man nötigenfalls auf die Form zurückgreift, die die algebraische Behandlung in den vorliegenden Fällen annehmen würde.

Indem wir diese Methoden und die verschiedenen Formen, die sie annehmen können, in den ersten zwei Kapiteln dieses Lehrbuches auseinandersetzen und durch zahlreiche Beispiele erklären, werden wir zu ihrem exakten Gebrauch Anleitung geben und die Überzeugung wecken, daß man sie mit vollem Vertrauen anwenden darf. Gleichzeitig bemerken wir jedoch, daß die Verfasser, die sich auf das sogenannte Prinzip der Kontinuität oder der Erhaltung der Anzahl gestützt haben, im wesentlichen dieselben Betrachtungen angestellt haben, ohne dies freilich immer ausdrücklich zu sagen. So erklärt es sich, daß sich, trotz dem von *Cauchy* ausgesprochenen und später oft gehegten Verdacht gegen dieses Prinzip, kaum ein durch dasselbe gewonnenes Resultat als unrichtig nachweisen läßt. Nur eine einzelne Gattung von Anwendungen gibt es, die wirklich auf einer unvollständigen Induktion beruht. Von dieser wird in Nr. [33] gesprochen.

In der Tat sind im übrigen ganz dieselben Betrachtungen nötig, um eine richtige Anwendung der durch analytische Geometrie gewonnenen Resultate auf Spezialfälle zu gewährleisten, und ähnliche Betrachtungen sind notwendig, um die verschiedenen durch das weniger bestrittene Korrespondenzprinzip gefundenen Auflösungen richtig unterscheiden zu können. Dieses Prinzip, und zwar sowohl das von *Chasles* und *Jonquières* herrührende einfache, als auch die *Cayley-Brill*sche Erweiterung, sowie die Anwendungen dieser Sätze werden im vierten Kapitel behandelt, nachdem man im dritten die Anwendungen der Geschlechtsätze kennen gelernt hat. Was das *Cayley-Brill*sche Prinzip betrifft, so hat zwar *A. Hurwitz* gezeigt, daß es nicht alle Korrespondenzen auf einer Kurve umfaßt, und dafür eine allgemeine Formel aufgestellt. Da diese jedoch niemals zu wirklichen Abzählungen benutzt worden ist, habe ich sie auch hier nicht aufgenommen, sondern vorgezogen, wie *H. Burckhardt*

in den Comptes Rendus 126 (1898) vorgeschlagen hatte, im Anschluß an *Cayley*s und *Brill*s eigene Sätze eine allgemeine Behandlung der verschiedenen Korrespondenzen durch Einführung gebrochener Wertigkeiten zu gewinnen.

Dadurch weicht meine Behandlung wesentlich von *F. Severi*s ab, der die seinige auf die *Brill-Nöther*sche Lehre von linearen Reihen von Punktgruppen auf einer Kurve gründet, während ich einen mehr abzählenden Ausgangspunkt nehme, von dem aus man auch die genannten Reihen behandeln kann. *Severi*s Behandlung wird man aus seinem vortrefflichen, bis jetzt leider nur autographierten Lehrbuch: *Lezioni di Geometria Algebrica, Padova 1908*, erlernen können. Die Anzahl der die vorliegenden Fragen behandelnden Lehrbücher ist noch so klein, daß es nützlich sein wird, wenn in diesen verschiedene Ausgangspunkte gewählt sind.

In dem dritten und vierten Kapitel behandle ich übrigens nicht nur Korrespondenzen auf Kurven, sondern auch solche, die Flächen betreffen.

Aus dem fünften Kapitel wird man ersehen, daß einige seinerzeit viel besprochene, zu weit gehende Verallgemeinerungen von *Jonquières* und *Chasles,* für die man besondere analytisch geometrische Beweise gesucht hatte, vermieden werden, wenn man die Hauptregeln der abzählenden Geometrie genau wahrnimmt.

Im sechsten Kapitel gebe ich eine Anleitung zum *Schubert*schen „Kalkül" der abzählenden Geometrie. Betreffs der auf diesen Kalkül gegründeten Formeln muß ich übrigens auf *Schubert*s eigenes, 1876 erschienenes Buch verweisen; seine weitergehenden Anwendungen würde man am besten aus einem Buche erlernen können, das die mehrdimensionale Geometrie behandelt; ein solches wird wohl auch in der Teubnerschen Folge von Lehrbüchern erscheinen. Auf diese Anwendungen gehe ich hier und in den vorhergehenden Kapiteln nur insofern ein, als ich zeige, daß die abzählenden Methoden auch auf mehrdimensionale Gebilde anwendbar sind.

Übrigens läßt sich der richtige Gebrauch der Methoden nur durch Anwendung auf verschiedenartige Beispiele erlernen. Diese sind hier so gewählt, daß sie gleichzeitig die große Tragweite der Methoden erkennen lassen, was auch ein Hauptzweck des Lehrbuches sein muß. Durch die abzählenden Methoden lassen sich dieselben allgemeinen Ergebnisse, wie durch die Methoden der analytischen Geometrie, und zwar schneller erzielen. Die Beispiele sind denn auch so gewählt, daß sie die Anwendbarkeit auf die verschiedenen, algebraisch darstellbaren geometrischen Gebilde erkennen lassen. Dabei werden viele Untersuchungen durchgeführt, und man wird hinreichende Anleitung finden, um weiter zu gehen, als der Platz es hier erlaubt. Da jedoch im vorliegenden Buche die verschiedenen Untersuchungen nach den angewandten Methoden geordnet sind, muß man oft solche, die dieselben geometrischen

Gebilde betreffen, an verschiedenen Stellen suchen. Das S. 393—394 beigefügte „Verzeichnis“ wird es aber dem Leser, der sich mit Untersuchungen über bestimmte Gebilde beschäftigt, leicht ermöglichen, den einschlägigen Stoff zu finden. Einen ähnlichen Zweck haben viele der Hinweise im Text.

Weiteren Übungsstoff sollen die am Schlusse der einzelnen Abschnitte beigefügten Aufgaben gewähren. Einige sind nur einfache Anwendungen, andere erfordern mehr selbständige Untersuchungen. Einzelne, die ich mit einem Asterisk (*) bezeichnet habe, sind meines Erachtens für größere Seminararbeiten, ja selbst Doktordissertationen geeignet.

Es würde recht schwierig sein, einem Lehrbuch, in dem neben neuen Untersuchungen im voraus bekannte Sachen einer neuen, dem ganzen Plan angepaßten Behandlung unterworfen sein müssen, genügende Literaturangaben beizufügen. Im vorliegenden Falle kann der Verfasser aber auf die Zitate in seinem Artikel in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften verweisen. Da wird der Leser in einer Anordnung, die nur durch Vertauschung einiger Kapitel von der hier vorliegenden abweicht, den Ursprung der hier behandelten Methoden und Lehren kennen lernen und Anweisung zu ihrem genaueren Studium finden können. Hier zitiere ich daher nur solche Schriften, die nach dem Erscheinen der deutschen Ausgabe des Artikels in der Enzyklopädie veröffentlicht worden sind.

Nur einen Namen werde ich noch hier in der Vorrede erwähnen, nämlich den meines längst verstorbenen Freundes *G. Halphen.* Seine kritischen Bemerkungen über verschiedene Anwendungen der abzählenden Methoden, die nicht nur in seinen Abhandlungen vorkommen, sondern die ich auch in Brief und Wort mit ihm erörtert habe, sowie die von ihm gefundenen Mittel und Wege zur Überwindung der betreffenden Schwierigkeiten sind mir besonders wertvoll gewesen für die Ausarbeitung eines Lehrbuches, das zu einer exakten Anwendung der abzählenden Methoden der Geometrie anleiten will.

Ich bin sehr erfreut, daß der Herr Oberlehrer Dr. *M. Caspar* die sprachliche Durchsicht meines Buches hat übernehmen wollen. Mit einem Takt, der mir von einer früheren Mitarbeit her bekannt war, hat er es erreicht, daß die sprachlich verbesserte Ausdrucksweise bis in die Einzelheiten mit der von mir beabsichtigten übereinstimmt.

Noch bin ich der Firma *B. G. Teubner* dafür dankbar, daß die Untersuchungen, mit denen ich mich mit Vorliebe von meiner Jugend an bis in das hohe Alter beschäftigt habe, jetzt in ihrem vollen Zusammenhang erscheinen.

Dem dänischen „Carlsbergfond“ verdanke ich die zur Ausarbeitung des Buches notwendige Muße.

Kjöbenhavn im April 1914.

H. G. Zeuthen.

Inhalt.

Seite

Erstes Kapitel. Einleitung.

a) Zweck und Begriffe.

b) Über die Bestimmung der Anzahl zusammenfallender Lösungen.

Zweites Kapitel. Die Methode der Erhaltung der Anzahl.

a) Direkte Anwendungen.

b) Geschlechtsätze von Flächen.

Viertes Kapitel. Das Korrespondenzprinzip.

a) Korrespondenzen einstufiger Gebilde vom Geschlechte 0.

Fünftes Kapitel. Systeme von Gebilden.

a) Systeme von Kurven.

b) Systeme von Kegelschnitten.

Seite

c) Systeme von Flächen.

d) Bestimmung von Korrelationen.

Sechstes Kapitel. *Schuberts* symbolischer Kalkül.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

a) Zweck und Begriffe.

[1] Bedeutung der Anzahlen. Die analytische Geometrie führt die geometrischen Untersuchungen auf Umformungen von Systemen algebraischer Gleichungen zurück. Die Bedeutung der dadurch gewonnenen, neuen Gleichungen beruht sehr oft, und namentlich wenn es sich um die Herleitung allgemeiner Resultate handelt, nicht auf den Werten ihrer Koeffizienten, sondern auf ihrer Form. Diese hängt wesentlich von dem Grade der Gleichungen in Beziehung auf die in sie eingehenden unbekannten, variablen oder nur unbestimmt gelassenen Größen ab. Betrachtet man eine dieser in eine Gleichung eingehenden Größen, x, als unbekannt, die übrigen als bekannt, so wird der Grad der Gleichung in x die Anzahl ihrer Wurzeln angeben, wenn man nur die imaginären Wurzeln der Gleichung mitzählt und mehrfach zählende Wurzeln gebührend berücksichtigt. Die Anzahlen der Wurzeln einer solchen algebraischen Gleichung sind gleichzeitig die Anzahlen der durch diese bestimmten geometrischen Gebilde, wenn man sich darunter auch solche vorstellt und in die Anzahlen einbezieht, die den imaginären Wurzeln entsprechen. So aufgefaßte Abzählungen der geometrischen Gebilde, die gegebenen, algebraisch ausdrückbaren Bedingungen unterworfen sind, werden daher zu denselben allgemeinen Resultaten führen, wie die vollständige Bildung der entsprechenden algebraischen Gleichungen, insofern man von der numerischen Bestimmung der Koeffizienten absieht. Selbst diese Bestimmung, die ja namentlich für die einzelnen Anwendungen notwendig wird, läßt sich oft viel leichter erreichen, nachdem man durch Abzählung die Form der betreffenden Gleichungen erhalten hat. Diese Bedeutung der Anzahlenbestimmung läßt sich schon aus den folgenden einfachen Beispielen ersehen.

Wenn man sich auf irgendeine Weise versichert hat, daß eine Konstruktionsaufgabe zwei Lösungen hat, so bedeutet dies: die Aufgabe hängt von einer Gleichung zweiten Grades ab, ist also algebraisch ohne Einführung anderer Wurzeln als Quadratwurzeln, und geometrisch durch Lineal und Zirkel lösbar. Die Beobachtung der genannten hinreichenden Bedingung dient auch zur Orientierung bei der Auffindung der wirklichen Lösung. Weiß man z. B., daß die Bestimmung eines Punktes einer

Geraden zwei Lösungen hat, so weiß man auch, ohne die bestimmende Gleichung zweiten Grades zu entwickeln, daß die Aufgabe, den Mittelpunkt der durch die zwei Punkte begrenzten Strecke zu bestimmen, von einer Gleichung ersten Grades abhängen wird. Letztere Bestimmung, mit der man die Auflösung anfangen kann, gestaltet sich daher einfacher.[1]) Ähnliche Betrachtungen kann man auch mit Erfolg anwenden, um Fälle aufzufinden, wo Aufgaben, die mehr als zwei Lösungen haben, doch durch Ausziehen von Quadratwurzeln oder durch Lineal und Zirkel lösbar sind.

Suchen wir z. B. eine durch einen gegebenen Punkt A gehende Gerade, die von zwei gegebenen Geraden b und c in den Punkten B und C so geschnitten wird, daß BC gleich einer gegebenen Strecke a ist. Diese Aufgabe hat vier Lösungen. Sehen wir nämlich von der Forderung ab, daß C auf der Geraden c liege, so wird der Ort des Punktes C eine (Konchoide genannte) Kurve vierter Ordnung sein. Dieses Ergebnis werden wir bald durch Abzählen der Schnittpunkte der Kurve mit einer durch A gehenden Geraden erhalten können [18]; ohne die Kenntnis abzählender Methoden kann man die Ordnung der Kurve jedenfalls durch wirkliche Aufstellung ihrer Gleichung bestimmen. Die Bestimmung der Schnittpunkte des gefundenen Ortes mit der willkürlichen Geraden c hängt im allgemeinen von einer nicht durch Quadratwurzeln lösbaren Gleichung vierten Grades ab, und die Aufgabe läßt sich also im allgemeinen nicht durch Lineal und Zirkel lösen.

Anders gestaltet sich die Frage, wenn der Punkt A auf der Halbierungslinie eines der von b und c gebildeten Winkel liegt. Wegen der Symmetrie lassen sich dann nämlich die Lösungen paarweise so verbinden, daß die vier zu einem dieser Paare gehörigen Punkte B, C und B', C' auf einem Kreise liegen. Solcher Kreise gibt es also nur zwei, und ihre Bestimmung wird daher einfacher sein. Wirklich findet man leicht ihren Halbmesser, da Sehnen gegebener Länge a Zentriwinkeln gegebener Größe entsprechen sollen; weiter kennt man noch zwei auf einem Durchmesser liegende, harmonisch verbundene Punkte, nämlich A und den Schnittpunkt von b und c. Die Kreise sind daher leicht zu konstruieren, und lösen unmittelbar die gestellte Aufgabe.

Findet man, daß eine in projektivischer Form gestellte Aufgabe nur eine Lösung hat, so läßt sie sich allein mittels des Lineals lösen.

Hat eine Aufgabe drei Lösungen, so werden die Stücke der zu bestimmenden Figur durch solche irrationale Ausdrücke bestimmt, die man durch Lösung von Gleichungen dritten Grades erhält Da überhaupt die Natur der algebraisch bestimmbaren Größen auf dem Grade der dazu dienenden Gleichungen beruht, so ist die Bestimmung des

---

1) Über eine andere Methode zur Lösung solcher Aufgaben ohne die Bildung der Gleichung siehe [100].

Grades dieser Gleichungen, also der Anzahl der Lösungen, ein wirklicher Beitrag zur Charakterisierung dieser Lösungen.

Der Gesamtgrad einer Gleichung in Beziehung auf mehrere (r) Variabeln ist gleich dem Grad einer nur eine dieser Größen enthaltenden Gleichung, die man erhält, wenn man aus ihr und einer hinreichenden Anzahl von beliebigen linearen Gleichungen die übrigen Variabeln eliminiert. Die große Bedeutung dieser Gradzahl ist wohl bekannt. Ist z. B. $r = 2$ und bezeichnen die Variabeln x und y Koordinaten in der Ebene, so bedeutet der genannte Grad die Ordnung einer Kurve. Ist dieser Grad, der auch durch die abzählenden Methoden ohne wirkliche Bildung der Gleichung zu bestimmen ist, gleich eins, so weiß man, daß die Kurve eine Gerade ist, und ihre vollständige Bestimmung erfolgt, wenn man nur noch zwei ihrer Punkte kennt. Ist der Grad zwei, so wird die Kurve ein Kegelschnitt sein und dann durch fünf ihrer Punkte oder durch andere Bedingungen — die in besonderen Fällen z. B. bewirken können, daß sie ein Kreis wird — bestimmt werden. Ebenso wird eine höhere Gradzahl schon an und für sich ein wesentliches Bestimmungsstück sein, das zur vollständigen Bestimmung der Kurve hinführen kann. Weiter kann eine Kurve gegebener Ordnung durch andere Anzahlen, z. B. durch die ihrer Doppelpunkte oder anderer singulärer Punkte genauer charakterisiert werden.

Auf ähnliche Weise kann man eine Kurve durch ihren Grad in Linienkoordinaten, d. h. ihre Klasse, und sodann genauer durch Anzahlen singulärer Tangenten charakterisieren.

Den Gesamtgrad einer Gleichung in den drei Punktkoordinaten im Raume nennt man die Ordnung der durch die Gleichung dargestellten Fläche. Diese Ordnungszahl leistet den ersten und wichtigsten Beitrag zur Bestimmung der Fläche, die dann durch eine hinreichende Anzahl ihrer Punkte oder auch auf andere Weise bestimmt werden kann. Äußerlich kann auch die Fläche durch andere ganze Zahlen, deren Bedeutung später erklärt werden wird, so durch ihren Rang und ihre Klasse, durch jene Zahlen, die ihre Doppelkurven oder andere singuläre Kurven charakterisieren, die Anzahlen isolierter singulärer Punkte usw. charakterisiert werden. Ebenso wird eine Raumkurve durch gewisse ganze Zahlen charakterisiert. Solche charakterisieren auch Scharen von Kurven und Flächen; dazu dienen z. B. die Anzahlen der Kurven oder Flächen einer einfach unendlichen Schar, die durch einen gegebenen Punkt gehen, eine gegebene Gerade berühren usw.

[2] Beziehung zur Algebra, mehrdimensionale Räume. Alle die hier besprochenen Anzahlen sind, wie schon in [1] bemerkt, Grade algebraischer Gleichungen. Die Methoden, mit denen wir uns beschäftigen werden, dienen dazu, diese Grade zu bestimmen, ohne daß es nötig ist, die Gleichungen selbst zu entwickeln. Eines setzen sie aber alle voraus, nämlich daß die Existenz der algebraischen Gleichung,

deren Grad in Beziehung auf verschiedene Größen oder deren Gesamtgrad gesucht wird, gesichert ist. Dies wird der Fall sein, wenn die Relation zwischen den betreffenden Größen aus gegebenen algebraischen Gleichungen allein durch die folgenden Operationen hergeleitet wird: 1. Elimination und ähnliche rein algebraische Umformungen, die ohne Auflösung der Gleichungen und ohne die damit möglicherweise verbundene, willkürliche Trennung der Wurzeln nach Vorzeichen, Realität usw. ausgeführt werden können, und 2. Differentiation. Man darf also die Methoden nur auf algebraisch darstellbare Gebilde anwenden, und man muß über die Möglichkeit einer Auflösung mittels der genannten Operationen urteilen können. Ein solches Urteil wird aber niemals Schwierigkeiten verursachen; dagegen erspart man sich die oft so weitläufige, wirkliche Ausführung der genannten Operationen. Wir bemerken, daß die Zulässigkeit der Differentiation es erlaubt, auch Tangenten- und Umhüllungsaufgaben unseren Methoden zu unterwerfen. Dasselbe gilt aber offenbar nicht von Aufgaben, deren Auflösung Integrationen verlangen, also von Längen- und Flächenbestimmungen usw.

Der Gegenstand und der Zweck der abzählenden Methoden ist also rein algebraisch. Gewissermaßen wäre es also natürlicher sie die abzählenden Methoden der Algebra als die abzählenden Methoden der Geometrie zu nennen. Historisch sind sie aber an geometrische Untersuchungen geknüpft, oder wenigstens an Untersuchungen, denen man eine geometrische Gestalt gegeben hat, und diese Gestalt hat man beibehalten, weil sie gewisse Vorteile darbietet. Einmal regt die geometrische Anschauung zu neuen Entdeckungen und Beobachtungen an. Man könnte vielleicht befürchten, daß sie auch irreführen könnte, namentlich weil die Untersuchungen sowohl reelle als imaginäre Gebilde umfassen sollen, und wir letztere, die nur durch imaginäre Größen definiert sind, im wirklichen Raume gar nicht zur Darstellung bringen. Wir werden jedoch in [47] sehen, daß man völlig sichere Schlüsse aus Fällen, wo gewisse Gebilde reell sind, auf solche, wo sie durch imaginäre Gebilde ersetzt werden, ziehen kann. Übrigens dürfen hier, wie überall in der exakten Geometrie, die wirklichen Schlüsse nicht auf eine mehr oder weniger gesicherte geometrische Anschauung gegründet werden, sondern müssen derartig sein, daß sie sich auch in die Sprache der Algebra übertragen lassen. Doch wird die geometrische Darstellung immer einen wichtigen Vorteil behalten, nämlich den, daß die dazu gehörigen Benennungen es erlauben, die zu behandelnden Begriffe festzuhalten und dadurch sowohl die Operationen, als auch die nach und nach gewonnenen Ergebnisse so einfach auszudrücken, daß man sie weiter benutzen kann. Diesen Dienst leistet nämlich hier die algebraische Zeichensprache nicht, wie es sonst der Fall ist, eben weil man durch die abzählenden Methoden die algebraischen Ausrechnungen umgeht.

Sodann ist für Anwendungen auf die eigentliche Geometrie die

geometrische Form ein unmittelbarer Vorteil. Aber auch abgesehen von diesem Vorteil, der ja nur auf den wirklichen Raum Bezug hat, bleibt die geometrische Darstellungsform überhaupt so nützlich, daß man, um auch Gleichungen mit mehr als drei Variabeln geometrisch ausdrücken zu können, als Gegenstand der abzählenden Methoden mehrdimensionale Räume behandelt. In den meisten Fällen glauben wir im folgenden die verschiedenen Methoden, die wir zu entwickeln haben, am besten durch Beispiele, die die Ebene oder den dreidimensionalen Raum betreffen, darlegen zu können. Die größere Vertrautheit mit diesen Gebieten, die wir bei unseren Lesern voraussetzen dürfen, wird nämlich dazu beitragen, daß die daraus entnommenen Beispiele die Brauchbarkeit der Methoden deutlicher hervortreten lassen. Einzelne sich auf die höheren Räume beziehende Beispiele werden jedoch zeigen, daß sich dieselben Methoden auch mit Nutzen auf mehrdimensionale Untersuchungen anwenden lassen. Dagegen verweisen wir die Entwicklung mehr zusammenhängender Theorien der mehrdimensionalen Gebilde, wenn sie auch abzählende Methoden benutzen, in Lehrbücher, die solche Gebilde zum Hauptgegenstande haben, wie denn überhaupt die zusammenhängenden Theorien, die man mittels der abzählenden Methoden ausführen kann, so die der algebraischen Kurven, Flächen usw., hier nicht unsere Hauptaufgabe sein können.

Die geometrische Form darf jedoch während der Untersuchung den algebraischen Ursprung der abzählenden Methoden niemals vergessen lassen. Das Festhalten an der Verbindung mit der Algebra ermöglicht es vielmehr, an jedem Punkte der Untersuchung, wo es nützlich sein möchte, die Gleichungen, deren Formen durch die Gradzahlen bestimmt werden, wirklich zu bilden, und so zu einer algebraischen Behandlung überzugehen. Es ist aber auch nötig, um mit vollständiger Sicherheit und mit voller Ausbeute die abzählenden Methoden selbst benutzen zu können.

[3] Reduzible Aufgaben; mehrfache Lösungen. Eine durch abzählende Methoden zu bestimmende Zahl n ist der Grad einer Gleichung, die man, wenn die Unbekannte x genannt wird, so schreiben kann:

(1) $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_n = 0,$$

wo $a_0, a_1 \ldots a_n$ von den übrigen variabeln oder willkürlichen Größen, die die zu untersuchenden Gebilde betreffen, abhängen. Diese Abhängigkeit kann eine solche sein, daß die Gleichung für alle Werte der Größen, also für alle zu behandelnden Gebilde, reduzibel wird, d. h., daß ihre linke Seite in ein Produkt von Faktoren zerfällt, die sowohl in Beziehung auf x, als auch auf die übrigen Größen rational sind. Man hat dann mit allgemeinen Bezeichnungen, wobei Π das Produkt von Faktoren von der nachstehenden Form bezeichnet,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n = \Pi (b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots b_r)^s,$$



und also

$$n = \sum (s r),$$

wo $\sum$ Summe bedeutet.

Wenn man nun durch eine abzählende Methode n bestimmt hat, so bedeutet diese Zahl einerseits die Anzahl der Lösungen einer Aufgabe, die so formuliert war, daß sie sich unmittelbar durch die Gleichung ausdrücken ließ, andererseits ist sie aber auch die Summe der mit den Koeffizienten s multiplizierten Anzahlen r der Lösungen einfacherer Aufgaben. Gewöhnlich ist in solchen Fällen die Bestimmung der verschiedenen Anzahlen r der Zweck der Untersuchung. Hat man dann n bestimmt, und dazu noch die Koeffizienten s, was oft durch die Betrachtung der Natur der verschiedenartigen Lösungen geschehen kann, so hat man nur eine Anzahlengleichung zur Bestimmung der Zahlen r, und muß dann noch eine hinreichende Anzahl anderer Anzahlengleichungen, in die dieselben Anzahlen in anderer Form eingehen, herleiten. Man hat dabei den Vorteil, daß die Werte von r ganze und positive Zahlen sein müssen. Dasselbe gilt übrigens auch von den Koeffizienten s, von welchen man bisweilen einige, deren direkte Bestimmung schwierig sein würde, durch Benutzung weiterer Anzahlengleichungen finden kann.

Die gestellte Aufgabe wird in diesem Falle reduzibel genannt. Die r Wurzeln der Gleichungen

$$b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots b_r = 0$$

geben s-fache Lösungen der allgemeinen Aufgabe.

Als Beispiel der hier genannten Auflösung nennen wir die Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte einer Kurve n^{ter} Ordnung mit einer Geraden, die durch einen k-fachen Punkt der Kurve geht und die Kurve noch in einem Punkte berührt. Die volle Anzahl dieser Schnittpunkte ist, wie für eine willkürliche Gerade, n; von diesen fallen aber jetzt k in den k-fachen Punkt, 2 in den Berührungspunkt, und nur die übrigen $n - k - 2$ sind eigentliche und getrennte Schnittpunkte.

[4] Spezialfälle und Grenzfälle; unendlich viele Lösungen. Wie in dem hier betrachteten Beispiele sind die in Faktoren zerlegbaren Gleichungen oft Spezialfälle der Gleichung, die zur Auflösung einer allgemeineren Aufgabe dient. Die für diese gewonnenen allgemeinen Ergebnisse sind natürlich auch auf alle darin inbegriffenen Spezialfälle anwendbar; nur muß man dann beachten, daß die Aufgabe auch für die Spezialfälle so gestellt wird, daß die spezialisierte Fragestellung keine Lösung der allgemeinen Aufgabe ausschließt und keine neue einführt. Wenn man also im ebengenannten Beispiele die Aufgabe als Spezialfall der Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit einer beliebigen Geraden betrachten will, so muß man nicht nur die getrennten, einzelnen Schnittpunkte, sondern auch die k in den k-fachen Punkt fallenden und die 2 in den Berührungspunkt fallenden Schnitt-

punkte mitzählen. Daß es nötig ist, die Aufmerksamkeit ausdrücklich auf den hier hervorgehobenen, selbstverständlichen Umstand zu richten, rührt daher, daß der Sprachgebrauch bisweilen im Spezialfalle nur gewisse Lösungen als eigentlich betrachtet und gewisse andere als uneigentlich ausschließt, die jedoch mitzuzählen sind, wenn man das allgemeine Resultat auf den Spezialfall anwenden will. Die Unterscheidung zwischen Schnittpunkten und Berührungspunkten könnte z. B. dazu führen, die in einem Berührungspunkte zusammenfallenden Schnittpunkte nicht unter die Schnittpunkte zu zählen, was jedoch im hier genannten Beispiele durchaus notwendig ist. Die genannte Überlegung könnte in anderen Beispielen größere Schwierigkeit verursachen als hier. Daher heben wir hervor, daß man, um eine Aufgabe der abzählenden Geometrie als Spezialfall einer allgemeinen Aufgabe betrachten zu können, sie als Grenzfall auffassen muß. Durch unendlich kleine Abänderung der Größen und Figuren, die im Spezialfalle bestimmte Werte, Lage und Gestalt annehmen, kann man einen Fall erhalten, auf welchen die für die allgemeinere Aufgabe geltende Abzählung unmittelbar Anwendung findet. Nachher muß man dann noch prüfen, wie viele der so gefundenen einzelnen Lösungen mit den sogenannten eigentlichen, und wie viele mit uneigentlichen Lösungen der Spezialaufgabe zusammenfallen.

Schon bei der algebraischen Behandlung können gewisse Wurzeln einer Gleichung in Spezialfällen der Beachtung entgehen, nämlich jene, die unendlich werden. Wenn in unserer Gleichung (1)

$$a_0 = a_1 = a_2 \cdots = a_{r-1} = 0$$

ist, so wird nur eine Gleichung von der Ordnung $n - r$ übrig bleiben, und die durch diese reduzierte Gleichung unmittelbar gestellte Aufgabe hat dann nur die durch ihre $n - r$ Wurzeln bestimmten $n - r$ Lösungen. Wenn man aber die Aufgabe als Spezialfall der durch die allgemeine Gleichung (1) gelösten Aufgabe auffaßt, kommen dazu noch die r Wurzeln, die eben, wenn man den Spezialfall als Grenzfall betrachtet, unendlich geworden sind. Wenn z. B. die Unbekannte x die Abszisse eines Schnittpunktes einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung und einer Geraden bezeichnet, so sieht man, daß man, um immer n Schnittpunkte zu erhalten, die unendlich fernen mitzählen muß, wenn es solche gibt.

Die unendlichen Wurzeln der Gleichung rühren ja übrigens nur von der Form der algebraischen Fragestellung her. Macht man die Gleichung homogen, indem man x durch $\frac{x}{y}$ ersetzt und die Gleichung mit y^n multipliziert, so wird ihre linke Seite immer n Faktoren von der Form $Ax + By$ haben, und diese Zahl, die dann als Anzahl der Lösungen zu betrachten ist, ändert sich nicht, wenn auch ein oder mehrere Koeffizienten a null werden. Ebenso verlangen die unendlich fernen Punkte keine besondere Berücksichtigung, wenn man die geometrische Fragestellung projektivisch macht.



Besonders sind solche Fälle zu beachten, in denen

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$$

wird, und die Gleichung (1) also identisch erfüllt wird. Die durch eine solche Gleichung dargestellte Aufgabe hat dann unendlich viele Lösungen, und die dafür angegebene Anzahl n wird also, wenigstens unmittelbar, bedeutungslos. Der Fall kann jedoch in der Weise als Grenzfall entstehen, daß die Identität nur davon herrührt, daß gleichzeitig alle Koeffizienten einen gemeinschaftlichen Faktor bekommen, und dieser Faktor verschwindet. Durch Ausscheidung dieses Faktors bekommt man dann immer n Lösungen der als Grenzfall betrachteten Aufgabe. In dem System von Kurven, das durch die in x, y und c algebraische Gleichung $f(x, y, c) = 0$ bestimmt wird, wo x und y Koordinaten, c ein variabler Parameter ist, werden sich die den Werten c_1 und c_2 entsprechenden Kurven z. B. in einer gewissen Anzahl r von Punkten schneiden. Wird $c_2 = c_1$, so fallen die Kurven zusammen und die wirkliche Anzahl der ihnen gemeinsamen Punkte wird unendlich, die Anzahl r also an und für sich bedeutungslos. Wird aber der Fall als ein Grenzfall betrachtet, so werden die Gleichungen $f(x, y, c) = 0$ und $\frac{\partial f(x,y,c)}{\partial c} = 0$ r Punkte bestimmen, die Grenzlagen der Schnittpunkte der durch c bestimmten und einer ihr unendlich benachbarten Kurve des Systems sind.

Ein anderes einfaches Beispiel bietet die Tangente an eine durch ihre Gleichung $f(x, y) = 0$ gegebene Kurve im Punkte (x, y) dar. Ihr Richtungskoeffizient α ist durch die Gleichung in Punktkoordinaten

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \alpha = 0$$

eindeutig bestimmt. Um dieses Resultat auch auf Spezialfälle anwenden zu können, muß man beachten, was die Gleichung unmittelbar ausdrückt: zwei der (n) Schnittpunkte der Kurve mit der durch α bestimmten Geraden durch (x, y) fallen in diesem Punkte zusammen. Werden die Größen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ für einen Punkt der Kurve $f(x, y) = 0$ beide null, so bedeutet das: alle durch diesen Punkt gehenden Geraden haben die genannte Eigenschaft und sind insofern Tangenten. Der Punkt ist dann im allgemeinen ein Doppelpunkt. Wenn man nachher gewöhnlich sagt, daß es in diesem Punkte zwei und nur zwei Tangenten gibt, beruht dies auf einer neuen für diesen Punkt besonders geltenden Bestimmung des Begriffs der Tangente als einer Geraden, die die Kurve in drei in diesem Punkte zusammenfallenden Punkten schneidet, und hat also nichts mit der ursprünglichen, durch unsere Gleichung gelösten Aufgabe zu tun. Betrachten wir dagegen diesen Fall als Grenzfall der Bestimmung der Tangente in einem willkürlichen Punkt derselben Kurve, so behält die Anzahl der Lösungen den Wert 1: man erhält die Tangente an denjenigen Zweig, auf dem man sich dem Doppelpunkt genähert hat.

[5] Relativität der Begriffe „allgemein“ und „speziell“; ebene Kurven gegebener Ordnung oder Klasse: Das letzte Beispiel zeigt, daß man bei der Entscheidung, ob ein Fall Spezialfall eines anderen ist, sich nicht an solche landläufige Benennungen halten darf, wie die einer Tangente an eine ebene Kurve; man muß vielmehr genau wissen, was die algebraische Gleichung, deren Grad man (ohne sie selbst zu bilden) bestimmt oder bestimmt hat, bedeutet. Ist die Kurve durch ihre Gleichung in Punktkoordinaten gegeben, also auch ihre Ordnung n bekannt, und hat sie einen Doppelpunkt, so wird die Tangentenbestimmung auf alle durch diesen Punkt gehenden Geraden passen. Die Anzahl $n(n-1)$, die wir für die Tangenten von einem gegebenen Punkt A aus an eine allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung finden werden, umfaßt daher im Falle, wo die Kurve einen Doppelpunkt D hat, die Gerade AD, und zwar, wie wir sehen werden, zweimal. Wenn dagegen die Kurve durch ihre Gleichung in Linienkoordinaten gegeben ist und diese Gleichung irreduzibel ist, so dürfen die durch Doppelpunkte gehenden Geraden nicht als Tangenten aufgefaßt werden. Die linke Seite der Gleichung eines solchen Punktes würde nämlich dann Faktor der linken Seite der Gleichung der Kurve sein.

Wenn andererseits die Kurve durch ihre Gleichung in Linienkoordinaten gegeben, also ihre Klasse n' bekannt ist, so wird sie, wie aus dem eben genannten Ergebnis durch Anwendung des Dualitätsprinzips hervorgeht, $n'(n'-1)$ Schnittpunkte mit einer willkürlichen Geraden haben, wenn man als solchen jeden Punkt betrachtet, von welchem zwei zusammenfallende Tangenten ausgehen. Dann muß man aber auch als Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve jeden Schnittpunkt mit einer Doppel- oder Wendetangente betrachten, wenn die Kurve solche hat, und zwar, wie wir sehen werden, beziehungsweise als zweifachen oder dreifachen Schnittpunkt. Diese Lösungen muß man ausscheiden, wenn man in Punktkoordinaten eine irreduzible Gleichung derjenigen Kurve haben will, deren Tangenten die gegebene Gleichung befriedigen.

Wir können hier „eine ebene Kurve c_n von der Ordnung n“ und „eine ebene Kurve $c_{n'}$ von der Klasse n'“ je für sich als allgemeine Begriffe aufstellen; sie umfassen alle Kurven, die durch eine allgemeine Gleichung vom Grade n in Punktkoordinaten, beziehungsweise vom Grade n' in Linienkoordinaten dargestellt werden. Man darf daher jedes für eine allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung c_n gefundene Resultat auf jede einzelne Kurve $c_{n,n'}$ dieser Ordnung anwenden, wenn man nur diese Kurven $c_{n,n'}$ und ihre Eigenschaften als Grenzfälle von c_n und ihren Eigenschaften betrachtet. Ebenso kann, wenn die Klasse der Kurve $c_{n,n'}$ n' ist, jede Eigenschaft der allgemeinen Kurve $c_{n'}$ von der Klasse n' auf sie übertragen werden, wenn man $c_{n,n'}$ als Grenzfall der Kurve $c_{n'}$ auffaßt. Die Grenzfälle sind aber ganz verschieden in diesen beiden Fällen, was schon aus den betrachteten Beispielen hervorgeht. Die c_n hat im allgemeinen keinen Doppel-

punkt; denn, wie wir sahen, mußten die Koordinaten eines solchen drei Gleichungen befriedigen; sie hat noch weniger Spitzen und höhere mehrfache Punkte. Dagegen hat sie im allgemeinen sowohl Doppel- als Wendetangenten; die allgemeine Kurve $c_{n'}$ von der Klasse n' entbehrt solcher Tangenten, hat aber sowohl Doppelpunkte, als auch Spitzen.

Dieser Umstand erklärt die Möglichkeit der später zu beweisenden Sätze [12], daß sowohl eine allgemeine Kurve von der Ordnung n von der Klasse $n(n-1)$, als auch eine allgemeine Kurve von der Klasse n' von der Ordnung $n'(n'-1)$ ist. Will man diese Resultate auf eine Kurve $c_{n,n'}$, wo n und n' offenbar für n und $n' > 2$ nicht diese beiden Bedingungen erfüllen können, anwenden, so muß dies getrennt geschehen. Um die für die c_n allgemeine Klassenbestimmung auf $c_{n,n'}$ anzuwenden, muß man bemerken, daß dann ihre verschiedenen Doppel- und mehrfachen Punkte als ein $(n(n-1)-n')$facher Teil zählen, der ausgeschieden werden muß, wenn man nur die Klasse n' der nicht zusammengesetzten Kurve $c_{n\,n'}$ haben will. Ebenso wird die aus der Klassenzahl n' hergeleitete Ordnungszahl $n'(n'-1)$ einer Kurve entsprechen, die aus $c_{n,n'}$ und ihren Doppel- und mehrfachen Tangenten zusammengesetzt ist.

Man ersieht hieraus sogleich, daß man nicht „Kurve von der Ordnung n und der Klasse n'" als einen allgemeinen, durch die beiden Zahlen n und n' bestimmten Begriff aufstellen darf. Zwar gibt es solche Resultate, und besonders abzählende, die nur von diesen Zahlen abhängen, und bei der Herleitung von solchen kann es sich von selber nahe legen, die zu untersuchende Kurve $c_{n,n'}$ zu nennen; wir haben aber keinen algebraischen Anknüpfungspunkt für den Grenzübergang, der nötig ist, um diese Resultate in Spezialfällen zu deuten. Auch teilen sich die $c_{n,n'}$ in Mengen, denen nicht alle Anzahlenbestimmungen gemeinsam sind.

Eher könnte man erwarten, daß Kurven von gegebener Ordnung n mit einer gegebenen Anzahl d von Doppelpunkten eine solche zusammenhängende Menge bildeten, so daß man von einer durch diese Zahlen n und d bestimmten „allgemeinen" Kurve sprechen und ihre Eigenschaften auf alle denselben Zahlen n und d entsprechenden Kurven übertragen könnte; denn eine solche Kurve wird durch eine Gleichung n^{ten} Grades in Punktkoordinaten, deren Koeffizienten d Bedingungen unterworfen sind, bestimmt sein. Dieser Schluß wäre jedoch unrichtig; denn die Bedingungsgleichungen würden hier nicht allgemeine Gleichungen von gewisser Ordnung sein, und ihr Ergebnis kann sehr wohl auf verschiedenartige Lösungen führen. Daß dies wirklich der Fall ist, sehen wir an folgendem Beispiel:

Es gibt zwei verschiedene Gattungen ebener Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, nämlich 1. irreduzible Kurven, und 2. solche, die aus einer Kurve dritter Ordnung und einer Geraden zusammengesetzt sind. Daß die eine Gattung die andere nicht umfaßt,

sieht man schon daran, daß beide von elf Parametern abhängen. Es gibt zwar eine Kurve, die, als Grenzfall betrachtet, jeder dieser Kurvenarten angehört, nämlich jene, die aus einer Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einer Geraden zusammengesetzt ist. Man erhält sie in beiden Fällen durch Einführung eines neuen Doppelpunktes. Der dazu nötige Grenzübergang ist aber ganz verschieden. Rechnet man nämlich eine solche Grenzkurve zur erstgenannten Gattung, so ist der neue Doppelpunkt ein Schnittpunkt der Geraden und der Kurve dritter Ordnung; rechnet man sie zur letzten Gattung, so muß er der Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung sein. Dieser gemeinschaftliche Spezialfall bildet also keinen Übergang zwischen den beiden Gattungen, die daher ganz getrennte Mengen bilden.

Freilich bestand hier die eine Gattung aus zusammengesetzten Kurven, es ist aber zu erwarten, daß es für höhere Kurven mit bestimmten Anzahlen von Doppelpunkten auch getrennte Gattungen von nicht zusammengesetzten Kurven gibt.

Der hier hervorgehobene Umstand hindert uns jedoch natürlich nicht daran, Untersuchungen anzustellen, die Kurven n^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten (oder wie wir sie später nennen werden: Kurven c_n^p n^{ter} Ordnung und vom Geschlechte p $(= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d)$) betreffen, und sodann die gewonnenen Ergebnisse auf solche Spezialfälle anzuwenden, wo ein $(d+1)^{\text{ter}}$ Doppelpunkt hinzugekommen oder ein Doppelpunkt in eine Spitze ausgeartet ist. Die allgemeinen Ergebnisse beziehen sich dann gleichzeitig auf alle die verschiedenen Gattungen von Kurven n^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten, die existieren mögen. Um die Spezialfälle richtig als Grenzfälle aufzufassen, muß man aber dann jede dieser Gattungen als der Gesamtheit der Kurven n^{ter} Ordnung angehörig betrachten. Bezeichnet man dagegen die zu untersuchenden Kurven als Kurven n'^{ter} Klasse mit d' Doppeltangenten, so muß man, um Spezialfälle als Grenzfälle aufzufassen, die Darstellung durch Linienkoordinaten zugrunde legen.

Während wir also durch solche Zahlen, wie die der Doppelpunkte oder anderer singulärer Punkte, eine zusammenhängende Menge von Kurven nicht bestimmen können, wird dies doch in anderen Fällen möglich, namentlich durch Einführung von Bedingungen, die durch lineare Gleichungen in den Koeffizienten ausgedrückt werden. Dadurch wird nur die Anzahl der Parameter vermindert; die auf diese Weise enger begrenzte Menge von Kurven behält dagegen ihren vollen Zusammenhang und teilt sich nicht in Gattungen. Die ebenen Kurven n^{ter} Ordnung die in gegebenen Punkten gegebene Multiplizitäten haben, werden durch die Ordnung n, die diese Multiplizitäten angebenden Zahlen und die Lage der Punkte so definiert, daß sie eine zusammenhängende Menge bilden, und alle Eigenschaften jeder zu dieser Menge gehörenden Kurve sind als Spezialfälle in den allgemeinen Eigenschaften

der ganzen Menge inbegriffen. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß die genannten Bedingungen, durch die wir hier die Menge definieren, unter sich unabhängig sind.

[6] Fortsetzung; Flächen gegebener Ordnung und Klasse. Im Raume kann man als allgemeine Begriffe: „Flächen m^{ter} Ordnung“ und „Flächen m''^{ter} Klasse“ aufstellen. Der erstere Begriff umfaßt alle jene Flächen, die in Punktkoordinaten durch eine Gleichung m^{ten} Grades dargestellt werden, und daher jede Gerade in m Punkten schneiden, der letztere alle jene, die in Ebenenkoordinaten durch eine Gleichung m''^{ten} Grades dargestellt werden, an die man daher durch eine Gerade m'' Tangentialebenen legen kann.

In jedem der ∞^2 Punkte[1]) einer Fläche m^{ter} Ordnung gibt es eine Tangentialebene, die die Fläche in einer Kurve, die einen Doppelpunkt im Berührungspunkte hat, schneidet. Solcher Tangentialebenen gibt es also auch ∞^2. Es wird ∞^1 Doppeltangentialebenen geben, deren Schnitte zwei Doppelpunkte haben, und ∞^1 stationäre Tangentialebenen, deren Schnitte eine Spitze haben. Jeder dieser Mengen entspricht eine abwickelbare Fläche, die jene Ebenen berühren. Die Fläche besitzt ferner endliche Anzahlen von dreifachen Tangentialebenen, die die Fläche in Kurven mit drei Doppelpunkten schneiden, von Ebenen, die sie in Kurven mit einem Doppelpunkt und einer Spitze schneiden, von Ebenen, die sie in Kurven mit einem Selbstberührungspunkt schneiden. Es wird ∞^3 Gerade geben, die die Fläche berühren, d. h. sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, ∞^2, die sie in zwei Punkten berühren oder mit ihr eine Berührung zweiter Ordnung haben, d. h. sie in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, ∞^1, die sie in drei Punkten berühren usw. Die Mengen solcher Geraden bilden beziehungsweise sogenannte Komplexe, Kongruenzen (siehe unten [8]) und Regelflächen.

Dagegen wird eine Fläche m^{ter} Ordnung im allgemeinen nicht mehrfache Punkte oder mehrfache Kurven haben, sondern nur, wenn ihre Koeffizienten bestimmten, durch Systeme von Gleichungen ausdrückbaren Bedingungen unterworfen sind. Um die für die allgemeine Fläche gefundenen Ergebnisse auf Flächen mit solchen Singularitäten anzuwenden, muß man diese Formen als Grenzformen betrachten. Wenn jede durch einen Punkt der Fläche gehende Gerade die Fläche daselbst in mehr als einem Punkte schneidet, so ist der Punkt ein mehrfacher Punkt. Die durch einen solchen Punkt gehenden Geraden oder Ebenen werden dann immer — und wie es sich zeigen wird, immer mehrfach — unter die zu einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung gehörigen Anzahlen der Tangenten und Tangentialebenen mitzuzählen sein.

---

1) Von Gebilden, die von s Parametern abhängen, sagt man, daß es deren ∞^s gibt.

Eine mehrfache Kurve ist eine solche, deren sämtliche Punkte im eben genannten Sinne mehrfache Punkte sind. Die Schnittpunkte einer solchen Kurve mit einer willkürlichen Ebene werden alle mehrfache Punkte des ebenen Schnittes sein, und jede Ebene erfüllt also jetzt die eine Tangentialebene ursprünglich charakterisierende Bedingung. Die Gleichung, welche jene Tangentialebenen einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung, die noch zwei weitere Bedingungen erfüllen, bestimmte, wird also in diesem Spezialfall identisch befriedigt sein und ihr Grad ist daher an und für sich bedeutungslos [4]. Betrachtet man aber die Fläche als Grenzform einer Fläche m^{ter} Ordnung, so bekommt man nach Ausscheidung eines identisch verschwindenden Faktors eine Gleichung zur Bestimmung der eigentlichen Tangentialebenen, und die weggefallenen Wurzeln der allgemeinen Gleichung werden die Grenzlagen solcher Tangentialebenen bestimmen, deren Berührungspunkte im Grenzfalle in die doppelte oder mehrfache Kurve fallen. (Vgl. im folgenden [27].)

Diese Betrachtungen deuten wenigstens an, wie man Flächen, die als Flächen m^{ter} Ordnung bezeichnet werden, denen man aber noch gewisse — in der abzählenden Geometrie gewöhnlich durch Anzahlen definierte — Singularitäten beilegt, als Grenzfälle der allgemeinen Flächen m^{ter} Ordnung betrachten muß und kann. Wenn man aber eine solche Fläche als Fläche m''^{ter} Klasse bestimmt, muß man ähnlicherweise den Ausgangspunkt von der Darstellung in Ebenenkoordinaten nehmen. Im besonderen lassen sich dann Betrachtungen die den hier über Flächen m^{ter} Ordnung angestellten dualistisch entsprechen, leicht anstellen.

Zur genaueren Charakterisirung einer Fläche benutzen wir noch eine Zahl m', die wir den Rang der Fläche nennen: sie ist die Anzahl der Tangenten der Fläche, die einem gegebenen Büschel angehören. Ein ebener Schnitt einer Fläche ist eine Kurve von der Ordnung m und der Klasse m'. Ist die Fläche eine allgemeine Fläche m^{ter} Ordnung, so wird der Schnitt im allgemeinen keine mehrfachen Punkte haben: wenn die Ebene des Schnittes die Fläche nicht berührt, so treten solche nur als Schnittpunkte der Ebene mit etwa vorkommenden mehrfachen Kurven auf. Ein umbeschriebener Kegel ist von der Ordnung m' und der Klase m''. Ist die Fläche allgemein von der Klasse m'', so hat dieser Kegel im allgemeinen keine mehrfachen Tangentialebenen. Eine „Fläche von dem Range m'" läßt sich nicht als ein allgemeiner Begriff aufstellen.

[7] Fortsetzung; Raumkurven. Wie „eine Fläche m^{ter} Ordnung" ein allgemeiner Begriff ist, so darf auch der Begriff „vollständige Schnittkurve zweier Flächen von den Ordnungen m_1 und m_2" als allgemeiner Begriff aufgestellt werden. Jede solche Schnittkurve läßt sich nämlich dadurch, daß man die Koeffizienten der Gleichungen der allgemeinen Flächen von je derselben Ordnung spezialisiert, darstellen. Dies gilt aber allein von den vollständigen Schnittkurven, und die beiden Zahlen

m_1 und m_2 sind erforderlich, um eine wirkliche Kurvengattung auf diese Weise zu definieren. Dagegen wird die Bestimmung „Raumkurve n^{ter} Ordnung“, d. h. Raumkurve, die eine willkürliche Ebene in n Punkten schneidet, für einen gegebenen Wert von n nicht einen einzigen und allgemeinen Begriff abgeben. Es gibt vielmehr für $n > 1$ mehrere Gattungen von Raumkurven n^{ter} Ordnung.

Für $n = 2$ kann die Kurve entweder aus zwei (sich im allgemeinen nicht schneidenden) Geraden bestehen oder ein Kegelschnitt sein.

Für $n = 3$ kann sie entweder aus einer Geraden und der einen oder anderen der Kurven zweiter Ordnung bestehen, oder eine ebene Kurve dritter Ordnung, oder eine solche Raumkurve sein, die sich als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, die sich außerdem in einer Geraden schneiden, bestimmen läßt. Das gibt im ganzen vier verschiedene Gattungen.

Für $n = 4$ gibt es (vgl. im folgenden [28] und [40]), außer den aus Kurven niedrigerer Ordnung zusammengesetzten Kurvengattungen und den ebenen Kurven, zwei Gattungen nicht zusammengesetzter Raumkurven. Die eine besteht aus den vollständigen Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung. Die Kurven der anderen Gattung lassen sich als Schnittkurven einer Fläche zweiter Ordnung und einer Fläche dritter Ordnung, die außerdem durch zwei zu derselben Schar gehörende Erzeugende der ersteren Fläche geht, darstellen.

Aber auch zwei Anzahlen: die Ordnung n und die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte, d. h.: die Anzahl der Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und die Kurve zweimal schneiden, genügen nicht, um eine Kurvengattung, selbst nicht um eine Gattung nicht zusammengesetzter Raumkurven, eindeutig zu definieren. Es gibt z. B. zwei Gattungen von nicht zusammengesetzten Kurven neunter Ordnung mit 18 scheinbaren Doppelpunkten, nämlich — wie wir in [27] und [28] sehen werden — erstens die vollständigen Schnittkurven zweier Flächen dritter Ordnung, und zweitens die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurven, welche jede Erzeugende der einen Schar in sechs und jede Erzeugende der anderen Schar in drei Punkten schneiden. Letztere Kurven kann man als Schnittkurven der Fläche zweiter Ordnung mit einer Fläche sechster Ordnung, die außerdem durch drei Erzeugende der ersten Schar geht, darstellen.

Es wird zwar in den hier genannten Fällen Kurven geben, die gleichzeitig zwei Gattungen derselben Ordnung angehören. Um sie jedoch als Grenzfälle der beiden Gattungen zu betrachten, muß man verschiedene Grenzübergänge benutzen. Zwei sich schneidende Gerade bilden z. B. einen Grenzfall jeder der obengenannten Gattungen von Kurven zweiter Ordnung im Raum. Ihr wirklicher Schnittpunkt ersetzt für die erstgenannte Gattung den scheinbaren Schnittpunkt der zwei sich im allgemeinen nicht schneidenden Geraden. Für die andere Gattung ist er

ein neu entstandener Doppelpunkt des Kegelschnittes. Wird dieser als Schnitt einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung erzeugt, so entsteht der genannte Grenzfall, wenn diese Flächen sich berühren.

Ganz ebenso kann im allgemeinen ein wirklicher Doppelpunkt einer Raumkurve auf die folgenden zwei Weisen entstehen: 1. Zwei verschiedene Zweige können sich nähern, bis sie sich schneiden, so daß ein scheinbarer Doppelpunkt durch einen wirklichen ersetzt wird, und 2. ein wirklicher Doppelpunkt kann dadurch neu entstehen, daß zwei Flächen, durch deren Schnitt die Raumkurve bestimmt wird, sich berühren.

Projiziert man eine Raumkurve c_n von der Ordnung n von einem (nicht auf einer Tangente der Kurve liegenden) Punkt A aus auf eine Ebene, so wird die Projektion eine ebene Kurve c_n' von derselben Ordnung, und die Projektionen ihrer Tangenten werden ebenfalls Tangenten der Projektion c_n' sein. Die Klasse n' dieser Projektion wird die Anzahl der Tangenten der Raumkurve c_n sein, die eine Gerade treffen, oder die Ordnung der von den Tangenten erzeugten Fläche; man nennt sie den Rang der Raumkurve. Eine durch eine Tangente gehende Ebene ist selbst Tangentialebene der Raumkurve; also ist der Rang auch gleich der Anzahl der Tangentialebenen der Raumkurve, die durch eine beliebige Gerade gehen. Die Wendetangenten der Projektion c_n' sind Spuren der durch das Projektionszentrum A gehenden Schmiegungsebenen der Raumkurve, d. h. solcher Ebenen, die diese in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Ihre Anzahl n'' oder die Klasse der durch die Schmiegungsebenen erzeugten abwickelbaren Fläche gehört auch zu den Zahlen, durch welche die Kurve charakterisiert wird.

Wir sehen, daß den ∞^1 Punkten der Kurve c_n ∞^1 Tangenten und ∞^1 Schmiegungsebenen entsprechen. Man hätte auch von den ∞^1 Ebenen, die eine abwickelbare Fläche erzeugen, ausgehen können. Ihnen entsprechen dann die ∞^1 Erzeugenden dieser Fläche, in welchen sich zwei konsekutive Ebenen schneiden, und die ∞^1 Punkte ihrer Rückkehrkurve, in welchen sich drei konsekutive Ebenen schneiden. Die dadurch hergestellte Verbindung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen wird jedoch dieselbe sein, welchen dieser Ausgangspunkte man auch wählen mag. Wir werden nämlich in [14] sehen, daß drei der von einem beliebigen Punkte der Raumkurve und zwei der von einem beliebigen Punkte einer Tangente ausgehenden Schmiegungsebenen zusammenfallen.

[8] Fortsetzung; Mengen von Geraden. Die Verhältnisse, die sich hier für den Punktraum oder den Ebenenraum mit drei Dimensionen darboten, d. h. für den gewöhnlichen Raum, wenn die Punkte oder Ebenen als Elemente betrachtet werden, treffen wir, nur in mehr komplizierter Gestalt, in der ganzen algebraisch darstellbaren Geometrie wieder, z. B. in der Lehre von Räumen mit mehreren Dimensionen oder von dem gewöhnlichen Raum, wenn darin die Geraden als Elemente be-

trachtet werden. Eine allgemeine ganz rationale Gleichung, deren Gesamtgrad oder deren verschiedene Grade in Beziehung auf verschiedene Größen (Koordinaten) gegeben sind, bestimmt immer eine durch diesen Grad oder durch diese Grade vollständig definierte, zusammenhängende Menge, die man erhält, wenn man allen Koeffizienten alle möglichen Werte gibt. Auch mehrere solcher Gleichungen werden eine zusammenhängende Menge bestimmen, die man als den vollständigen Schnitt der durch die Gleichungen bestimmten Gebilde bezeichnet, und auch diese werden durch gewisse Anzahlen vollständig charakterisiert. Durch das Zerfallen solcher vollständiger Schnitte, das in Spezialfällen stattfinden kann, entstehen aber, wie wir bei den Raumkurven sahen, Gebilde, die sich nicht auf dieselbe Weise durch ganze Zahlen vollständig charakterisieren und von anderen Gattungen trennen lassen. Wenigstens werden diejenigen, deren Einführung sich am nächsten darbietet, verschiedenen Gattungen mit ganz verschiedenen geometrischen Eigenschaften angehören, und läßt man die benutzten Gradzahlen ins Unendliche wachsen, so wird auch die Anzahl der zur Unterscheidung der Gattungen notwendigen Zahlen ins Unendliche wachsen. Dies hindert jedoch nicht, daß man auch solche Untersuchungen anstellen kann, die sich gleichzeitig auf alle Gattungen, die gewisse charakterisierende Zahlen gemein haben, erstrecken, z. B. auf alle Raumkurven von der Ordnung n und mit h scheinbaren Doppelpunkten.

Ein Strahlenkomplex m^{ter} Ordnung ist die Gesamtheit der ∞^3 Geraden (Strahlen), deren Linienkoordinaten eine Gleichung m^{ten} Grades befriedigen. m wird die Anzahl der Geraden eines Büschels sein, die zu dem Komplex gehören. Die Komplexe m^{ter} Ordnung bilden eine durch m definierte zusammenhängende Menge.

Die ∞^2 Strahlen, die zwei algebraischen Bedingungen (oder einer doppelten Bedingung) unterworfen sind, bilden eine Kongruenz. Die Anzahl der Strahlen der Kongruenz, die durch einen gegebenen Punkt gehen, wird die Ordnung (oder der Bündelgrad) der Kongruenz genannt, die Anzahl jener, die in einer Ebene liegen, ihre Klasse (oder Feldgrad). Sowohl durch eine einzelne dieser Zahlen, als auch durch beide, werden jedoch im allgemeinen gleichzeitig mehrere getrennte Gattungen von Kongruenzen bestimmt. Zur weiteren Charakterisierung einer Kongruenz wird auch ihr Rang benutzt, das ist die Anzahl der Strahlenpaare der Kongruenz, die einem eine gegebene Gerade enthaltenden Büschel angehören.

Die Gesamtheit der ∞^1 Strahlen, die drei Bedingungen unterworfen sind, bilden eine Regelfläche, deren Ordnung die Anzahl der Strahlen ist, die eine gegebene Gerade schneiden. Diese Ordnung ist, wie im Falle, wo man die Regelfläche als Ort ihrer Punkte betrachtet, die Anzahl der Schnittpunkte der Fläche mit einer Geraden. Sie ist auch die Anzahl der Tangentialebenen, die man durch eine Gerade an diese Fläche legen

kann, weil eine solche Ebene eine Erzeugende enthalten muß, und umgekehrt. Sie ist also auch die Klasse der Regelfläche. Eine Fläche, die als Punkt- und Ebenenort betrachtet, von der zweiten Ordnung und zweiten Klasse ist, ist wegen ihrer zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden auf doppelte Weise als Regelfläche zweiter Ordnung zu betrachten. Für $m > 2$ gibt es, wenn wir zusammengesetzte Flächen mitnehmen, mehrere Gattungen von Regelflächen von der Ordnung m.

b) Über die Bestimmung der Anzahl zusammenfallender Lösungen.

[9] Über die Anwendung allgemeiner Sätze. Wie schon bemerkt [3], gibt eine durch abzählende Methoden gefundene Zahl an, wie viele Lösungen eine gestellte Aufgabe hat. Diese Zahl bekommt aber erst dann eine wirkliche Bedeutung, wenn man weiß, wie vielmal jede Lösung darin mitzuzählen ist. Dies muß man besonders wissen, um ein allgemeines Ergebnis auf solche Spezialfälle anzuwenden, in denen einige der Lösungen ihren Charakter so ändern, daß mehrere Lösungen zusammenfallen. Wenn man sich besonders mit dem Spezialfall beschäftigt, wird man oft solche Lösungen als „uneigentlich" ausscheiden, muß aber dann nicht nur ihre Anzahl, sondern auch ihre „Multiplizität" kennen.

Ein für allemal bemerken wir jedoch, daß die Ergebnisse, die wir ausdrücklich aussprechen, insofern allgemein sind, als sie auf alle Fälle anwendbar sind, die nicht durch ausdrücklich ausgesprochene Voraussetzungen ausgenommen sind. In den dazu gehörigen Spezialfällen umfassen sie also sowohl die „eigentlichen", als auch die „uneigentlichen" Lösungen, die so vielmal zu zählen sind, als sich zeigen wird, wenn man diese Fälle als Grenzfälle auffaßt. Wir kommen also nicht mit uns selbst in Widerspruch, wenn wir z. B. einmal sagen, daß eine Kurve von der Ordnung n von der Klasse $n(n-1)$, ein andermal, daß eine Kurve von der Ordnung n mit d Doppelpunkten von der Klasse $n(n-1) - 2d$ ist, und wiederum, daß eine Kurve von der Ordnung n mit d Doppelpunkten und e Spitzen von der Klasse $n(n-1) - 2d - 3e$ ist (s. [12]). Betrachten wir nämlich letztere Kurve als Spezialfall einer Kurve n^{ter} Ordnung, so fallen von den durch einen gegebenen Punkt P gehenden Tangenten 2 mit der Geraden, die P mit einem Doppelpunkt verbindet, und 3 mit der Geraden, die P mit einer Spitze verbindet, zusammen; und betrachten wir sie als Spezialfall einer Kurve n^{ter} Ordnung mit $d + e$ Doppelpunkten, so sind die Geraden, die P mit den Spitzen verbinden, noch einmal unter die Tangenten mitzuzählen.

Ebenso wichtig wie die Abzählung zusammenfallender Lösungen ist, um vom Allgemeinen zum Speziellen überzugehen, wird sie für den entgegengesetzten Übergang sein, mit dem wir uns im nächsten Kapitel

beschäftigen werden. Dieser wird nach dieser Erörterung mit vollständiger Sicherheit benutzt werden können.

Die aus den genannten Gründen notwendige Abzählung zusammenfallender Lösungen wird sich zwar in vielen Fällen sogleich ergeben, wenn man nur die wirkliche Bedeutung der algebraischen Gleichung beachtet, deren Grad durch die gefundene Zahl angegeben wird; in anderen Fällen wird man sie durch wirkliche Bildung dieser Gleichung finden können. Es wird aber gut sein, für die wichtigsten der vorkommenden Fälle allgemeine Regeln aufzustellen. Da die betreffende algebraische Gleichung mit einer Unbekannten gewöhnlich in letzter Instanz durch Elimination einer anderen Unbekannten aus zwei Gleichungen gebildet wird, und der gesuchte Grad dann die Anzahl von Schnittpunkten der durch diese Gleichungen bestimmten ebenen Kurven ist, so bedarf man vor allem einfacher Regeln für die Abzählung zusammenfallender Schnittpunkte solcher Kurven.

[10] Element einer algebraischen Kurve; zusammenfallende Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden. Wir entlehnen der analytischen Geometrie den Begriff eines Elementes einer algebraischen Kurve. Nehmen wir den sogenannten Mittelpunkt des Elementes A zum Anfangspunkt eines Parallelkoordinatensystems, so wird das Element durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

(1) $$x = t^{\nu}, \quad y = b_1 t^{\mu_1} + b_2 t^{\mu_2} + b_3 t^{\mu_3} + \cdots,$$

wo ν und μ solche ganze positive Zahlen sind, daß ν nicht mit allen μ einen gemeinschaftlichen Teiler hat, und daß $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots$ ist, wodurch letztere Reihe für hinreichend kleine Werte von t konvergent wird. Wenn die x-Achse, die man dann Mitteltangente des Elementes nennt, das Element im Mittelpunkte A berührt, so ist weiter $\nu < \mu_1$. Diese Tangente schneidet hier die Kurve in μ_1 zusammenfallenden Punkten, und jede andere Gerade durch A schneidet sie in ν zusammenfallenden Punkten. Der Punkt A ist also ein ν-facher Punkt der Kurve, und die Zahlen ν und μ_1 werden unverändert bleiben, wenn man eine andere durch den Anfangspunkt gehende Gerade zur y-Achse macht, während die x-Achse ungeändert bleibt. Ändert man dagegen auch die x-Achse, so wird in der neuen Darstellung $\mu_1 = \nu$ werden.

Diese Darstellung bleibt noch anwendbar, wenn x und y trianguläre Koordinaten $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ bezeichnen. Der Begriff des Elementes und die daran geknüpften Zahlen sind also auch anwendbar auf unendlich ferne Punkte der Kurve; dabei muß man die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ durch einen solchen Punkt gehen lassen, wobei die eine oder die andere Gerade die unendlich ferne Gerade sein kann. Man ersieht auch, daß $y = 0$, $x = \infty$ $(x_2 = x_3 = 0)$ ein beliebiger Punkt der Geraden $y = 0$ darstellen kann.



Punkte einer Kurve, die demselben Elemente angehören und zusammenfallen, werden konsekutive Punkte dieser Kurve genannt; die konsekutiven Punkte des Mittelpunktes liegen also auf allen, den verschiedenen Werten von $t = x^{\frac{1}{\nu}}$ entsprechenden ν Partialzweigen. Die Tangenten in konsekutiven Punkten sind konsekutive Tangenten. Stellt man die Kurve durch eine *Riemann*sche Fläche dar, so kann man zwei konsekutive Punkte durch eine auf der Fläche liegende Kurve verbinden, die schließlich unendlich klein wird, wenn man die Punkte einander nähert.

Gibt man x einen unendlich kleinen Wert erster Ordnung, so werden die ν entsprechenden, zu den Partialzweigen gehörigen Werte von y unendlich klein von der Ordnung $\frac{\mu_1}{\nu}$, die Summe ihrer Ordnungen also gleich μ_1 sein. Da nun jeder singuläre Punkt einer algebraischen Kurve aus solchen Elementen gebildet ist, so bekommt man folgende Regel, um ihre in einem nicht unendlich fernen Punkt A zusammenfallenden Schnittpunkte mit einer durch diesen Punkt gehenden Geraden a abzuzählen: Ihre Anzahl ist gleich der Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken, die auf einer Geraden l, deren Abstand von A unendlich klein erster Ordnung ist und die einen endlichen Winkel mit a bildet, zwischen der Geraden a und den Schnittpunkten von l mit der Kurve abgeschnitten werden.[1]) Daß in dieser Formulierung auch endliche Abstände mitgezählt zu werden scheinen, ist gleichgültig, weil sie als unendlich klein 0ter Ordnung betrachtet werden können.

Dieser Satz läßt sich übrigens auch ohne Teilung in Elemente beweisen. Er ist nämlich eine unmittelbare Folge des in [53] zu beweisenden Satzes von *Carnot*, wenn die hier genannten Geraden a und l als Seiten des Dreiecks genommen werden.

[11] *Bézouts* Satz; zusammenfallende Schnittpunkte zweier ebenen Kurven. In der hier folgenden Herleitung werden wir schon ein erstes und einfaches Beispiel für die Methode kennen lernen, mit deren übrigen und weiter reichenden Anwendungen wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden. In dem hier vorliegenden Falle benutzen wir nur den Umstand, daß, weil eine ebene algebraische Kurve n^{ter} Ordnung jede Gerade der Ebene in n Punkten schneidet, umgekehrt eine Kurve, die nach ihrer Erzeugung algebraisch sein muß (vgl. [2]), und die mit einer vorgelegten Geraden a n einfache Schnittpunkte hat ohne sie sonst zu treffen, von der Ordnung n sein muß.

---

1) Da wir der Bequemlichkeit halber der Regel eine nicht projektivische Form gegeben haben, so ist zu bemerken, daß die Hilfsgerade nicht durch einen unendlich fernen Kreispunkt gehen darf. Dies dürfte übrigens schon dadurch ausgedrückt sein, daß ihr Abstand von P unendlich klein erster Ordnung sein soll. Dieselbe Bemerkung betrifft auch spätere Anwendungen dieser Regel, wie in [11] und [12].

Wir nehmen an, daß in einer Ebene zwei Kuren c_m und k_n bzw. von der Ordnung m und n gegeben sind, und daß (Fig. 1) eine beliebige Gerade l, die durch einen weder auf c_m noch auf k_n liegenden Punkt B geht, diese in M und N und eine nicht durch B gehende Gerade a in L schneidet. Wir bestimmen sodann auf l noch einen Punkt P durch die Gleichung

(1) $$\frac{LP}{BP} = \frac{LN}{BN} - \frac{LM}{BM},$$

wo die Strecken mit Vorzeichen gerechnet sind; dann wird der Punkt P eindeutig durch die übrigen Punkte bestimmt.

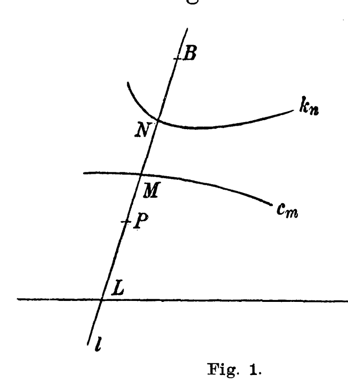


Fig. 1.

Dreht sich die Gerade l um den Punkt B, so wird der Punkt P eine algebraische Kurve durchlaufen. Diese Kurve geht nicht durch den Punkt B; denn das Verhältnis $\frac{LP}{BP}$ kann nicht unendlich werden, weil unseren Voraussetzungen gemäß weder N noch M mit B zusammenfallen kann. Jede Gerade l enthält übrigens mn Punkte P, entsprechend den mn Kombinationen der m Schnittpunkte M mit c_m und der n Schnittpunkte N mit k_n. Jeder dieser mn Punkte muß ein einfacher Schnittpunkt der Geraden l mit dem gesuchten Orte sein; denn wegen ihrer gleichartigen Bestimmung müssen sie wenigstens alle dieselbe Multiplizität haben, und wollte man sie alle als r-fache Schnittpunkte betrachten, so würde man durch Drehung der Geraden l nur denselben Ort r-mal bekommen. Dieser Ort schneidet also jede Gerade l in mn Punkten und muß daher von der Ordnung mn sein.

In einem Schnittpunkt der Kurven c_m und k_n werden M und N zusammenfallen; dann wird $\frac{LP}{BP} = 0$ sein und also P mit L zusammenfallen, d. h. in a liegen. Umgekehrt bewirkt die Annahme $\frac{LP}{BP} = 0$ immer, daß M und N zusammenfallen, da L und B immer verschieden sind. Die Schnittpunkte der Kurven entsprechen also eindeutig den Schnittpunkten der Geraden a mit dem gefundenen Orte der Punkte P; ihre Anzahl ist daher mn oder zwei ebene Kurven von den Ordnungen m und n schneiden sich in mn Punkten (*Bézouts* Satz).

Unsere Beweisführung gibt uns aber auch ein bestimmtes Kriterium dafür, wievielmal jeder den Kurven gemeinschaftliche Punkt durch diesen Satz als Schnittpunkt der Kurven mitgezählt wird, nämlich ebenso vielmal als der entsprechende Punkt P unter die Schnittpunkte der Geraden l mit dem Orte der Punkte P mitgezählt wird. Da nun die Strecken MN und LP gleichzeitig unendlich klein von derselben Ordnung werden, können wir die in [10] gefundene Regel anwenden, um auch die

Anzahl der in einem nicht unendlich fernen Punkt A zusammenfallenden Schnittpunkte zweier Kurven zu finden. Man ziehe eine Gerade l, deren Abstand von A unendlich klein erster Ordnung ist: die gesuchte Anzahl ist dann die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken MN, die auf der Geraden l zwischen ihren Schnittpunkten mit den zwei Kurven abgeschnitten werden. Eine einfache projektivische Transformation, die ja die Anzahl der Schnittpunkte nicht ändert, wird es erlauben, diese Regel auch auf die Abzählung der zusammenfallenden unendlich fernen Schnittpunkte anzuwenden.

Anmerkung. Durch Anwendung der Gleichung (1), die als Gleichung zwischen zwei Doppelverhältnissen angeschrieben werden kann, haben wir unserer Beweisführung einen projektiven Charakter gegeben. Dies könnte auch durch Anwendung der Relation $(BBLP) \overline{\wedge} (BBMN)$ ausgedrückt werden, die aussagt, daß die projektiven Gebilde, die durch entsprechende Punkte B und B, L und M, P und N bestimmt werden, in B auch ihren zweiten entsprechenden gemeinsamen Punkt haben. Dieser Ausdrucksweise werden wir uns in einer späteren Verallgemeinerung [159] bedienen. Denselben Beweis könnte man auch in nicht projektiver Form führen, nämlich wenn B unendlich fern (jedoch kein Kreispunkt) ist. Dann genügt es, $LP = MN$ zu setzen. An diese nicht projektive Form schließt sich die oben ausgeführte Abzählung der zusammenfallenden Schnittpunkte unmittelbar an.

Beispiel 1. Wenn beide Kurven in A Spitzen und dieselbe Haupttangente ($y = 0$) haben, lassen sie sich beziehungsweise durch

$$x = t^2, \quad y = b_1 t^3 + b_2 t^4 + b_3 t^5 + \cdots,$$

und

$$x = t^2, \quad y = c_1 t^3 + c_2 t^4 + c_3 t^5 + \cdots$$

darstellen. Also werden im allgemeinen sechs Schnittpunkte, für $b_1 = c_1$ sieben, für $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2$ acht, für $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2$, $b_3 = c_3$ neun Schnittpunkte in B zusammenfallen.

2. Hat c_m in A eine Knotenspitze, die durch

$$x = t^2, \quad y = b_1 t^4 + b_2 t^5 + \cdots,$$

wo sowohl b_1 als $b_2 \gtrless 0$ ist, dargestellt wird, und k_n ein einfaches Element mit derselben Mitteltangente, so fallen in A im allgemeinen vier Schnittpunkte zusammen, fünf aber, wenn die Kurven in B dieselbe Krümmung haben.

3. Ist A der Mittelpunkt mehrerer Elemente der Kurven c_m und k_n, so ist die Anzahl der in A fallenden Schnittpunkte die Summe der Anzahlen der Schnittpunkte der verschiedenen Elemente von c_m mit den verschiedenen Elementen von k_n.

[12] Klasse einer ebenen Kurve gegebener Ordnung. Ganz dieselbe Methode läßt sich anwenden, um die Klasse einer ebenen Kurve



von der Ordnung n zu bestimmen. M und N ([11] Fig. 1) sind dann als zwei verschiedene Schnittpunkte derselben Kurve k_n mit der Geraden l aufzufassen, während alle anderen in [11] gegebenen Bestimmungen unverändert bleiben. Da es n Schnittpunkte M und dazu $n-1$ andere Schnittpunkte N gibt, wodurch jede der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Strecken MN zweimal gezählt wird, so wird die Ordnung des Ortes der Punkte P jetzt $n(n-1)$ sein. Die Geraden, die den festen Punkt B mit den Schnittpunkten dieses Ortes mit der Geraden a verbinden, werden k_n je in zwei zusammenfallenden Punkten treffen. Um zu erfahren, wieviemal eine Gerade BA, die B mit einem Punkt A der Kurve verbindet, unter die $n(n-1)$ Tangenten zu zählen ist, genügt es, eine Gerade durch B zu legen, die mit BA einen unendlich kleinen Winkel erster Ordnung bildet: die Anzahl der mit BA zusammenfallenden Tangenten der Kurve (als allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung betrachtet) wird dann die doppelte Summe der Ordnungen der auf dieser Geraden durch die Kurve abgeschnittenen Strecken MN sein.

Eine einfache Tangente BA wird man also nur erhalten, wenn auf der der Geraden BA benachbarten Geraden eine Strecke MN von der Ordnung $\frac{1}{2}$ abgeschnitten wird. Dies wird aber eben eintreten, wenn die Kurve in A einen gewöhnlichen Punkt hat, und B auf der Mitteltangente liegt; denn in der Darstellung [10] eines solchen Elementes ist $\nu = 1$, $\mu_1 = 2$. Ist A ein Doppelpunkt der Kurve und liegt B auf keiner der Tangenten der diesen bildenden Zweige, so ist BA zweimal unter die $n(n-1)$ Tangenten mitzuzählen. Aus den in [11] beispielsweise gegebenen Darstellungen einer Spitze und einer Knotenspitze ersieht man, daß, wenn A eine Spitze oder Knotenspitze ist, und B nicht auf der Mitteltangente liegt, beziehungsweise 3 oder 5 der $n(n-1)$ durch B gehenden Tangenten mit BA zusammenfallen. Legt man nun ausdrücklich der Kurve n^{ter} Ordnung z. B. d Doppelpunkte, e Spitzen und f Knotenspitzen bei, so drückt man damit aus [9], daß man nicht mehr jede durch einen dieser Punkte gehende Gerade unter die Tangenten mitzählen will. In diesem Falle wird die Klasse n' der Kurve also

$$(1) \qquad n' = n(n-1) - 2d - 3e - 5f$$

sein; auf dieselbe Weise kann man den Einfluß jedes singulären Punktes, den man der Kurve beilegt, auf ihre Klasse berücksichtigen.

Aus der Darstellung einer Spitze [11] 1. ersieht man noch, daß die Gerade $y = \varepsilon$, wo ε unendlich klein erster Ordnung ist, die Kurve in drei Punkten schneiden wird, deren drei Abstände voneinander von der Ordnung $\frac{2}{3}$ sind. Die Gerade BA ist also, wenn B auf der Mitteltangente $y = 0$ liegt[1]) $2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 4$ mal unter die $n(n-1)$ Tan-

1) Man kann immer das Koordinatensystem so wählen, daß B die Koordinaten $x = \infty$, $y = 0$ hat, siehe [10]; man kann auch B unendlich fern annehmen und dann Parallelkoordinaten benutzen.

genten an die Kurve (als allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung betrachtet) zu zählen, wenn man aber die Spitze bei der Bestimmung der Klasse schon in Betracht gezogen hat, nur einmal unter die n' Tangenten von B aus an die mit diesem singulären Punkt versehene Kurve.

Setzen wir in der Darstellung [11] 2. einer Knotenspitze $y = \varepsilon$, wo ε unendlich klein erster Ordnung ist, so findet man für t die Reihe

$$t = \frac{1}{\sqrt[4]{b_1}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} - \frac{b_2}{4\sqrt{b_1^3}}\varepsilon^{\frac{2}{4}} + \cdots$$

und also

$$x = t^2 = \frac{1}{\sqrt{b_1}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \frac{b_2}{2\sqrt[4]{b_1^7}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} \cdots$$

x erhält also vier Werte, die unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$ sind. Von ihren sechs Differenzen — welche Abstände der Schnittpunkte der Geraden $y = \varepsilon$ bedeuten — sind vier von der Ordnung $\frac{1}{2}$ und zwei von der Ordnung $\frac{3}{4}$. Die doppelte Summe dieser Ordnungen ist also sieben. Da die Klasse schon durch die Knotenspitze um fünf erniedrigt ist, zählt somit die Gerade AB von einem Punkte B der Mitteltangente aus für zwei der Tangenten an die mit der Knotenspitze bereits versehene Kurve n^{ter} Ordnung. Dieses Ergebnis wird übrigens in [13] in einem viel allgemeineren inbegriffen sein.

Noch bemerken wir, daß, wenn ein singulärer Punkt A von verschiedenen Elementen gebildet wird, die Anzahl der mit BA zusammenfallenden Tangenten unter den $n(n-1)$, die an die Kurve (als allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung betrachtet) gelegt werden können, aus der doppelten Anzahl der nach [12] bestimmten, in A zusammenfallenden Schnittpunkte dieser Elemente und der Summe der Anzahlen der Tangenten, die zu jedem Elemente gehören, bestehen wird. Dies folgt unmittelbar aus den aufgestellten Regeln.

[13] Anwendung des Dualitätsprinzips; *Halphens* Satz. Wenden wir das Dualitätsprinzip auf die in [11] und [12] gefundenen Ergebnisse an, so finden wir, daß Kurven von den Klassen m' und n' $m'n'$ gemeinschaftliche Tangenten haben, und daß eine allgemeine Kurve von der Klasse n' von der Ordnung $n'(n'-1)$ ist. Die in Spezialfällen zusammenfallenden gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kurven und die zusammenfallenden Schnittpunkte einer Geraden mit einer gegebenen Kurve von der Klasse n' und daher auch die Multiplizitäten der sich in Spezialfällen aus einer solchen Kurve ausscheidenden Geraden [5] lassen sich nach Regeln abzählen, die man leicht aus den in [11] und [12] mittels des Dualitätsprinzips herleiten kann. Wir brauchen aber dabei nicht zu verweilen, da man überhaupt jederzeit die zu untersuchende Figur mit der dualistisch entsprechenden vertauschen kann, was analytisch dadurch geschieht, daß man die Punktkoordinaten

als Linienkoordinaten deutet, und umgekehrt. Daher werden wir auch im folgenden oft die Anwendungen des Dualitätsprinzips als ganz selbstverständlich übergehen.

Dagegen muß man immer die Beziehung zwischen den sich dualistisch entsprechenden Darstellungen derselben Figur beachten; besonders wird uns der Zusammenhang zwischen den Reihen, die ein Kurvenelement in Punktkoordinaten und in Linienkoordinaten darstellen, ein für abzählende Untersuchungen wichtiges Ergebnis liefern.

Wir stellen in Punktkoordinaten das Element durch die Gleichungen [10] (1) dar, oder indem wir in dem für y aufgestellten Ausdruck $t = x^{\frac{1}{\nu}}$ setzen, durch die Reihe

$$(1) \qquad y = b_1 \left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu_1} + b_2 \left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu_2} + b^3 \left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu_3} \ldots,$$

wo nur überall derselbe Wert von $x^{\frac{1}{\nu}}$ benutzt werden muß; dann werden die ν Werte von $x^{\frac{1}{\nu}}$ die ν Partialzweige geben. $x = 0$, $y = 0$ ist der Mittelpunkt A des Elements, und, indem wir $\mu_1 > \nu$ annehmen, $y = 0$ seine Mitteltangente AB, die das Element in μ_1 zusammenfallenden Punkten schneidet. Der Punkt B ist durch $y = 0$, $x = \infty$ bestimmt.

Eine beliebige Tangente an das Element, d. h. eine Tangente an die Kurve, deren Bestimmung innerhalb der Konvergenzgrenzen der dazu zu benutzenden Reihen liegt, wird die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} X - Y + y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

haben. Wir können also

$$u = \frac{dy}{dx}, \quad w = y - x \frac{dy}{dx}$$

als ihre Linienkoordinaten betrachten. In diesen wird $w = 0$ den Mittelpunkt A bestimmen, $u = 0$ den Punkt, den wir B genannt haben.

Aus (1) erhalten wir

$$u = \frac{dy}{dx} = b_1 \frac{\mu_1}{\nu} t^{\mu_1 - \nu} + b_2 \frac{\mu_2}{\nu} t^{\mu_2 - \nu} + b_3 \frac{\mu_3}{\nu} t^{\mu_3 - \nu} + \cdots$$

$$w = y - x \frac{dy}{dx} = b_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\nu}\right) t^{\mu_1} + b_2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\nu}\right) t^{\mu_2} + b_3 \left(1 - \frac{\mu_3}{\nu}\right) t^{\mu_3} + \cdots,$$

oder, wenn wir $u = s^{\mu_1 - \nu}$ setzen

$$(2) \qquad u = s^{\mu_1 - \nu}, \quad w = c_1 s^{\mu_1} + c_2 s^{\mu_2} + c_3 s^{\mu_3} + \cdots$$

Das Element wird also in Linienkoordinaten ganz wie vorhin in Punktkoordinaten dargestellt, nur daß ν durch $\mu_1 - \nu$ ersetzt wird, während μ_1 seinen Wert behält. $\mu_1 - \nu$ wird die Anzahl ν' der durch B

gehenden Tangenten angeben, die mit BA zusammenfallen. Also ist

(3) $$\mu_1 = \nu + \nu',$$

und μ_1 bedeutet gleichzeitig die Anzahl der zusammenfallenden Schnittpunkte der Mitteltangente und die Anzahl der vom Mittelpunkt ausgehenden, zusammenfallenden Tangenten. ν und ν' werden beziehungsweise die Punktmultiplizität und die Tangentenmultiplizität des Ortes genannt. Dann wird (3) den Satz von *Halphen* ausdrücken.

Haben mehrere Elemente denselben Mittelpunkt A und ist $\Sigma\nu$ die Summe ihrer Punktmultiplizitäten, also die Anzahl der zusammenfallenden Schnittpunkte einer beliebigen, durch A gehenden Geraden, und hat eine Gerade AB μ in A zusammenfallende Schnittpunkte, so wird BA für $\mu - \Sigma\nu$ der von B ausgehenden Tangenten zu zählen sein.

Die Multiplizitäten ν und ν' liefern den ersten Beitrag zur Charakterisierung eines Kurvenelements. Für ein einfaches Element ist $\nu = \nu' = 1$. Ein Wendepunkt ist ein Element mit der Punktmultiplizität 1, das die Mitteltangente (Wendetangente) in drei zusammenfallenden Punkten schneidet. Für ihn ist also $\nu = 1$, $\mu_1 = 3$ und somit $\nu' = 2$. Die dualistisch entsprechende Singularität, für welche $\nu = 2$, $\nu' = 1$ ist, haben wir schon in [11] 1. kennen gelernt und ihren Mittelpunkt eine Spitze genannt. Diese Singularitäten werden durch die genannten Werte von ν und ν' vollständig charakterisiert. Für eine Knotenspitze ersieht man aus der Darstellung [11] 2., daß $\nu = \nu' = 2$ ist. Um eine einfache Knotenspitze zu erhalten, deren Einfluß auf die Klasse einer Kurve gegebener Ordnung wir in [12] bestimmt haben, müßten wir aber auch $b_2 \gtrless 0$ voraussetzen. Da aber hier die Bedingung $b_2 \gtrless 0$ zur Folge hat, daß in der Reihe (2) auch $c_2 \gtrless 0$ wird, so wird einer einfachen Knotenspitze dualistisch wieder eine einfache Knotenspitze entsprechen[1]), und eine solche wird also denselben Einfluß auf die Ordnung einer Kurve gegebener Klasse, wie auf die Klasse einer Kurve gegebener Ordnung ausüben.

Legen wir z. B. einer Kurve von gegebener Klasse n' d' Doppeltangenten, e' Wendetangenten und f einfache Knotenspitzen bei, so findet man, der Formel [12] (1) entsprechend, für ihre Ordnung n den folgenden Ausdruck

(4) $$n = n'(n'-1) - 2d' - 3e' - 5f.$$

Auf nähere Bestimmungen dieser Art kommen wir in [70] und [71] wieder zurück.

1) Dieses Resultat ist in dem in [74] bewiesenen, sehr allgemeinen Satz inbegriffen.



Die große Bedeutung des Satzes von *Halphen,* die namentlich im dritten Kapitel hervortreten wird, beruht darauf, daß sie eine Relation zwischen Anzahlen aufstellt, die — z. B. im Gegensatz zu der Abzählung zusammenfallender Schnittpunkte [11] oder zur Bestimmung des Einflusses eines singulären Punktes auf die Klasse einer Kurve gegebener Ordnung [12] — von der Betrachtung der Ordnungen unendlich kleiner Größen ganz unabhängig ist.

[14] Elemente von Raumkurven. Da sich eine Raumkurve in eine ebene Kurve, die von derselben Ordnung ist und deren Klasse dem Range der Raumkurven gleich ist, projizieren läßt, und da die Spur des Ortes ihrer Tangenten in einer Ebene von derselben Klasse n'' wie diese abwickelbare Fläche ist, während ihre Ordnung dem Range n' der Raumkurve gleich ist [7], so läßt sich *Halphens* Satz verschiedentlich auf ein Element einer Raumkurve übertragen. Ein solches läßt sich durch die bereits behandelte Darstellung der entsprechenden Elemente der genannten Projektionen und Spuren darstellen, und mit Bezug hierauf können wir vom Mittelpunkt A, von der Mitteltangente a und von der Mittelschmiegungsebene α des Elementes der Raumkurve sprechen.

Demgemäß wird die Beschaffenheit des Elements in erster Linie durch die folgenden Multiplizitäten ausgedrückt: Die Punktmultiplizität ν ist die Anzahl der mit A zusammenfallenden Punkte, in denen eine willkürliche, durch A gehende Ebene die Raumkurve schneidet; die Tangentenmultiplizität ν' ist die Anzahl der mit a zusammenfallenden Tangenten der Raumkurve, die eine a schneidende Gerade schneiden; die Ebenenmultiplizität ν'' ist die Anzahl der mit α zusammenfallenden Schmiegungsebenen der Raumkurve, die durch einen beliebigen Punkt von α gehen. Nach *Halphens* Satz wird dann gleich

$\nu + \nu'$ 1. die Anzahl der mit A zusammenfallenden Punkte, in denen eine durch die Tangente a gehende Ebene die Raumkurve schneidet, und 2. die Anzahl der mit a zusammenfallenden Tangenten, die eine durch den Punkt A gehende Gerade schneiden;

$\nu' + \nu''$ 1. die Anzahl der mit a zusammenfallenden Tangenten die eine in der Ebene α liegende Gerade schneiden, und 2. die Anzahl der mit α zusammenfallenden Schmiegungsebenen der Raumkurve, die durch einen Punkt von a gehen.

Daraus folgt, daß ν die Punktmultiplizität und $\nu' + \nu''$ die Tangentenmultiplizität [13] des von einem Punkte der Schmiegungsebene aus projizierten Elements ist, und daß $\nu + \nu'$ die Punktmultiplizität und ν'' die Tangentenmultiplizität des Elements wird, das das gegebene Element in der Spur der von den Tangenten der Kurve erzeugten Fläche in einer durch den singulären Punkt gehenden Ebene abbildet. Wenn

man nun *Halphens* Satz auch auf diese Elemente anwendet, so findet man den Ausdruck

$\nu + \nu' + \nu''$ für die Anzahlen 1. der mit A zusammenfallenden Schnittpunkte der Raumkurve mit ihrer Schmiegungsebene α, 2. der mit a zusammenfallenden Tangenten der Raumkurve, die eine in der Ebene α liegende und durch A gehende Gerade schneiden, 3. der mit α zusammenfallenden, durch A gehenden Schmiegungsebenen.

Projiziert man die Raumkurve von einem Punkt P der Tangente a aus, so werden ν' der durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangentialebenen des projizierenden Kegels durch a gehen. Der Rest dieses Kegels ist dann zwar von der Ordnung n, aber nur von der Klasse $n' - \nu'$, und dasselbe gilt von der Projektion. Das Element dieser Projektion wird die Punktmultiplizität $\nu + \nu'$, die Tangentenmultiplizität ν'' haben. Damit erhält man einen neuen Beweis der ersten, durch $\nu + \nu' + \nu''$ gegebenen Abzählung. Ähnlich könnte man den Schnitt der Tangentenfläche mit einer durch a gehenden Ebene benutzen; er zerfällt in eine Kurve von der Ordnung $n' - \nu'$ und der Klasse n'' mit einem Element $(\nu, \nu' + \nu'')$, und in die ν'mal zu zählende Gerade a.

Wenn man das Projektionszentrum P in A annimmt, so wird die Projektion, abgesehen von Geraden und Punkten, die sich abgesondert haben, von der Ordnung $n - \nu$ und der Klasse $n' - \nu - \nu'$ sein und ein Element haben, das durch die Multiplizitäten ν' und ν'' charakterisiert wird. Ebenso wird nach ähnlicher Absonderung der Schnitt der Schmiegungsebene von der Ordnung $n' - \nu' - \nu''$ und der Klasse $n'' - \nu''$ sein und ein Element haben, das durch die Multiplizitäten ν und ν' charakterisiert wird.

Für einen gewöhnlichen Punkt der Kurve hat man $\nu = \nu' = \nu'' = 1$. Bemerkenswert sind noch die Punkte, für welche eine der Zahlen zwei wird, während die zwei andern gleich Eins sind. Ein Punkt mit einer durch $\nu = \nu' = 1$, $\nu'' = 2$ charakterisierten Singularität ist ein solcher, in welchem die Schmiegungsebene, die man hier stationär nennt, die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten schneidet. Die durch $\nu = 2$, $\nu' = 1$, $\nu'' = 1$ charakterisierte Singularität, die dualistisch einer stationären Schmiegungsebene entspricht, wird eine Spitze der Raumkurve sein, was daraus ersichtlich ist, daß in einer willkürlichen Projektion der Raumkurve der entsprechende Punkt eine Spitze wird. Die durch $\nu = 1$, $\nu' = 2$, $\nu'' = 1$ charakterisierte Singularität besitzt ein solcher Punkt, dessen Projektion ein Wendepunkt der Projektion der Raumkurve ist, und der darum auch selbst als Wendepunkt zu bezeichnen ist. Die gefundenen Anzahlbestimmungen enthalten eine vollständige Angabe der entsprechenden Eigenschaften aller Projektionen jedes der hier beschriebenen Elemente einer Raum-

kurve und aller ebenen Schnitte der ihr entsprechenden Tangentenfläche.[1])

Man sieht, daß sowohl die Abzählung der zusammenfallenden Schnittpunkte jeder ebenen Kurve mit einer Geraden und jeder Raumkurve mit einer Ebene, als auch die dualistisch entsprechenden Abzählungen leicht ausführbar sind, wenn alle Elemente durch die hier genannten Zahlen charakterisiert werden.

[15] Kurven in Räumen von mehreren Dimensionen; planimetrische Anwendung. Diese Betrachtungen lassen sich auf Räume von einer beliebigen Anzahl (r) von Dimensionen erweitern. Wir werden eine in einem solchen enthaltene, algebraisch bestimmte Gesamtheit von ∞^1 Punkten eine Kurve c_n nennen. Sie wird vollständige oder unvollständige Schnittkurve von $r - 1$ je durch eine Gleichung zwischen den r Koordinaten bestimmten $(r - 1)$-dimensionalen Räumen sein. Eine Gleichung ersten Grades bestimmt einen linearen $(r - 1)$-dimensionalen Raum $\pi_{(r-1)}$; dieser läßt sich auch durch r Punkte bestimmen. Die Ordnung n der Kurve c_n ist die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einem $\pi_{(r-1)}$. Wir werden die Gesamtheit von ∞^{r-s+1} Räumen $\pi_{(r-1)}$ betrachten, die c_n in s konsekutiven Punkten schneiden, und die Anzahl solcher Räume, die noch $r - s + 1$ gegebene Punkte enthalten, den $(s - 1)^{\text{ten}}$ Rang der Kurve c_n nennen und mit $n^{(s-1)}$ bezeichnen. Ein Element der Kurve c_n läßt sich ebenso wie bei ebenen Kurven durch Reihenausdrücke für die Koordinaten bestimmen. Es kann nun ein solches Element vorkommen, das mit jedem der durch seinen Mittelpunkt A gehenden ∞^{r-1} Räumen $\pi_{(r-1)}$ ν zusammenfallende Schnittpunkte gemeinsam hat, mit ∞^{r-2} durch A gehenden $\pi_{(r-1)}$ $\nu + \nu'$, mit ∞^{r-3} $\nu + \nu' + \nu''$ usw. und endlich mit ∞^{r-s} Räumen $\pi_{(r-1)}$ $\nu + \nu' + \nu' + \cdots \nu^{(s-1)}$. Ich behaupte, daß ein Raum $\pi_{(r-1)}$, der diese Eigenschaft hat und durch $r - s$ andere gegebene Punkte (B) geht, ebenso vielmal unter die $n^{(s-1)}$ Räume $\pi_{(r-1)}$ zu zählen ist, die c_n in s zusammenfallenden Punkten schneiden und durch A und die Punkte (B) gehen. Diesen Raum nennen wir α_{r-1}.

Um diesen Satz zu beweisen, werden wir voraussetzen, daß er richtig ist, wenn die Zahl der Dimensionen nur $r - 1$ ist. Außer den $\pi_{(r-1)}$, die durch die Punkte (B) gehen und c_n in s konsekutiven Punkten schneiden, werden wir solche lineare Räume $\pi_{(r-2)}$ von $(r - 2)$ Dimensionen betrachten, die auch durch (B) gehen und c_n in $s - 1$ konsekutiven Punkten schneiden. Wir werden nun die ganze Figur von einem Punkte P des Raumes $\alpha_{(r-1)}$ aus auf einen neuen $\pi_{(r-1)}$, den wir als π'_{r-1} bezeichnen, projizieren; die Projektionen der einzelnen Gebilde bezeichnen wir

1) Diese Eigenschaften, wie die der Elemente, für welche mehrere der Multiplizitäten zwei sind, treten auf den von Fräulein *H. Lund* (Verlag von Martin Schilling) konstruierten Kartonmodellen deutlich hervor.

durch Hinzufügen eines Striches an ihre eigenen Bezeichnungen. Ein lineares Gebilde wird durch einen linearen Raum projiziert, dessen Dimensionszahl um 1 größer ist, und der noch P enthält: die Projektion wird sodann als Schnitt dieses projizierenden Raumes mit $\pi'_{(r-1)}$ bestimmt und wird dieselbe Anzahl von Dimensionen, wie das projizierte Gebilde selbst, besitzen. Die Projektion der Kurve c_n ist eine neue Kurve c'_n, die Projektionen der Räume π_{r-2} sind neue Räume $\pi'_{(r-2)}$, die je c'_n in $s-1$ konsekutiven Punkten schneiden und außerdem durch feste Punkte (B') bestimmt werden. Der Schnitt $\alpha'_{(r-2)}$ des Raumes $\alpha_{(r-1)}$ mit $\pi'_{(r-1)}$ wird $\nu+\nu'+\nu''+\cdots\nu^{(s-1)}$ konsekutive, mit der Projektion A' von A zusammenfallende Punkte der Kurve c'_n enthalten, und, unserer Voraussetzung gemäß, werden also ebensoviele der Räume $\pi'_{(r-2)}$, die durch A' gehen, mit $\alpha'_{(r-2)}$ zusammenfallen. Daraus folgt, daß dieselbe Anzahl von die Gerade PA schneidenden Räumen $\pi_{(r-2)}$ in $\alpha_{(r-1)}$ liegt. Nun ist PA eine willkürliche, im Raume $\alpha_{(r-1)}$ liegende und durch A gehende Gerade. Legen wir durch diese eine willkürliche Ebene (einen linearen zweidimensionalen Raum), so wird diese die Räume $\pi_{(r-2)}$ in Punkten schneiden, die eine Kurve bilden, deren Tangenten die Schnitte der Räume $\pi_{(r-1)}$ sind, die ja die Räume $\pi_{(r-2)}$ enthalten und die Kurve c_n je in s zusammenfallenden Punkten schneiden. Da nun PA die genannte ebene Kurve in $\nu+\nu'+\nu''\cdots\nu^{s-1}$ konsekutiven, mit A zusammenfallenden Punkten schneidet, so werden wegen des *Halphen*schen Satzes ebensoviele durch A gehende Tangenten an diese Kurve mit PA, und also auch ebensoviele der Räume $\pi_{(r-1)}$, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, mit $\alpha_{(r-1)}$ zusammenfallen.

Da die gemachte Voraussetzung für einen zweidimensionalen Raum (eine Ebene) gilt, so ist unser Satz allgemein bewiesen.

Wir werden sogleich diesen Satz auf eine planimetrische Frage anwenden. Wir können nämlich die Koeffizienten der Gleichung einer ebenen Kurve k_n als Koeffizienten der Gleichung eines linearen $(r-1)$-dimensionalen Raumes $\pi_{(r-1)}$ in einem linearen Raume mit r Dimensionen auffassen, indem $r=\frac{1}{2}n(n+3)$ ist. Die Bedingung, daß die ebene Kurve durch einen Punkt (x,y) der Ebene gehen soll, wird durch eine lineare Gleichung in den Koeffizienten ausgedrückt. Sie sagt daher auch aus, daß der der Kurve entsprechende $(r-1)$-dimensionale Raum durch einen gegebenen Punkt des r-dimensionalen geht. In dieser Weise entsprechen allen Punkten der Ebene gewisse, einem nicht-linearen zweidimensionalen Raume angehörende Punkte des r-dimensionalen Raumes. Einer Kurve c der Ebene wird eine Kurve c' des r-dimensionalen Raumes entsprechen, und einem Elemente der Kurve c mit dem Mittelpunkte A ein Element der Kurve c' mit dem Mittelpunkt A'. Einer Kurve k_n, die c in s konsekutiven Punkten schneidet, wird ein Raum π_{r-1} entsprechen, der c' in s konsekutiven Punkten schneidet. Aus dem eben bewiesenen Satze können wir also den folgenden herleiten, der später

Anwendung finden wird: Nehmen wir an, daß es in einem System von ∞^1 ebenen Kurven k_n, die eine gegebene Kurve derselben Ebene c je in s konsekutiven Punkten schneiden und noch durch $\frac{1}{2}n(n+3)-s$ gegebene Punkte der Ebene gehen, μ gibt, die durch einen weiteren gegebenen Punkt P gehen, so wird die Grenzkurve des Systems, deren s zusammenfallende Schnittpunkte in dem Elemente A liegen — wenn nicht auch andere Elemente denselben Hauptpunkt haben — genau so vielmal unter die μ durch den Punkt A gehenden Kurven des Systems zu zählen sein, als sie mit A zusammenfallende Schnittpunkte hat. — Haben mehrere Elemente denselben Hauptpunkt A, so muß man die zu diesen gehörigen Kurven des Systems je für sich nach derselben Regel abzählen.

[16] Zusammenfallende Schnittpunkte einer Raumkurve mit einer Fläche; Erweiterung des *Bézout*schen Satzes. Die Schnittpunkte einer Raumkurve c_n mit einer Ebene α lassen sich dadurch bestimmen, daß man c_n von einem Punkte B der Ebene α aus auf eine neue Ebene ω projiziert: die gesuchten Schnittpunkte werden dann in die Schnittpunkte der Projektion von c_n mit der Spur von α projiziert. Dadurch kann man aus der in [10] angegebenen Regel eine entsprechende für die Schnittpunkte einer Raumkurve mit einer Ebene bilden, nämlich:

Um abzuzählen, wieviel Schnittpunkte einer Raumkurve c_n mit einer Ebene α in einem Punkt A zusammenfallen, legt man in einem Abstand von A, der unendlich klein erster Ordnung ist, eine Ebene π, die einen endlichen Winkel mit α bildet; die gesuchte Anzahl ist dann die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Abstände der Schnittpunkte der Ebene π mit c_n von der Ebene α.

Ganz wie es in [11] geschah, kann man hieraus die Abzählung der Schnittpunkte einer Raumkurve c_n mit einer beliebigen Fläche φ_m herleiten. Die Gerade l ist jetzt als Erzeugende eines die Raumkurve c_n enthaltenden Kegels mit dem Scheitel B ([11] Fig. 1) zu betrachten, die Punkte N und M als ihre Schnittpunkte mit c_n und mit der Fläche φ_m und L als ihren Schnittpunkt mit einer festen Ebene α. Der Punkt P der Geraden l wird wieder durch die Beziehung

$$\frac{LP}{BP}=\frac{LN}{BN}-\frac{LM}{BM}$$

bestimmt. Der Ort des Punktes P wird dann eine Ebene π, die durch den Scheitel B des Kegels geht, in mn Punkten schneiden, also von der Ordnung mn sein, und seine mn Schnittpunkte mit der Ebene α werden den mn Schnittpunkten der Kurve c_n mit der Fläche φ_m entsprechen. Aus der eben vorgenommenen Abzählung folgt dann die folgende Regel (in der wir den Punkt B unendlich fern annehmen):

Um abzuzählen, wie viel Schnittpunkte einer Raumkurve

c_n mit einer Fläche φ_m in einem Punkt A zusammenfallen, legt man eine Ebene π, deren Abstand von A unendlich klein erster Ordnung ist, und in dieser Ebene parallele Gerade l durch alle ihre (dem Punkte A unendlich nahe liegenden) Schnittpunkte N mit c_n: die gesuchte Anzahl ist dann die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken MN, die auf den Geraden l zwischen ihren Schnittpunkten M mit φ_m und den genannten Punkten N abgeschnitten werden.

Der hier bewiesene Satz und der daraus folgende, daß drei Flächen von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 sich in $m_1 m_2 m_3$ Punkten schneiden, sind Erweiterungen des *Bézout*schen Satzes [11] (siehe im folgenden [159]).

Die Schnittpunkte zweier Raumkurven c_{n_1} und c_{n_2}, die auf einer Fläche φ_m liegen, werden auch Schnittpunkte der Kurve c_{n_2} mit einer durch c_{n_1} gehenden neuen Fläche φ_{m_1} sein. Es ist jedoch nicht immer möglich, letztere Fläche so zu bestimmen, daß sie nicht φ_m noch in einer anderen Kurve k_r schneidet [7]. Wendet man also die eben beschriebene Methode an, um zusammenfallende Schnittpunkte der Fläche φ_{m_1} mit c_{n_2} abzuzählen, so muß man beachten, daß sich unter diesen Punkten sowohl Schnittpunkte von c_{n_2} mit c_{n_1} als auch von c_{n_2} mit k_r befinden können.

Zweites Kapitel.

Die Methode der Erhaltung der Anzahl.

a) Direkte Anwendungen.

[17] Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Wie die Betrachtung eines speziellen Falles irgend einer in größerer Allgemeinheit charakterisierten geometrischen Aufgabe als Grenzfall es erlaubt, die abzählende Auflösung der allgemeineren Aufgabe auf die speziellere anzuwenden, so kann man auch umgekehrt, und ganz mit derselben Sicherheit, die Bestimmungen, die sich auf letztere beziehen, auf die allgemeinere übertragen. Es kommt dabei nur darauf an, alle Lösungen der spezielleren Aufgabe, die Grenzfälle der gesuchten Lösungen der allgemeineren Aufgabe sind, mitzuzählen, und jede ebenso vielmal mitzuzählen, als die Anzahl der mit ihr zusammenfallenden Lösungen der allgemeineren Aufgabe angibt.

Es folgt aus dem vorhergehenden Kapitel, daß die mitzuzählenden Lösungen nicht immer eben diejenigen sind, die einer rein sprachlichen Übertragung der allgemeineren Aufgabe auf den Spezialfall entsprechen würden; neben solchen können andere auftreten, die man im Spezialfalle anders ausdrücken würde, wie auch die unmittelbare Übertragung im Spezialfalle oft unendlich viele Auflösungen geben würde.

Der Vorteil der Methode beruht darauf, daß im Spezialfalle die Anzahlen der übrigens oft verschiedenartigen Lösungen leichter zu bestimmen sein werden. Die mathematische Sicherheit des Schlusses vom Speziellen auf das Allgemeine wird durch die Auffassung des Falles als Grenzfall gewonnen. Wie man dabei zu verfahren hat, und wie die in Spezialfällen zusammenfallenden Lösungen abzuzählen sind, haben wir schon im ersten Kapitel b) erörtert. Die Richtigkeit des Übergangs wird übrigens in vielen der zu betrachtenden Beispiele dem mit der Algebra vertrauten Leser unmittelbar ersichtlich sein, und man wird daraus lernen, wie man auch in anderen auf der Algebra beruhenden Untersuchungen mit derselben Sicherheit verfahren kann.

Die einfachsten Beispiele der Anwendung dieser Methode liefert die Bestimmung der Ordnung einer ebenen Kurve oder Fläche durch Abzählung ihrer Schnittpunkte mit einer ganz bestimmten Geraden, die Bestimmung ihrer Klasse durch Abzählung der Tangenten oder Tangentialebenen, die durch einen gegebenen Punkt oder eine gegebene Gerade gehen usw. So geben Beispiele hierfür schon die Beweisführungen in [11] und [12] ab. Wir fügen sogleich die folgenden hinzu, die sich auf ein System von ∞^1 Kegelschnitten mit der ersten Charakteristik μ und der zweiten Charakteristik μ' beziehen, d. h. auf ein solches, in welchem μ Kegelschnitte durch einen gegebenen Punkt gehen und μ' eine gegebene Gerade a berühren.[1]) Suchen wir z. B. die Ordnung, die der Ort des Pols der Geraden a besitzt, so bemerkt man, daß er a in den μ' Punkten trifft, in welchen die Gerade a von Kegelschnitten des Systems berührt wird, und in keinem anderen. Daß diese Punkte einfache Schnittpunkte sind, könnte man mittels der Regel in [11] finden; man ersieht dies aber leichter aus der Betrachtung eines einfachen Beispiels z. B. eines Systems von konzentrischen Kreisen. Hier hat der gesuchte Ort nur einen Schnittpunkt im Berührungspunkt der Geraden a mit einem Kreise des Systems, und dies kann nicht der Grenzfall eines solchen Systems sein, bei dem mehrere Schnittpunkte zusammenfallen. Der gesuchte Ort ist also von der Ordnung μ'. Ebenso findet man, daß die Einhüllende der Polaren zu einem gegebenen Punkte A μ ist, weil μ Polaren durch A selbst gehen. Betrachten wir weiter ein System von ∞^1 Flächen von der Ordnung 2 mit den Charakteristiken μ, μ' und μ'', d. h. ein solches, in welchem μ Flächen durch einen gegebenen Punkt gehen, μ' eine gegebene Gerade und μ'' eine gegebene Ebene berühren[1]), so sieht man, daß der Ort der Pole einer gegebenen Ebene α eine Kurve von der Ordnung μ'' ist, weil die Ebene α μ'' Pole enthält, daß der Ort der mit einer gegebenen Geraden a konjugierten Geraden eine Regelfläche von der Ordnung (und Klasse [8]) μ'

1) Für Systeme von Kurven und Flächen höherer Ordnung wendet man dieselben Benennungen an.

ist, weil a μ' konjugierte Gerade schneidet, und daß die Polarebenen zu einem Punkte A eine abwickelbare Fläche von der Klasse μ erzeugen, weil μ Polarebenen durch A gehen.

Um zu systematischen Anwendungen der Abzählungen dieser Art anzuleiten, betrachten wir noch einige Hauptfälle, in welchen sie sich leicht durchführen lassen.

[18] Ort bestimmter Punkte der Geraden eines Büschels. Um die Ordnung eines solchen Ortes zu bestimmen, sucht man die Anzahl der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, oder, wie man oft sagt, mit einem beliebigen Strahl l des Büschels. Von diesen fallen nur die dem Strahle selbst entsprechenden Punkte P außerhalb des festen Punktes A des Büschels. Ein beliebiger Strahl l wird aber im allgemeinen den Ort noch in einer gewissen Anzahl mit A zusammenfallender Punkte schneiden, nämlich jedesmal je in einem Punkte, sooft einer der einem Strahl l entsprechenden Punkte P mit A zusammenfällt. In einer solchen Lage wird l den Ort berühren, weil sie die Grenzlage einer Geraden ist, die A mit einem mit A zusammenfallenden Punkt verbindet. (In den in [11] und [12] betrachteten Fällen ging der gesuchte Ort gar nicht durch den Scheitel des Büschels.)

Suchen wir z. B. den Ort des Schnittpunktes P der Strahlen l_1 und l_2 zweier Büschel mit den festen Punkten A_1 und A_2, die so aufeinander bezogen sind, daß jedem Strahl l_1 durch A_1 α_2 Strahlen l_2 durch A_2, und jedem Strahl l_2 α_1 Strahlen l_1 entsprechen. Dieser Ort wird von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2$ sein und in A_1 einen α_1-fachen und in A_2 einen α_2-fachen Punkt haben, was man aus der Abzählung der Schnittpunkte mit einer Geraden l_1 oder l_2 ersieht. Die Strahlen l_1, die dem mit A_2A_1 zusammenfallenden Strahle l_2 entsprechen, sind die Tangenten des gesuchten Ortes im Punkte A_1. Man muß sich jedoch noch vergewissern, daß die α_1 Zweige des Ortes, die durch A_1 gehen, einfach sind, und daß der Punkt A_1 somit nur ein α_1-facher Punkt ist. Dies läßt sich im vorliegenden Falle durch die Bemerkung erreichen, daß wenigstens die Gerade A_2A_1 die Kurve nur in α_1 mit A_1 zusammenfallenden Punkten schneidet. Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ findet man, daß zwei eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbüschel einen Kegelschnitt erzeugen.

Wenn β_1 unter den der Geraden A_2A_1 entsprechenden α_1 Strahlen l_1 mit einem Strahle b_1 zusammenfallen, und γ_2 der dem Strahle b_1 entsprechenden Strahlen l_2 mit A_2A_1 zusammenfallen, so erhält man aus [13] für das Element mit dem Mittelpunkt A_1 und der Mitteltangente b_1 die Punktmultiplizität β_1 und die Tangentenmultiplizität γ_2.

Wenn einem mit A_1A_2 zusammenfallenden Strahl l_1 ein mit derselben Geraden A_2A_1 zusammenfallender Strahl l_2 entspricht, so wird der Ort aus A_1A_2 und einer Restkurve von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$ mit einem $(\alpha_1 - 1)$-fachen Punkte in A_1 und einem $(\alpha_2 - 1)$-fachen Punkt in A_2 bestehen. Die Restkurve wird also die Gerade A_1A_2 nicht nur in

den genannten Punkten, sondern noch in einem weiteren Punkte M schneiden. Im allgemeinen, d. h., wenn entsprechende Strahlen l_1 und l_2 gleichzeitig unendlich kleine Winkel erster Ordnung mit A_1A_2 bilden, wird M weder mit A_1 noch mit A_2 zusammenfallen, was man aus der Betrachtung des Dreiecks A_1A_2M ersieht. In diesem Fall wird auch einem mit A_2A_1 zusammenfallenden Strahl l_2 nur ein mit A_1A_2 zusammenfallender Strahl l_1 entsprechen. Wenn auf dieselbe Weise δ-mal zwei entsprechende Geraden l_1 und l_2 mit A_1A_2 zusammenfallen, so wird sich diese δ-mal ausscheiden, und die Restkurve wird von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2 - \delta$ mit einem $(\alpha_1 - \delta)$-fachen Punkte in A_1 und einem $(\alpha_2 - \delta)$-fachen Punkte in A_2 sein, und A_1A_2 noch in δ Punkten schneiden. Wenn die entsprechenden Winkel dagegen nicht von derselben Ordnung sind, so werden verschiedene Fälle eintreten können, deren Aufklärung leichter durch das später einzuführende Korrespondenzprinzip geschehen kann.

Man wird übrigens bemerken, daß die hier betrachteten Kurven diejenigen sind, die in einem Dreieckskoordinatensystem, in welchem A_1 und A_2 die Punkte $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ sind, durch Gleichungen dargestellt werden, die vom Grade α_1 in x_2 und vom Grade α_2 in x_1 sind. Auch daraus gehen die hier genannten Ergebnisse hervor.

Ein anderes Beispiel bietet die in [1] genannte Konchoide dar. Die Punkte P dieser Kurve liegen auf den durch einen Punkt A gehenden Strahlen und werden dadurch bestimmt, daß ihr Abstand MP vom Schnittpunkt M eines Strahles mit einer gegebenen Geraden b eine gegebene Größe hat. Zu jedem Strahl gehören zwei solche Punkte P, und A wird ein Doppelpunkt der Kurve sein, dessen zwei (reelle, zusammenfallende oder imaginäre) Tangenten A mit den Punkten von b verbinden, die von A den gegebenen Abstand haben. Die Kurve ist also vierter Ordnung, und ihr Doppelpunkt wird beziehungsweise ein eigentlicher Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolierter Punkt sein.

[19] Polarkurven und Polarflächen. Seien A_1, A_2 und M drei Punkte einer Geraden und bezeichnen wir die Strecken A_1M und A_2M mit x_1 und x_2, so wird, wenn A_1 und A_2 gegeben sind, die Gleichung

$$(1)\quad f(x) = a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots a_rx_1^{n-r}x_2^r + \cdots a_{n-1}x_1x_2^{n-1} + a_nx_2^n = 0$$

eine Gruppe von n Punkten M bestimmen. Dann nennen wir die Gruppe von $n - r$ Punkten, die durch Nullsetzen des r^{ten} Differentialquotienten in Beziehung auf x_1, d. h. durch die Gleichung

$$(2)\quad f_1^{(r)}(x) = n(n-1)\cdots(n-r+1)a_0x_1^{n-r} + \cdots r(r-1)\cdots 1\,a_{n-r}x_2^{n-r} = 0$$

bestimmt ist, die r^{te} Polare des Punktes A_2. Da der r^{te} Differentialquotient des s^{ten} Differentialquotienten dem $(r+s)^{\text{ten}}$ gleich ist, wird auch die r^{te} Polare der s^{ten} Polare der $(r+s)^{\text{ten}}$ gleich sein.



Die Bedingung dafür, daß A_1 der r^{ten} Polare des Punkts A_2 angehört, ist

$$a_{n-r} = 0. \tag{3}$$

Dieselbe Gleichung wird offenbar auch ausdrücken, daß A_2 der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare des Punktes A_1 angehört. Diese Gleichung kann man, wenn man die n Punkte der durch (1) bestimmten Gruppe M', $M'' \ldots M^{(n)}$ nennt, auch so schreiben:

$$\sum \frac{A_1 M' \cdot A_1 M'' \ldots A_1 M^{(n-r)}}{A_2 M' \cdot A_2 M'' \ldots A_2 M^{(n-r)}} = 0 \tag{3'}$$

oder so

$$\sum \frac{A_2 M' \cdot A_2 M'' \ldots A_2 M^{(r)}}{A_1 M' \cdot A_1 M'' \ldots A_1 M^{(r)}} = 0, \tag{3''}$$

wo wir durch $\sum$ die Summe aller Brüche bezeichnen, die man durch die Benutzung aller Kombinationen der n Punkte M bilden kann. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare besteht aus einem Punkt. Ist A_1 die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare des Punktes A_2, so ergibt die Gleichung (3')

$$\frac{A_1 M'}{A_2 M'} + \frac{A_1 M''}{A_2 M''} + \cdots \frac{A_1 M^{(n)}}{A_2 M^{(n)}} = 0$$

oder

$$\frac{n}{A_2 A_1} = \frac{1}{A_2 M'} + \frac{1}{A_2 M''} + \cdots \frac{1}{A_2 M^{(n)}}.$$

Der dadurch bestimmte Punkt wird der harmonische Mittelpunkt der Punkte $M', M'' \ldots M^{(n)}$ in Beziehung auf A_2 genannt. Ist A_2 unendlich fern, so wird er der Schwerpunkt der Punkte M sein.

Enthält $f(x)$ den Faktor x_2^s und bestimmt man die Polare der Punkte A_2 und A_1 durch Differentiationen in Beziehung auf x_1 und x_2, so findet man die folgenden Resultate: Die r^{te} Polare eines s-fachen Punktes der (durch (1) bestimmten) Grundgruppe besteht aus demselben Punkt s-mal gezählt und seiner r^{ten} Polare in Beziehung auf die übrigen $n-s$ Punkte; ist $n-r<s$, so gehört jeder Punkt der Geraden der Polare an. Die r^{te} Polare eines beliebigen Punktes enthält, so lange $r<s$ ist, einen s-fachen Punkt der Grundgruppe $(s-r)$ mal und nicht öfter.

Diese Eigenschaften der Polare einer Punktgruppe bringe ich in Erinnerung, um später die daraus folgenden Eigenschaften der jetzt zu bestimmenden Polarkurven und Polarflächen anwenden zu können.

Es sei nun gegeben eine ebene Kurve von der Ordnung n und ein Punkt A in ihrer Ebene, oder eine Fläche von derselben Ordnung und ein Punkt A im Raume; wir wollen mit $M', M'', \ldots M^{(n)}$ die Schnittpunkte der Kurve, beziehungsweise der Fläche, mit einer willkürlichen, durch A gehenden Geraden bezeichnen. Dann nennen wir den Ort der r^{ten} Polaren von A in Beziehung auf die Punktgruppe (M) die r^{te} Polare oder Polarkurve beziehungsweise Polarfläche des Punktes A in Beziehung auf die gegebene Kurve beziehungsweise Fläche; A wird der Pol

der Polarkurve (-fläche) genannt. Liegt A nicht auf der gegebenen Grundkurve (Grundfläche), so wird die Polarkurve (-fläche) auch nicht durch A gehen; denn dann wird für keine Lage einer durch A gehenden Geraden ein Punkt der Gruppe M in A fallen, was die Bedingung dafür ist, daß ein Punkt der Polargruppe mit A zusammenfalle. Eine Gerade durch A schneidet also die gesuchte r^{te} Polarkurve (-fläche) nur in den $n-r$ Punkten, aus welchen die Polargruppe in Beziehung auf die Schnittpunkte mit der Grundkurve (-fläche) besteht; jene muß also von der Ordnung $n-r$ sein. — Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes A in Beziehung auf eine ebene Kurve ist eine Gerade und wird seine Polarachse genannt; die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare in Beziehung auf eine Fläche ist eine Ebene und wird die Polarebene von A genannt.

Die Ordnung ändert sich nicht, wenn der Punkt A auf der Grundkurve (-fläche) selbst liegt; dann wird nur die Polarkurve (-fläche) selbst durch A gehen und jede Gerade durch A in ebensovielen, mit A zusammenfallenden Punkten wie die Grundkurve (-fläche) selbst schneiden oder, wenn diese Anzahl $n-r$ übertrifft, die Gerade ganz enthalten. Die r^{te} Polare eines s-fachen Punktes der Grundkurve (-fläche) wird, wenn $n-r<s$ ist, ganz unbestimmt. Die $(n-s)^{\text{te}}$ Polare eines solchen Punktes besteht in der Ebene aus den s Tangenten in demselben Punkt, und ist im Raume der Tangentenkegel der Grundfläche.

Es ist offenbar, daß die erwähnten Sätze, wonach die r^{te} Polare der s^{ten} Polare die $(r+s)^{\text{te}}$ Polare ist, und, wenn der Punkt B der r^{ten} Polare des Punktes A angehört, der Punkt A auch der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare des Punktes B angehört, auch für Polarkurven und Polarflächen gelten.

Aus dem letzten Satze folgt, daß die ersten Polarkurven oder Polarflächen der Punkte einer Geraden a einen Büschel bilden; denn die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eines auf zwei dieser Polaren liegenden Punktes, die eine Gerade oder Ebene ist, wird ihre zwei Pole also alle Punkte der Geraden a enthalten. Ebenso werden die ersten Polarflächen der Punkte einer Ebene ein Bündel bilden, d. h. alle durch die Schnittpunkte dreier dieser Polarflächen gehen.

Sämtliche erste Polaren in Beziehung auf eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung werden ein lineares Netz bilden, in welchem jede Kurve durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, und die durch einen Punkt gehenden einen Büschel bilden. Sämtliche erste Polaren in Beziehung auf eine Fläche n^{ter} Ordnung bilden ein lineares System, in welchem drei, zwei oder ein Punkt beziehungsweise eine Fläche, einen Büschel oder ein Bündel bestimmen, das durch die Punkte geht.

Alle hier angegebenen Sätze lassen sich leicht auf Räume mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen erweitern.

[20] Beziehungen zu analytisch-geometrischen Darstellungen; Anwendung der Polarentheorie auf ebene Kurven. Trotz ihrer Einfachheit ist die hier gegebene Bestimmung der Ordnung

einer Polarkurve (oder -fläche) durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer durch den Pol gehenden Geraden nicht wesentlich einfacher als die folgende, die sich an eine analytisch-geometrische Darstellung anknüpft. Die Zusammenstellung dieser Beweisführungen läßt sie als verschiedene Formen eng verwandter Betrachtungsweisen hervortreten, unter denen die abzählenden Methoden oft wesentlichere Vorteile als im vorliegenden Falle erzielen lassen, während die direkte Beziehung auf Koordinaten die kürzeste und durchsichtigste Beweisführung einiger Hauptsätze der Polarentheorie gewährt. Wir ergreifen daher eben diese Gelegenheit, um ein Beispiel für das fruchtbare Zusammenwirken der beiden Methoden zu geben, während sonst, unserer Aufgabe gemäß, unsere Beispiele gewöhnlich zeigen sollen, wie unabhängig sich die abzählenden Methoden anwenden lassen. Gleichzeitig werden wir hier einige Sätze gewinnen, an die wir später auch Beispiele der Anwendung abzählender Methoden anknüpfen können.

Beziehen wir eine ebene algebraische Kurve c_n auf das Koordinatendreieck mit den Ecken

$$A(x_2 = 0,\ x_3 = 0), \quad B(x_3 = 0,\ x_1 = 0), \quad C(x_1 = 0,\ x_2 = 0),$$

und sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die in x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung dieser Kurve. Ihre Schnittpunkte mit einer durch A gehenden Geraden findet man durch Einsetzen von $x_2 = \alpha x_3$, die Polaren des Punktes A in Beziehung auf diese Schnittpunkte durch Differentiationen in Beziehung auf x_1, den Ort dieser Polarengruppen oder die Polarkurve des Punktes A in Beziehung auf die gegebene Kurve dadurch, daß man wieder $\alpha = \frac{x_2}{x_3}$ setzt. Man sieht also, daß die r^{ten} Polaren der Punkte A, B, C in Beziehung auf die Kurve die Gleichungen

$$\frac{\partial^r f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^r} = 0, \quad \frac{\partial^r f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^r} = 0, \quad \frac{\partial^r f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^r} = 0$$

haben, und also von der Ordnung $n - r$ sind.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = 0$$

wird zugleich die p^{te} Polare des Punktes A in Beziehung auf die q^{te} Polare des Punktes B, und die q^{te} Polare des Punktes B in Beziehung auf die p^{te} Polare des Punktes A darstellen. Diese Polarkurven sind also identisch (Vertauschungssatz). Sowohl die Beweisführung, als auch der Satz lassen sich auf Räume von einer beliebigen Anzahl von Dimensionen erweitern.

Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eines einfachen Punktes A einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung c_n in Beziehung auf diese Kurve ist ihre Tangente in dem-



selben Punkte [19]. Wenn die Tangente die Kurve nur in zwei, in A zusammenfallenden Punkten schneidet, so wird die erste Polare eines Punktes B der Tangente diese und also die Kurve selbst nur in einem mit A zusammenfallenden Punkt schneiden. Hat die Kurve keine mehrfachen Punkte, so werden alle $n(n-1)$ Schnittpunkte der ersten Polare des Punktes B die Berührungspunkte der durch B gehenden Tangenten sein, was eine neue Bestimmung der Klasse einer allgemeinen Kurve n^{ter} Ordnung ergibt [12]. Die Polarkurve muß auch durch jeden Doppelpunkt gehen und dort zwei Schnittpunkte mit c_n haben, wodurch ebenfalls bestätigt wird, daß ein gewöhnlicher Doppelpunkt die Klasse um zwei vermindert. Die in [12] gegebene Bestimmung der durch einen beliebigen mehrfachen Punkt verursachten Verminderung der Klasse liefert uns übrigens das einfachste Mittel zur Abzählung der in diesem Punkt zusammenfallenden Schnittpunkte mit den ersten Polaren.

Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polarkurve oder der Polarkegelschnitt eines Wendepunktes A, d. h. eines Punktes, wo die Tangente a die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten trifft, muß dieselbe Tangente ebenfalls in drei zusammenfallenden Punkten treffen [19]. Dies ist nur dann möglich, wenn der Polarkegelschnitt aus der Geraden a und einer anderen Geraden b besteht, deren Schnittpunkt mit a wir B nennen wollen. Die Wendepunkte der Kurve c_n sind also Schnittpunkte mit dem Ort der Punkte, deren $(n-2)^{\text{te}}$ Polaren (Polarkegelschnitte) aus zwei Geraden bestehen; dieser Ort wird die *Hesse*sche Kurve h der gegebenen genannt. Umgekehrt wird jeder einfache Schnittpunkt A von c_n mit h ein Wendepunkt sein; da nämlich die zwei ersten Polaren eines beliebigen Punktes der Tangente in einem solchen Punkt durch A gehen, so muß diese Tangente in A drei zusammenfallende Schnittpunkte haben. Wenn also c_n keine mehrfachen Punkte hat, so gibt es überhaupt keine anderen Schnittpunkte.

Wenn wir $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik}$ setzen, so wird die *Hesse*sche Kurve die Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

haben und also von der Ordnung $3(n-2)$ sein. Daraus folgt, daß eine Kurve n^{ter} Ordnung ohne mehrfache Punkte $3n(n-2)$ Wendepunkte hat. Dieses Ergebnis werden wir später [70] anders beweisen, so daß man umgekehrt aus ihm auf die Ordnung der *Hesse*schen Kurve rückwärts schließen könnte. Die spätere Beweisführung wird uns übrigens einfachere Mittel als die hier angewandten zur Bestimmung des Einflusses etwaiger singulärer Punkte auf die Anzahl der Wendepunkte liefern.

Der oben durch Benutzung von trilinearen Koordinaten bewiesene Vertauschungssatz erlaubt uns zu beweisen, daß, wenn A ein Punkt der *Hesse*schen Kurve und B der Doppelpunkt des Polarkegelschnitts des Punktes A ist, A Doppelpunkt der ersten Polare des Punktes B sein wird. Denn erstens muß A auf dieser ersten Polare liegen, weil seine $(n-1)^{\text{te}}$ Polare, welche Polare des Polarkegelschnittes ist, durch dessen Doppelpunkt B gehen muß. Weiter geht auch durch B die erste Polare eines beliebigen Punktes C in Beziehung auf die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare des Punktes A (den Polarkegelschnitt), somit wegen des Vertauschungssatzes, auch die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare (die Polarachse) des Punktes A in Beziehung auf die erste Polare des Punktes C. Daraus folgt [19], daß die erste Polare des Punktes B in Beziehung auf die erste Polare des Punktes C durch A geht, damit auch, nach unserem Vertauschungssatz, daß die erste Polare des Punktes C in Beziehung auf die erste Polare des Punktes B durch A geht. Da C ein beliebiger Punkt ist, muß A also ein Doppelpunkt dieser ersten Polare des Punktes B sein. — Der umgekehrte Satz läßt sich durch dieselben Betrachtungen in umgekehrter Reihenfolge beweisen.

Der mit A verbundene Punkt B hat die Eigenschaften, Doppelpunkt auf einem Polarkegelschnitt und Pol einer ersten Polarkurve mit Doppelpunkt zu sein. Der Ort solcher Punkte B wird die *Steiner*sche Kurve genannt. Wenn ein anderer Punkt B_1 dieser Kurve sich dem Punkte B nähert, so werden zwei Schnittpunkte der ersten Polaren der Punkte B und B_1 sich dem Doppelpunkt A nähern. Daher ist [19] die Tangente im Punkte B der *Steiner*schen Kurve Polarachse des entsprechenden Punktes A der *Hesse*schen Kurve. Dadurch läßt sich die Klasse der *Steiner*schen Kurve leicht finden. Denn eine durch einen Punkt C gehende Tangente an diese Kurve ist Polarachse eines Punktes A, der sowohl auf der *Hesse*schen Kurve als auch auf der ersten Polare des Punktes C liegen muß. Da diese Kurven beziehungsweise von den Ordnungen $3(n-2)$ und $n-1$ sind, so gibt es $3(n-1)(n-2)$ solche Punkte. Dies wird also eben die Klasse der *Steiner*schen Kurve sein.

[21] *Hesse*sche und *Cayley*sche Kurve einer Kurve dritter Ordnung. Da die ersten Polaren in Beziehung auf eine Kurve dritter Ordnung c_3 auch Polarkegelschnitte sind, wird ihre *Hesse*sche Kurve mit der *Steiner*schen identisch sein. Sie und die ebenfalls an c_3 sich anschließende sogenannte *Cayley*sche Kurve lassen sich dadurch finden, daß die Polarkegelschnitte aller Punkte der Ebene in Beziehung auf c_3 ein lineares Netz bilden [19]. Betrachten wir ein solches Netz[1]), so geht

1) Dies ist nur scheinbar eine Verallgemeinerung; denn bei näherem Eingehen auf diese Untersuchungen, aus denen wir hier nur solche hervorheben, die Beispiele der vorliegenden Abzählungsmethode abgeben, ersieht man, daß ein lineares Netz von Kegelschnitten immer von den Polarkegelschnitten in Beziehung auf eine Kurve dritter Ordnung gebildet wird.



durch jeden Punkt P der Ebene ein Büschel von Kegelschnitten des Netzes. Jeder Büschel enthält drei Kegelschnitte, die aus zwei Geraden bestehen. Durch P gehen also auch drei Gerade, die zu den Kegelschnitten des Netzes gehören. Die Einhüllende solcher Geraden wird die *Cayley*sche Kurve der Kurve c_3 genannt. Diese ist also dritter Klasse.

Besteht nun ein Kegelschnitt des Netzes aus zwei Geraden a und b, die sich im Punkte C schneiden, so werden die Kegelschnitte des Netzes, die durch einen beliebigen Punkt M der Geraden a gehen, einen Büschel bilden und alle die Gerade a, die selbst ein Teil einer Kurve des Büschels ist, in einem durch M bestimmten Punkt M' treffen müssen. Die Paare von Schnittpunkten M, M' lassen sich also durch einen Büschel von Kegelschnitten ausschneiden und müssen in Involution sein. In ihren zwei Doppelpunkten A_1 und A_2 werden dann alle durch sie gehenden Kegelschnitte des Netzes die Gerade a berühren. Für einen dieser Kegelschnitte, nämlich jenen, der eine von a verschiedene Gerade in A_1 (oder A_2) berühren soll, folgt daraus, daß er in A_1 (oder A_2) einen Doppelpunkt besitzt, somit aus zwei Geraden besteht. Der Ort der Doppelpunkte der Kegelschnitte des Netzes, also die gesuchte *Hesse*sche Kurve h, schneidet die Gerade a in A_1, A_2 und C und nur in diesen Punkten, und muß also von der dritten Ordnung sein.

Wir sehen, daß die *Hesse*sche Kurve einer Kurve dritter Ordnung auch der Ort solcher Punktepaare ist, die in Beziehung auf alle ihre Polarkegelschnitte konjugiert sind, und daß die *Cayley*sche Kurve Einhüllende der Geraden ist, die solche Punktepaare verbinden. Die drei Tangenten an die *Cayley*sche Kurve, die durch einen Punkt C der *Hesse*schen Kurve gehen, sind die zwei Geraden a und b, aus denen der Polarkegelschnitt, der in C einen Doppelpunkt hat, besteht, und die Gerade, die C mit dem konjugierten Punkt verbindet.

[22] Örter von Schnittpunkten der Tangenten eines Kegelschnitts; Raumkurven auf Flächen zweiter Ordnung. Wenn die Tangenten eines Kegelschnittes in vorgegebener Weise auf einander bezogen sind, so kann man den Ort der Schnittpunkte durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer der Tangenten finden. Ist die Beziehung eine solche, die jeder Tangente t_1 α_2 Tangenten t_2, und jeder Tangente t_2 α_1 Tangenten t_1 entsprechen läßt, so wird eine beliebige Tangente den Ort in $\alpha_1 + \alpha_2$ Punkten schneiden. Der Ort ist also von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2$. Nur wenn die Beziehung eine symmetrische ist, in welchem Falle $\alpha_1 = \alpha_2$ sein muß, wird die auf diese Weise bestimmte Kurve eine doppelt zu zählende Kurve von der Ordnung α_1 sein. Diese Kurve ist dann der eigentliche Ort. Wir werden in [56] eine ganz elementare Aufgabe antreffen, die in der hier gelösten enthalten ist. Auch die in [18] behandelte Aufgabe ist ein Grenzfall der hier gelösten; man erhält ihn, wenn der Kegelschnitt, der hier als Einhüllende seiner Tangenten betrachtet wird, sich in zwei Punkte auflöst.

Wenn man eine Fläche zweiter Ordnung von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene projiziert, so werden ihre zwei Scharen von Erzeugenden als die Strahlen zweier Büschel projiziert. Wenn man sie von einem willkürlichen Punkte des Raumes aus projiziert, so werden die Projektionen der Erzeugenden die Tangenten eines Kegelschnittes sein, so daß in jede dieser Tangenten eine Erzeugende jeder Schar fällt. Aus diesen beiden Projektionen ersieht man, daß, wenn die Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung so aufeinander bezogen sind, daß jeder Erzeugenden e_1 der einen Schar α_2 Erzeugende e_2 der anderen und jeder Erzeugenden e_2 α_1 Erzeugende e_1 entsprechen, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Erzeugender sich als eine Kurve von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2$ projiziert, also selbst eine Raumkurve von der Ordnung (s. [14]) $\alpha_1 + \alpha_2$ sein wird. Dies ergibt sich jedoch auch unmittelbar aus der Bemerkung, daß diese Raumkurve jede Erzeugende e_1 in α_2 Punkten, jede Erzeugende e_2 in α_1 Punkten, also eine Tangentialebene in $\alpha_1 + \alpha_2$ Punkten schneidet. Da eine Kurve, die durch die hier genannten Anzahlen α_2 und α_1 ihrer Schnittpunkte mit den Erzeugenden beider Scharen charakterisiert ist, sich allgemein durch eine Gleichung darstellen läßt, die vom Grade α_1 beziehungsweise α_2 in Beziehung auf solche Parameter ist, die die Erzeugenden der zwei Scharen bestimmen, wird durch die Zahlen α_1 und α_2 eine allgemeine Gattung von Kurven definiert [5]. Für jede algebraische Kurve auf einer Fläche zweiter Ordnung werden α_1 und α_2 bestimmte Werte haben, und sie wird der durch diese Werte definierten Kurvengattung angehören. Diese Bemerkung werden wir uns in [28] zunutze machen.

[23] Bestimmung der Ordnung einer ebenen Kurve mittels des Satzes von *Bézout*. Eine algebraische Kurve, die eine Kurve von der Ordnung n_1 in nn_1 Punkten schneidet, muß selbst von der Ordnung n sein [11]. Die Ordnung einer Kurve läßt sich also durch Abzählen ihrer Schnittpunkte mit einer bereits bekannten Kurve bestimmen.

Es seien z. B. c_{n_1} und c_{n_2} zwei einander entsprechende Kurven in zwei eindeutig aufeinander bezogenen Büscheln; wir wollen die Ordnung des Ortes der Schnittpunkte zweier solcher Kurven bestimmen. Dieser Ort schneidet c_{n_1} erstens in ihren $n_1 n_2$ Schnittpunkten mit c_{n_2}, zweitens in den n_1^2 festen Punkten des Büschels der Kurven c_{n_1}. Da der Ort also c_{n_1} in $n_1(n_1 + n_2)$ Punkten schneidet, so wird er von der Ordnung $n_1 + n_2$ sein. — Wie in [18] ersieht man, daß der gesuchte Ort in einem der festen Punkte des Büschels (c_{n_1}) diejenige Kurve c_{n_1} berühren wird, die der durch denselben Punkt gehenden Kurve c_{n_2} entspricht.

Haben die Büschel einen festen Punkt A gemein, so erkennt man auf dieselbe Weise, daß eine Kurve c_{n_1} außer in A den Ort noch in $n_1(n_1 + n_2) - 2$ Punkten schneidet. Da die Ordnung des Ortes in diesem Spezialfalle ungeändert bleiben muß, so wird A ein Doppelpunkt dieses Ortes sein.

Die zwei Tangenten des Ortes in diesem Punkte werden zwei entsprechende, sich daselbst berührende Kurven berühren.

Berührt jede Kurve c_{n_1} die ihr entsprechende Kurve c_{n_2} in einem beiden Büscheln gemeinschaftlichen, festen Punkte A, so wird c_{n_1} den gesuchten Ort nur in $n_1(n_1+n_2)-3$ von A verschiedenen Punkten schneiden. Dieser hat also in A einen dreifachen Punkt. Da er in diesem Punkte drei Tangenten haben muß, so folgt, daß drei Kurven c_{n_1} je mit einer Kurve c_{n_2} Berührung zweiter Ordnung haben. — Nur wenn auch die gemeinschaftliche Tangente fest ist, wird die Kurve einen Selbstberührungspunkt haben. Dies ist aber kein Spezialfall (Grenzfall) des eben betrachteten, in dem die gemeinschaftliche Tangente die einander entsprechenden Kurven bestimmte, hier sind vielmehr zwei der festen Punkte den beiden Büscheln gemein und fallen miteinander zusammen. Einen Spezialfall des vorhin betrachteten würde man aber haben, wenn die einander entsprechenden Kurven c_{n_1} und c_{n_2}, die in A eine feste Tangente haben, daselbst Berührung zweiter Ordnung haben sollen.[1])

Wenn ein Punkt A r_1-facher Punkt aller Kurven c_{n_1} und r_2-facher Punkt aller Kurven c_{n_2} ist, so findet man auf dieselbe Weise, daß er (r_1+r_2)-facher Punkt des hier bestimmten Ortes sein muß. Man ersieht daraus, daß r_1+r_2 Kurven c_{n_1} und c_{n_2} einander in A berühren werden. Dies wird sich später auch als eine Folge des Korrespondenzprinzips ergeben.

[24] Einhüllende von Kurvensystemen mit der ersten Charakteristik $\mu = 2$. Es sei gegeben ein System von ∞^1 Kurven n^{ter} Ordnung mit der ersten Charakteristik $\mu=2$, d. h. von solchen Kurven, von denen je zwei durch jeden beliebigen Punkt der Ebene gehen. (S. [17] Note.) Die Einhüllende dieser Kurven wird von der Ordnung $2n$ sein, denn jede Kurve c_n des Systems schneidet die benachbarte Kurve in n^2 Punkten, von denen jeder ein Berührungspunkt mit der Einhüllenden ist. Sie kann außerdem die Einhüllende nicht in einem weiteren Punkte schneiden, denn durch den Schnittpunkt würden außer c_n zwei zusammenfallende Kurven des Systems gehen [15], also im ganzen drei Kurven des Systems. Die Umhüllungskurve schneidet also c_n nur in den $2n^2$ in die n^2 Berührungspunkte fallenden Punkten. Haben alle Kurven c_n einen festen r-fachen Punkt, so wird dieser ein $2r$-facher Punkt der Umhüllungskurve sein, was man durch Abzählen derjenigen Schnittpunkte der Kurve mit ihrer konsekutiven Kurve findet, die im Grenzfalle in den r-fachen Punkt fallen.

Zu beachten ist dabei, daß zweifach zählende Kurven des Systems oder zweifach zählende Zweige von Systemkurven sich aus der Umhüllungskurve ausscheiden können. Solche werden alle anderen Kurven

---

1) Die genauere Untersuchung dieses Falles wird als Übung empfohlen.

des Systems in festen Punkten schneiden; denn durch die Schnittpunkte gehen mehr als zwei, also unendlich viele Kurven des Systems (vgl. [36] und [59] 1.). — Ebenso wird, wenn alle Kurven des Systems Doppelpunkte haben, der Ort dieser Punkte ein Doppelzweig der Umhüllungskurve sein [61].

Für $n = 1$ bedeutet der hier bewiesene Satz, daß eine Kurve zweiter Klasse auch zweiter Ordnung ist. Das dualistisch entsprechende Verfahren, das übrigens auch auf allgemeinere Beispiele anwendbar ist, zeigt, daß ebenso eine Kurve zweiter Ordnung immer zweiter Klasse ist. Daraus ergibt sich durch die Betrachtung eines ebenen Schnittes, daß eine Fläche zweiter Ordnung auch von dem Range zwei ist [6], und sodann durch die Betrachtung eines umbeschriebenen Kegels, daß sie auch von der Klasse zwei ist, und umgekehrt.

Für $n = 2$ erhält man das Ergebnis, daß die Einhüllende der Kegelschnitte eines Systems mit der ersten Charakteristik zwei eine Kurve vierter Ordnung ist. Wir werden später sehen, daß eine allgemeine Kurve vierter Ordnung auf diese Weise erzeugt werden kann [83].

[25] Bestimmung von Ordnungen im Raum mittels des erweiterten *Bézout*schen Satzes; Umhüllungsfläche der Flächen eines Systems mit der ersten Charakteristik drei. Wenn eine Raumkurve eine Fläche m^{ter} Ordnung in mn Punkten schneidet, so wird sie selbst n^{ter} Ordnnng sein [16], und wenn eine Fläche mit einer Fläche von der Ordnung m_1 eine vollständige Schnittkurve von der Ordnung mm_1 hat oder eine Kurve n^{ter} Ordnung in nm Punkten schneidet, ist sie von der Ordnung m. Unter den verschiedenen, mit den entsprechenden planimetrischen Untersuchungen völlig übereinstimmenden Anwendungen dieser Überlegungen werden wir hier nur einige Bestimmungen betrachten, die die Umhüllungsfläche eines Systems von ∞^1 Flächen m^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $\mu = 3$ (s. [17], Fußnote) betreffen.[1])

Wir sehen erstens, daß die Rückkehrkurve dieser Umhüllungsfläche, d. h. der Ort der Schnittpunkte dreier konsekutiver Flächen des Systems, von der Ordnung $3m^2$ ist. Eine beliebige Fläche des Systems φ hat nämlich Berührung zweiter Ordnung mit dieser Kurve in den m^3 Punkten, in welchen sie die zwei konsekutiven Flächen schneidet. In jedem dieser Punkte fallen also 3 Schnittpunkte mit der Rückkehrkurve zusammen, und außerdem kann die Fläche sie nicht schneiden, denn durch einen anderen Schnittpunkt würden außer φ noch drei (zusammenfallende) Flächen des Systems gehen.

Um die Ordnung der Umhüllungsfläche zu finden, suchen wir diejenige ihrer Schnittkurve mit einer Fläche des Systems φ. Diese be-

1) Die dem Falle $\mu = 2$ entsprechende Umhüllungsfläche wird in [91] genauer untersucht.

rührt die Einhüllende längs ihrer Schnittkurve mit der konsekutiven Fläche des Systems, und diese Kurve ist von der Ordnung m^2. Zweimal gezählt gibt diese also einen Teil der gesuchten Schnittkurve, der von der Ordnung $2m^2$ ist. Der noch übrige Teil wird eine andere Fläche des Systems φ_1 in m^3 Punkten berühren, nämlich in den Schnittpunkten der Flächen φ und φ_1 und der zu φ_1 konsekutiven Fläche, sie aber in keinem anderen Punkt schneiden, weil sonst mehr als drei Flächen durch den Schnittpunkt gehen würden. Dieser Teil ist also auch eine Kurve von der Ordnung $2m^2$. Die Schnittkurve der Umhüllungsfläche mit φ ist also von der Ordnung $4m^2$, und die Umhüllungsfläche selbst muß von der Ordnung $4m$ sein.

Wenden wir diese Resultate auf den Fall $m = 1$ an, d. h. auf die Einhüllende von Ebenen, von welchen je drei durch einen Punkt des Raumes gehen. Die Enveloppe ist dann eine abwickelbare Fläche von der Klasse $n'' = 3$ (s. [7]), und wir ersehen, daß die Rückkehrkurve einer solchen von der Ordnung $n = 3$ und dem Range $n' = 4$ sein wird. Das Dualitätsprinzip zeigt, daß dasselbe Ergebnis herauskommen wird, wenn eine Kurve von der Ordnung $n = 3$ gegeben ist und man die zugehörige abwickelbare Fläche sucht.

Alle die hier gefundenen Ergebnisse lassen sich leicht auf Räume von mehreren Dimensionen erweitern. Betrachten wir in einem r-dimensionalen linearen Raume eine Kurve von der Ordnung r, d. h. ein ∞^1 System von Punkten, von welchen r in einem $(r-1)$-dimensionalen linearen Raume liegen, und bestimmt man ihre ∞^1 Tangenten, Schmiegungsebenen, oskulierenden dreidimensionalen linearen Räume (die vier konsekutive Punkte miteinander verbinden) usw., so werden von den diese Gebilde charakterisierenden Zahlen die einander dualistisch entsprechenden gleich sein. Hierzu war für $r = 2$ die Gleichheit der Ordnung und Klasse eines Kegelschnittes das erste Beispiel [24].

Für eine Kurve 4ter Ordnung in einem 4-dimensionalen linearen Raume ist z. B. auch die Anzahl der durch einen Punkt gehenden, oskulierenden dreidimensionalen linearen Räume (oder sagen wir kurz oskulierenden Räume) 4; ebenso wird sowohl die Anzahl der eine Ebene schneidenden Tangenten, als auch die ihrer Schmiegungsebenen, die eine Gerade schneiden, 6 sein. Um den mit dem vorhergehenden übereinstimmenden Beweis dieser und der ihnen dualistisch entsprechenden Sätze durchzuführen, kann man die Einhüllende des Systems von Räumen, von denen je 4 durch einen Punkt gehen, suchen. In einem solchen Raume liegen 4 konsekutive Punkte des zugehörigen Punktortes [15] und keine weiteren. Dieser Punktort ist also eine Kurve 4ter Ordnung. Weiter enthält ein solcher Raum R erstens 3-mal die Gerade, in der sie zwei konsekutive Räume schneidet, und in welcher der Raum Berührung zweiter Ordnung mit dem Orte der Tangenten der genannten Raumkurve hat, und zweitens eine Kurve, in deren Punkten sich die Schnitt-

ebenen des Raumes R mit drei anderen konsekutiven Räumen des Systems, also auch diese Räume, schneiden. Diese Kurve muß 3ter Ordnung sein, weil sie mit einem anderen Raume des Systems R_1, im Schnittpunkte des Raumes R und der in R_1 und zwei konsekutiven Räumen liegenden Geraden, Berührung zweiter Ordnung hat und sonst R_1 nicht schneiden kann. Eine in R liegende Ebene wird also im ganzen 6 der Tangenten schneiden.

Ähnlicherweise lassen sich dieselben Fragen für mehrdimensionale Räume behandeln. Auch könnte man statt der Einhüllenden linearer Räume die Einhüllende von Räumen von der Ordnung m betrachten.

[26] Benutzung von zusammengesetzten ebenen Kurven. Eine aus n Geraden bestehende Kurve ist ein Spezialfall der allgemeinen Kurven n^{ter} Ordnung [5] und darf also zu solchen Abzählungen benutzt werden, die allgemeine Kurven n^{ter} Ordnung betreffen. Man kann damit z. B. einen neuen Beweis des *Bézout*schen Satzes gewinnen. Eine Kurve m^{ter} Ordnung k_m wird nämlich die in dieser Weise zusammengesetzte Kurve in mn Punkten schneiden, und wenn die n Geraden weder die Kurve k_m berühren noch durch ihre unendlich fernen Punkte gehen, so ist es offenbar, daß durch den Übergang von einer Kurve c_n zu diesem Grenzfall Lösungen weder verloren gegangen, noch zusammengefallen sind. Die Abzählung gilt also auch für die Schnittpunkte der Kurve k_m mit einer allgemeinen Kurve c_n. Dieser Beweis ist zwar einwandfrei; er gibt aber keine Aufklärung darüber, wie viele der mn Schnittpunkte für spezielle Lagen der Kurven zusammenfallen mögen. Daher haben wir es vorgezogen, den in [11] gelieferten Beweis dieses Hauptsatzes der abzählenden Geometrie voranzustellen.

Die Zerlegung in n Gerade kann auch benutzt werden, um die Klasse einer Kurve c_n zu finden. Betrachtet man nämlich eine aus n Geraden bestehende Kurve als Grenzfall einer allgemeinen c_n, so werden alle durch einen festen Punkt A gehenden Tangenten mit den Strahlen zusammenfallen, die A mit den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkten der n Geraden verbinden. Daß jede dieser Geraden für zwei Tangenten zu zählen ist, kann man, ohne sich auf die frühere Bestimmung der Klasse in [12] zu stützen, aus der folgenden Betrachtung ersehen. Der Übergang kann so geschehen, daß zuerst eine Kurve zweiter Ordnung zwei der n Geraden ersetzt, und da der Kegelschnitt zweiter Klasse ist (was wir in [24] anders bewiesen haben), so werden im Grenzfalle zwei Tangenten von A durch den Schnittpunkt der zwei Geraden gehen. Man findet also, daß die Klasse $n(n-1)$ ist, erhält aber hier nicht wie in [12] allgemeine Regeln für die Abzählung zusammenfallender Lösungen.

Durch diese Beweise bereits bekannter Sätze werden weitere Anwendungen der Zerlegung vorbereitet. Suchen wir z. B. in einem System von Kurven mit den Charakteristiken μ und μ' ([17], Fußnote) solche, die eine Kurve c_n berühren. Im genannten Grenzfall werden diese Be-

rührungskurven entweder eine der n Geraden berühren oder durch einen der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte gehen. Daß die Kurven, die letztere Bedingung erfüllen, zweimal zu zählen sind, kann man aus der obigen Bestimmung der Klasse schließen. Man findet also, daß die gestellte Aufgabe $m \cdot \mu' + n(n-1)\mu$ Lösungen hat. Wir werden übrigens bald [29] eine neue Abzählung vornehmen, die nicht nur eine allgemeine c_n betrifft, sondern auch solche Kurven, die gegebene singuläre Punkte haben.

[27] Benutzung von zusammengesetzten Flächen. Auch die Abzählungen, die eine aus m Ebenen zusammengesetzte Fläche betreffen, lassen sich auf eine allgemeine Fläche m^{ter} Ordnung übertragen. Um zu beweisen, daß eine solche Fläche eine Kurve n^{ter} Ordnung in mn Punkten schneidet [16], genügt es z. B., die Fläche durch eine solche zu ersetzen, die aus m Ebenen besteht.

Dieselbe Zerlegung der Fläche φ_m kann zur Untersuchung ihrer vollständigen Schnittkurve mit einer anderen Fläche ψ_{m_1} benutzt werden. Die Schnittkurve wird dann durch m Kurven m_1^{ter} Ordnung ersetzt, die sich in $\frac{1}{2}\,m(m-1)m_1$ Punkten schneiden. Die Projektionen der Schnittkurven werden sich aber in $\frac{1}{2}\,m(m-1)m_1^2$ Punkten schneiden. Die Differenz dieser Zahlen wird die Anzahl der scheinbaren Schnittpunkte der $\frac{1}{2}\,m(m-1)$ Kurven sein. Überträgt man dieses Ergebnis auf eine allgemeine Fläche, so findet man die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte der Schnittkurve der Flächen φ_m und ψ_{m_1}. Es ist also

$$h = \tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,m_1\,(m_1-1).$$

Für $m = m_1 = 3$ haben wir dieses Resultat schon in [7] angeführt.

Durch die Zerlegung findet man ebenso den Rang n' [7] derselben Schnittkurve. Im Grenzfalle setzen sich nämlich die durch eine Gerade gehenden Tangentialebenen zusammen erstens aus den Tangentialebenen der m_1 Kurven, und zweitens — was man wie in [26] beweist — aus den doppelt zu zählenden Ebenen, die durch die eigentlichen Doppelpunkte der Grenzkurve gehen. Man findet also

$$n' = m m_1 (m_1 - 1) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,m_1 = m m_1\,(m + m_1 - 2).$$

Man kann die Zerlegung einer Fläche φ_m in m Ebenen auch benutzen, um einige andere dieser Fläche zugehörige Anzahlen zu finden. Der umbeschriebene Kegel mit dem Scheitel A wird aus den Ebenen gebildet, die A mit den $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)$ Schnittlinien g der m Ebenen, aus denen φ_m im Grenzfalle besteht, verbinden, wobei jede zweimal zu zählen ist. Letzteres erhellt aus [26], wenn man den Schnitt einer beliebigen, durch A gehenden Ebene betrachtet. Der Rang der Fläche ist also $m\,(m-1)$. Dies folgt übrigens schon daraus, daß die Berührungskurve eines umbeschriebenen Kegels mit der allgemeinen Fläche φ_m die Schnittlinie dieser Fläche mit der ersten Polare des Scheitels ist [19]. Weiter sieht man, daß die durch A gehenden Geraden, die die Fläche zweimal

berühren, in dem besprochenen Grenzfall zu vieren mit denjenigen Geraden zusammenfallen, die zwei der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden g in verschiedenen Punkten schneiden. Die Anzahl solcher Geraden oder der nur scheinbaren Schnittpunkte der Geraden g ist

$$\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{m(m-1)}{2}-1\right)-3\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Die Anzahl der durch einen Punkt A gehenden Doppeltangenten von φ_m wird das vierfache dieser Zahl sein, nämlich:

$$\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Die durch A gehenden Haupttangenten der Fläche φ_m, d. h. jene Geraden, die sie in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, werden im Grenzfalle A mit den Schnittpunkten der m Ebenen verbinden. Da kein Unterschied zwischen diesen Punkten besteht, so muß dieselbe Anzahl der Haupttangenten mit jeder der genannten Verbindungslinien zusammenfallen. Die gesuchte Anzahl der durch A gehenden Haupttangenten ist also ein Multiplum von $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$. Welches Multiplum, ließe sich zwar durch die Betrachtung eines Spezialfalles ermitteln; die vorliegende Aufgabe selbst kann aber auch anders gelöst werden, nämlich durch die Bemerkung, daß die Berührungspunkte der durch A gehenden Haupttangenten die Schnittpunkte der Fläche mit den zwei ersten Polaren von A sein müssen [19]. Ihre Anzahl ist also $m(m-1)(m-2)$ oder das sechsfache der Anzahl der Schnittpunkte der m Ebenen.

Die Klasse m'' der Fläche oder die Anzahl der durch eine Gerade b gehenden Tangentialebenen läßt sich durch Zerlegung der Fläche in m Ebenen ebenfalls nicht unmittelbar bestimmen. Da jene Ebenen dadurch charakterisiert werden, daß sie die Fläche in einer Kurve mit Doppelpunkt schneiden, ist sofort klar, daß sich unsere Methode nicht unmittelbar anwenden läßt; es würden ja in unserem Grenzfall unendlich viele solcher Ebenen durch b gehen [4]. Auch hier läßt sich die gesuchte Anzahl durch Benutzung von Polaren bestimmen; denn die Berührungspunkte werden die Schnittpunkte der Fläche mit den ersten Polaren zweier Punkte der Geraden b sein. Ihre Anzahl oder die Klasse der Fläche ist also $m(m-1)^2$. Doch wird es auch hier nützlich sein, den Grenzübergang zu untersuchen, der die Bedeutung der gefundenen Zahl in dem Fall, wo die Fläche aus m Ebenen besteht, erklärt. In diesem Fall wird eine gewisse Anzahl, sagen wir K, der durch die Gerade b gehenden Tangentialebenen mit jeder Ebene zusammenfallen, die b mit den $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ Schnittpunkten der m Ebenen π verbindet. Die noch übrigen müssen b mit gewissen Punkten der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Schnittlinien dieser Ebenen verbinden, deren Lage zwar von der Art und Weise des Grenzübergangs abhängt, deren Anzahl jedoch immer einen bestimmten Wert annehmen muß. Es sei S ein solcher auf der Schnitt-



linie g der Ebenen π_1 und π_2 liegender Punkt. Nehmen wir an, daß die Ebene Sb die Fläche in S berührt, d. h., daß sie Grenzlage einer Tangentialebene der in m Ebenen zerfallenden Fläche φ_m sei. Die Ebenen π_1 und π_2 sind nun aber offenbar auch als Tangentialebenen in demselben Punkte zu betrachten, und da die drei Ebenen nicht nur verschieden sind, sondern nicht einmal einem Büschel angehören, so wird die Tangentialebene in S ganz unbestimmt (alle Krümmungshalbmesser werden null sein). Jede durch S gehende Ebene ist eine Tangentialebene und jede durch S gehende Gerade ist eine Tangente. Einen solchen Punkt werden wir einen Scheitel nennen. (Vgl. [6]).

Das Entstehen solcher Scheitel läßt sich in einfacher Weise bei einer Fläche zweiter Ordnung verfolgen. Da sie — wie wir in [24] gesehen haben — auch von der zweiten Klasse ist, so muß sie, wenn sie in zwei Ebenen zerfällt, zwei auf der Schnittlinie dieser Ebene liegende Scheitel haben. Dies kann man sich leicht vorstellen, wenn man bemerkt, daß der betrachtete Grenzfall entsteht, wenn zwei der Achsen der Fläche gleichzeitig null werden; die Scheitel — die wie die Ebenen reell oder imaginär sein können — sind dann die Endpunkte der dritten Achse. (Über die gleichzeitige Entartung der Scharen von Erzeugenden siehe im folgenden [32]).

Eine Fläche m^{ter} Ordnung kann auch so in m Ebenen zerlegt werden, daß die $\frac{1}{2} m(m-1)$ Schnittlinien dieser Ebenen je zwei Scheitel enthalten. Dies kann man für die Schnittlinie g zweier Ebenen π_1 und π_2 erkennen, wenn man als Zwischenglied der Entartung den Fall betrachtet, in dem diese zwei Ebenen vorläufig durch eine Fläche zweiter Ordnung ersetzt werden. Im ganzen muß eine Grenzfläche also $m(m-1)$ Scheitel haben, die paarweise auf die Schnittlinien verteilt sein können.[1]) Wie bei einer Fläche zweiter Ordnung ist eine einen Scheitel mit einer Geraden b verbindende Ebene nur einmal unter die durch b gehenden Tangentialebenen zu zählen.

Im ganzen gehen also durch b

$$K \cdot \tfrac{1}{6} m(m-1)(m-2) + m(m-1)$$

Tangentialebenen. Da wir aber für die Klasse m'' den Wert $m(m-1)^2$ bereits anders gefunden haben, so muß $K = 6$ sein.

Wenn wir hier auch keine neue Herleitung der Klasse erhielten, so kann doch die indirekte Bestimmung der Zahl K neben der Auffindung der Scheitel zur Lösung anderer Aufgaben benutzt werden. Es sei z. B. gegeben ein ∞^1faches System von Flächen mit den Charakteristiken μ, μ', μ'' (s. [17] Fußnote); wir suchen die Anzahl der Flächen dieses Systems, die eine gegebene Fläche φ_m von der Ordnung m berühren. Die Lösung dieser Aufgabe kann jetzt durch Betrachtung des

1) Da wir nur eine mögliche Form des Grenzübergangs betrachtet haben, sagen wir nicht, daß diese Verteilung der Scheitel notwendig sei.



Grenzfalles gefunden werden, in welchem φ_m aus m Ebenen besteht. In diesem Falle werden die folgenden Flächen des Systems als Berührungsflächen zu betrachten sein:

1. die $m \cdot \mu''$, die die m Ebenen berühren;

2. die $\frac{1}{2} m(m-1)\mu'$, die die Schnittlinie der m Ebenen berühren, je zweimal gezählt;

3. die $\frac{1}{6} m(m-1)(m-2)\mu$, die durch die Schnittpunkte der Ebenen gehen, je sechsmal gezählt;

4. die $m(m-1)\mu$, die durch die auf den Schnittlinien liegenden Scheitel gehen.

Im ganzen findet man also

$$m\mu'' + m(m-1)\mu' + m(m-1)^2\mu$$

Flächen des Systems, die die entartete Fläche berühren, und diese Anzahl muß für jede φ_m gelten. In [29] werden wir dieser Formel eine Gestalt geben, in der auch etwaige Singularitäten berücksichtigt sind.

[28] Benutzung von zusammengesetzten Raumkurven. Man darf nicht überall die in [26] und [27] benutzte Zerlegungsmethode auf Abzählungen, die eine Raumkurve betreffen, anwenden. Denn, wie wir in [7] gesehen haben, lassen sich die Gattungen dieser Kurven nicht durch solche Anzahlen wie die Ordnung n und die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte h definieren. Es genügt also nicht, eine aus Geraden zusammengesetzte Kurve mit denselben Anzahlen zu bilden, um einen Grenzfall der zu untersuchenden Gattung zu erhalten. Ob jede der unter sich verschiedenen, durch bestimmte Werte von n und h charakterisierten Gattungen einen solchen Grenzfall enthält, ist noch eine offene Frage. Soll ein solcher Grenzfall mit Vorteil zu weiteren Anzahlbestimmungen verwendet werden können, so darf er außerdem nicht dadurch herbeigeführt werden, daß ein scheinbarer Doppelpunkt durch einen wirklichen ersetzt wird ([7] Schluß).

Es gibt jedoch besondere Kurvengattungen mit Grenzkurven, die sich, ohne daß scheinbare Doppelpunkte verloren gehen, in Gerade a zerlegen lassen.

Dies gilt erstens von der vollständigen Schnittkurve zweier Flächen von den Ordnungen m_1 und m_2. Zerfallen diese Flächen beide in Ebenen, so wird die Schnittkurve in $m_1 \cdot m_2$ Gerade zerfallen. Die Anwendung dieses Grenzfalles führt jedoch im wesentlichen nur auf dieselben Ergebnisse, die wir schon in [27] durch die Zerlegung der einen Fläche gefunden haben.

Die in Frage stehende Zerlegung in Gerade ist auch möglich für die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurven, die durch die Anzahlen α_1 und α_2 ihrer Schnittpunkte mit den Erzeugenden der einen oder anderen Schar charakterisiert werden. Daß diese Kurven eine zusammenhängende Menge (Gattung) bilden, haben wir schon in [22] ge-



sehen; dieser muß daher als Grenzfall die Kurve angehören, die aus α_2 Erzeugenden der ersten und α_1 Erzeugenden der zweiten Schar besteht. Wenn $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ ist, treten nur solche aus Erzeugenden zusammengesetzte Kurven auf; in allen anderen Fällen aber auch Kurven, die nicht zusammengesetzt sind, was aus der in [22] genannten analytischen Darstellung erhellt.

Da die Erzeugenden ein und derselben Schar sich nicht schneiden, ist die Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte der durch α_1 und α_2 charakterisierten Kurve

$$h = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)}{2}.$$

Die Ordnung n der Kurve ist $\alpha_1 + \alpha_2$. Ist diese Zahl gegeben, so wird $h = \frac{1}{2}n(n-1) - \alpha_1\alpha_2$ und erhält also seinen kleinsten Wert, wenn für gerade n $\alpha_1 = \alpha_2$ und für ungerade n $\alpha_1 = \alpha_2 \pm 1$ ist. Der Minimalwert von h gehört somit zu den auf diese Weise charakterisierten Kurvengattungen und ist beziehungsweise $\frac{1}{4}n(n-2)$ und $\frac{1}{4}(n-1)^2$. Der Maximalwert für nicht zusammengesetzte Kurven ergibt sich in den Fällen wo $\alpha_1 = 1$ oder $\alpha_2 = 1$ ist, und beträgt $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. (Vgl. im folgenden [37].)

Für die in [7] erwähnten Gattungen von Raumkurven vierter Ordnung hat man beziehungsweise $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, also $h = 2$, und $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, also $h = 3$.

Für $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$ finden wir den schon früher [7] erwähnten Wert 18 der Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte einer gewissen, auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurve neunter Ordnung.

Durch Betrachtung desselben Grenzfalles finden wir, daß die Kurve (α_1, α_2) von dem Range $2\alpha_1\alpha_2$ ist, und daß sie eine andere auf derselben Fläche liegende Kurve, die in ähnlicher Weise durch die Zahlen α_1', α_2' charakterisiert wird, in $\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1'$ Punkten schneidet.

[29] Benutzung von abgeplatteten Kurven oder Flächen. Wenn man in der Ebene eine Kurve $c_{n,n'}$ von der Ordnung n und der Klasse n' von einem festen Punkt A aus auf eine Gerade g projiziert, so erhält man eine mit g zusammenfallende n-fache Gerade, die als Grenzfall der Schar von Kurven betrachtet werden kann, die man durch perspektive Kollineationen mit A als Zentrum und g als Achse erhält. Alle diese Kurven haben n' von A ausgehende, gemeinschaftliche Tangenten, die in ihren Schnittpunkten mit g die Grenzkurve berühren müssen. Diese n' Schnittpunkte werden die Eigenschaft haben, daß die Grenzkurve alle durch sie gehenden Kurven berührt. Man nennt sie Scheitel (vgl. [27], wo dieselbe Benennung auf den entsprechenden räumlichen Begriff angewandt wird).

Man kann diese Entartung benutzen, um die Anzahl der Kurven eines ∞^1 Systems zu finden, die $c_{n,n'}$ berühren; denn bei dieser für die



Schar kollinearer Kurven gemeinsamen Bestimmung darf man $c_{n,n'}$ durch die Grenzkurve ersetzen. Um diese zu berühren, müssen die Systemkurven entweder durch einen der n' Scheitel gehen oder g berühren, und im letzteren Falle ist die berührende Kurve Grenzkurve von n Kurven, die je einen Zweig der sich der Geraden g nähernden Kurve der Schar kollinearer Kurven berühren. Wenn also das System die Charakteristiken μ, μ' hat (s. [17]), so wird es $n'\mu + n\mu'$ Berührungskurven enthalten. Durch diese Beweisführung wird ein früher bewiesenes Resultat [26] auf solche Fälle erweitert, in welchen die Kurve $c_{n,n'}$ Doppelpunkte oder andere singuläre Punkte hat und n' also von $n(n-1)$ verschieden ist.

Da ein System von konzentrischen Kreisen die Charakteristiken $\mu = \mu' = 1$ hat, wird ein solches $n + n'$ Kreise enthalten, die eine Kurve von der Ordnung n und der Klasse n' berühren; man kann also durch einen gegebenen Punkt $n + n'$ Normalen an die Kurve legen.

In ähnlicher Weise kann man auch die Eigenschaften einer gegebenen Fläche φ von der Ordnung m, dem Rang m' und der Klasse m'' aus jenen herleiten, die ihre Projektion von einem festen Punkt aus auf eine Ebene π besitzt. Diese Projektion ist eine m-fache Ebene mit einer „Übergangskurve“ zwischen den verschiedenen Blättern, die von der Ordnung m' und der Klasse m'' ist. Jede Gerade, die die Übergangskurve schneidet, ist eine Tangente dieser Grenzfläche, jede Ebene, die diese Kurve berührt, eine Tangentialebene der Grenzfläche. Eine willkürliche Ebene schneidet die Grenzfläche in einer m-fachen Geraden, deren Scheitel die m' Schnittpunkte mit der Übergangskurve sind.

Man kann die Fläche φ durch diese Grenzfläche ersetzen, um die Anzahl der sie berührenden Flächen in einem ∞^1-fachen System mit den Charakteristiken μ, μ', μ'' zu finden. Dabei wird jede der μ'' Flächen des Systems, die die Ebene π berühren, m-mal zu zählen sein. Die übrigen Berührungsflächen müssen die Übergangskurve berühren. Da im System der Schnittkurven der Flächen mit π, wie im Systeme der Flächen selbst, μ durch jeden Punkt der Ebene gehen und μ' jede ihrer Geraden berühren, wird die Anzahl der die Übergangskurve berührenden Flächen $m''\mu + m'\mu'$ sein. Die ganze gesuchte Zahl ist also

$$m''\mu + m'\mu' + m\mu'',$$

was wir früher schon für den Fall einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung gesehen haben [27]. Durch Betrachtung eines Systems konzentrischer Kugeln, das die Charakteristiken $\mu = \mu' = \mu'' = 1$ hat, findet man z. B., daß durch einen Punkt $m + m' + m''$ Normalen an die Fläche gehen.

In [163], [164] und [180] werden wir dieselben Grenzformen zur Lösung weitergehender Berührungsaufgaben anwenden.

[30] *Reyes* Komplex. Die Ordnung eines Strahlenkomplexes ist nach [8] die Anzahl der zu einem Büschel gehörigen Strahlen des Kom-

plexes, oder die Ordnung des Kegels, der von den durch einen festen Punkt gehenden Strahlen erzeugt wird, oder die Klasse der Kurve, die von den in einer festen Ebene liegenden Strahlen erzeugt wird. Man kann sie durch eine passende Wahl des Büschels, des Punkts oder der Ebene finden.

Sei z. B. der Komplex dadurch bestimmt, daß seine Strahlen vier feste Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Punkten schneiden, deren Doppelverhältnis eine gegebene Größe hat. Suchen wir, um seine Ordnung zu bestimmen die Strahlen, die durch einen beliebigen Punkt der Geraden $\alpha\beta$ gehen. Diese müssen entweder in α oder in β liegen[1]); der zu dem Punkt gehörige Komplexkegel besteht also aus diesen Ebenen. Da bei diesem Grenzfall keine Lösung verloren geht, muß der Komplexkegel im allgemeinen von zweiter Ordnung sein, oder zwei ist die Ordnung des Komplexes. Auch der zu einem willkürlichen Punkte der Ebene α gehörige Komplexkegel besteht aus α und einer anderen, leicht bestimmbaren Ebene.

Ein beliebiger Komplexkegel muß durch die Ecken A, B, C, D des durch die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmten Tetraeders gehen. Daraus sieht man leicht, daß auch das Doppelverhältnis der Ebenen, die einen willkürlichen Strahl mit A, B, C, D verbinden, einen konstanten Wert besitzt. Dieselbe Folgerung werden wir aus einer später zu nennenden abzählenden Methode ziehen [51].

[31] Anwendungen auf Strahlenkongruenzen; Brennfläche einer Kongruenz. Die Anzahl der Strahlen, die zwei gegebene Geraden a und b schneiden und noch zwei Bedingungen erfüllen, findet man durch Betrachtung des Falles, in welchem a und b sich schneiden. Die gesuchten Strahlen müssen in diesem Falle entweder durch den Schnittpunkt (ab) gehen oder in der Ebene (ab) liegen. Die Strahlen, die zwei Bedingungen erfüllen, bilden eine Kongruenz. Nennen wir ihre Ordnung (s. [8]) n, ihre Klasse n', so wird sie also $n + n'$ Strahlen enthalten, die zwei willkürliche Geraden schneiden. Anders ausgedrückt: der Ort der Strahlen der Kongruenz, die eine Gerade a schneiden, ist eine Regelfläche von der Ordnung und Klasse $n + n'$; die Gerade a ist n-fache Gerade dieser Fläche, wenn man diese als Punktgebilde betrachtet, n'-fache Gerade, wenn man sie als Ebenengebilde betrachtet, d. h. eine durch sie gehende Ebene α ist für n' der Tangentialebenen zu zählen, die durch eine in α liegende Gerade b gehen. — Der hier gefundene Satz wird später den Ausgangspunkt für die sogenannten Inzidenzformeln bilden [191].

Betrachten wir nun den Spezialfall, in welchem die Gerade a selbst

1) Dies ist zwar nicht notwendig, wenn das Doppelverhältnis 0,1 oder ∞ ist; aber ein für allemal haben wir bemerkt [9], daß unsere Sätze nur dann für nicht ausdrücklich genannte Spezialfälle zu gelten brauchen, wenn man diese als Grenzfälle auffaßt.

der Kongruenz angehört. Die Anzahl $n + n'$ der Strahlen der Kongruenz, die a und eine Gerade, die a nicht schneidet, treffen, d. h. die Ordnung der von den Strahlen erzeugten Regelfläche, kann sich dann nicht ändern. Diese Fläche ist also von der Ordnung $n + n'$. Sie schneidet aber eine beliebige durch a gehende Ebene, außer in a selbst, nur in den $n' - 1$ anderen in dieser Ebene enthaltenen Strahlen. Als Punktgebilde betrachtet hat die Fläche also in a eine $n + 1$-fache Gerade, und ihre Spur auf einer beliebigen Ebene hat einen $n + 1$-fachen Punkt in der Spur A der Geraden a. $n - 1$ der durch A gehenden Zweige werden von den Spuren jener Strahlen gebildet, die sich den durch A gehenden und von a verschiedenen Strahlen der Kongruenz, die a schneiden, nähern; die übrigen zwei Zweige müssen von den Strahlen, die sich dem Strahl a selbst nähern, gebildet werden. Da auch diese a schneiden, muß es auf a zwei Punkte M und M' geben, in welchen a konsekutive Strahlen schneidet, und diese bilden mit a abwickelbare Elemente der Regelfläche, längs welcher diese zwei durch a gehende Ebenen μ und μ' berührt. Jeder Strahl der Kongruenz wird also Doppellinie einer abwickelbaren Fläche sein, deren Erzeugende der Kongruenz angehören; diese Flächen werden jedoch durch eine Differentialgleichung bestimmt, und sind also im allgemeinen transzendent. Ihre weitere Bestimmung fällt daher nicht unter die in diesem Buche zu behandelnde Aufgabe. Dagegen hängt die Bestimmung der zu einem Strahl gehörigen Punkte M und M' und der Ebenen μ und μ' nur von Differentiationen ab und wird also algebraisch ausführbar sein; dasselbe gilt von dem Ort der genannten Punkte und der Einhüllenden der genannten Ebenen.

Da zu jedem der ∞^2 Strahlen der Kongruenz zwei Punkte M und M' und zwei Ebenen μ und μ' gehören, so muß sowohl der Ort dieser Punkte als auch die Einhüllende dieser Ebenen eine Fläche sein. Wir werden hier beweisen, daß die beiden Flächen identisch sind; man nennt sie die Brennfläche der Kongruenz.

Als Schnittpunkt eines beliebigen Strahls a der Kongruenz mit einem konsekutiven Strahl a' bestimmt, wird der Punkt M (oder M') der Geraden a Berührungspunkt dieser Geraden mit dem Orte der Punkte M und M' sein. Die sich in M schneidenden, konsekutiven Strahlen a und a' werden dieselbe Fläche in M' und in einem unendlich nahe an M' liegenden Punkt berühren. Die durch a und a' bestimmte Ebene berührt also den Ort der Punkte M und M' in M'. Ebenso wird die Ebene, die den Strahl a mit dem ihn in M' schneidenden konsekutiven Strahl der Kongruenz verbindet, den Ort in M berühren. Die Identität der beiden Flächen ist damit erwiesen.

In Spezialfällen kann der Ort der Punkte M oder der Punkte M' oder beider Punkte sich auf eine Kurve (Brennkurve) reduzieren; dann müssen jedoch, da die Kurve nur ∞^1 Punkte enthält, durch jeden ihrer

Punkte ∞^1 Strahlen der Kongruenz gehen. Die ∞^2 Ebenen μ und μ' werden dann Tangentialebenen, beziehungsweise Doppeltangentialebenen, an die Brennkurve sein. Diese Fälle treten jedenfalls dann ein, wenn bei der Bestimmung der Kongruenz eine Kurve benutzt wird, die alle Strahlen schneiden sollen. Diese Leitkurve ist dann eine, im allgemeinen mehrfache, Brennkurve. — Ebenso kann die Brennfläche eine abwickelbare Fläche sein: jede ihrer ∞^1 Tangentialebenen muß dann ∞^1 Strahlen der Kongruenz enthalten.

Später [104] werden wir allgemeine Methoden zur Bestimmung der Brennfläche aufstellen, können aber schon hier für die niedrigsten Werte der Ordnung und Klasse der Kongruenz diese Fläche, beziehungsweise die Brennkurve, bestimmen.

Da ein Punkt der Brennfläche einer Kongruenz Schnittpunkt zweier konsekutiven Strahlen ist, so kann eine Kongruenz von der Ordnung $n = 1$, überhaupt keine Brennfläche, sondern nur eine, möglicherweise zusammengesetzte, Brennkurve haben. Ebenso muß im Falle $n' = 1$, die Brennfläche eine abwickelbare sein. Ist gleichzeitig $n = 1$ und $n' = 1$, so müssen alle Tangentialebenen der Brennkurve eine abwickelbare Umhüllungsfläche haben, oder es geht nur eine endliche Anzahl dieser Tangentialebenen durch einen beliebigen Punkt des Raumes. Dies ist nur der Fall, wenn die Brennkurve aus Geraden besteht, und im vorliegenden Fall können es dann nur zwei sein, die hinreichen, um eine Kongruenz $n = 1$, $n' = 1$ zu bestimmen. Diese Leitgeraden können natürlich auch imaginär sein oder zusammenfallen. Diese Haupteigenschaft der Kongruenzen $n = 1$, $n' = 1$, die man lineare Kongruenzen nennt, wird uns später [42] als Beispiel für eine andere Beweisführung dienen. — Schneiden sich die Leitgeraden, so löst sich die lineare Kongruenz in zwei auf: ein Bündel von Strahlen, die durch einen festen Punkt gehen ($n = 1$, $n' = 0$), und die Geraden einer Ebene ($n = 0$, $n' = 1$).

Nehmen wir sodann an, daß $n = 2$ sei, und daß die Kongruenz keine Brennkurve habe, sondern eine Brennfläche, die jeder Strahl der Kongruenz in den Punkten M und M' berührt. Die Brennfläche ist dann wenigstens vierter Ordnung. Sie kann aber auch nicht höherer Ordnung sein; denn wenn ein beliebiger Strahl der Kongruenz die Brennfläche noch in einem weiteren Punkt schnitte, so würden durch ihn noch zwei weitere Strahlen gehen, nämlich die vom Schnittpunkt ausgehenden konsekutiven Strahlen, im ganzen also drei. — Ist auch $n' = 2$, so muß die Brennfläche auch von der Klasse vier sein, wenn wir voraussetzen, daß sie weder ganz noch teilweise abwickelbar ist.

Nun haben wir gesehen [27], daß eine Fläche von der Ordnung m im allgemeinen von der Klasse $m(m-1)^2$, eine Fläche vierter Ordnung also im allgemeinen von der Klasse 36 ist. Eine Reduktion kann nur von mehrfachen Punkten oder mehrfachen Kurven herrühren; diese müßten hier, wo die Strahlen in zweimal zwei Punkten schneiden sol-

len, Doppelpunkte oder Doppelkurven sein. Letztere, die Brennkurven der Kongruenz sein würden, haben wir aber durch unsere Voraussetzung ausgeschlossen. In den Doppelpunkten bilden die Tangenten Kegel zweiter Ordnung, was man aus einer analytischen Darstellung in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung in dem Doppelpunkt ersieht. Man nennt sie konische Doppelpunkte. Ein solcher Punkt reduziert die Klasse um zwei, da die ersten Polaren zweier beliebiger Punkte sich in einer durch den Punkt gehenden Kurve schneiden.[1]) Um die Klasse auf vier zu reduzieren, muß man also der Fläche 16 solcher Punkte beilegen. Durch Anwendung des Dualitätsprinzips findet man, daß 16 Ebenen die Fläche je längs eines Kegelschnitts berühren. — Daß nun die durch diese Singularitäten charakterisierten Flächen, *Kummer*schen Flächen[2]), wirklich existieren, und daß ihre Doppeltangenten sich immer in Kongruenzen mit den Zahlen $n = 2$, $n' = 2$ verteilen, werden wir später beweisen [91].

Die Fälle, in welchen eine Kongruenz mit den Zahlen $n = 2$, $n' = 2$ sowohl eine Brennfläche als auch eine Brennkurve oder nur eine Brennkurve hat, kann man entweder als Spezialfälle betrachten oder in ähnlicher Weise für sich untersuchen.

[32] Entartete Strahlengebilde. Da die Komplexe einer gegebenen Ordnung m eine zusammenhängende Menge bilden [8], kann man einen solchen in abzählenden Untersuchungen spezialisieren, z. B. in der Weise, daß man verlangt, die Strahlen sollen m gegebene Gerade schneiden. Dadurch findet man, daß mr Strahlen dieses Komplexes Erzeugende einer Regelfläche von der Ordnung r sind, und daß die zwei Komplexen von den Ordnungen m_1 und m_2 angehörenden Strahlen eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse $m_1 m_2$ bilden — was man übrigens auch durch Anwendung von *Bézouts* Satz auf die Strahlen der beiden Komplexe erkennt, die entweder durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen —; weiter wegen [31], daß diese Kongruenz $m_1 m_2 (n + n')$ Strahlen enthält, die auch einer Kongruenz von der Ordnung n und der Klasse n' angehören.

Aus diesen Ergebnissen folgt weiter, daß die Anzahl der Strahlen,

---

1) Es folgt auch aus dem Vergleich mit dem Fall, in welchem eine Fläche zweiter Ordnung in einen Kegel degeneriert: dann fallen die zwei durch eine Gerade gehenden Tangentialebenen mit der durch den Scheitel des Kegels gehenden Ebene zusammen.

2) Die Kongruenz $n = 2$, $n' = 2$ und ihre Brennfläche sind zuerst von *Kummer* untersucht worden (Abhandlungen der Berliner Akademie 1866). Ihre von ihm und anderen Mathematikern gefundenen merkwürdigen Eigenschaften hat *R. Sturm* in seiner Liniengeometrie II (Leipzig 1893) S. 117 ff. in zusammenhängender Darstellung entwickelt. — Die Ordnung 4 der Brennfläche einer Kongruenz $n = 2$ findet *Kummer* eben durch die auch hier angewandte abzählende Betrachtung.



die sowohl den Komplexen von den Ordnungen m_1 und m_2 als auch zwei anderen von den Ordnungen m_3 und m_4 angehören,

$$2 m_1 m_2 m_3 m_4$$

ist. So groß ist z. B. die Zahl der Strahlen, die vier Kurven von den genannten Ordnungen schneiden. Der Ort der Strahlen, die den drei ersten Komplexen angehören (oder, im genannten Spezialfall, die drei ersten Kurven schneiden), ist von der Ordnung $2 m_1 m_2 m_3$.

Weil die Kongruenzen, die nicht vollständige Schnitte zweier Komplexe gegebener Ordnung sind, sondern nur durch ihre Ordnung n und ihre Klasse n' gegeben sind, nicht immer eine zusammenhängende Menge bilden, dürfen wir für sie im allgemeinen die Auflösung nicht in entsprechender Weise einrichten. Wir können also nicht eine solche Spezialisierung, wie wir sie vorhin anwandten, zur allgemeinen Bestimmung der Anzahl der zwei Kongruenzen gemeinschaftlichen Strahlen verwenden. Es gibt aber solche Gattungen von Kongruenzen (n_1, n_1') von der Ordnung n_1 und der Klasse n_1', die Grenzfälle umfassen, in welchen die Strahlen entweder durch einen von n_1 gegebenen Punkte gehen oder in einer von n_1' gegebenen Ebenen liegen. Dies wird z. B. mit der Kongruenz der Fall sein, die von den Bisekanten einer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurve gebildet wird (vgl. [28]). Man ersieht sogleich aus der Zerlegung, daß die Anzahl der Strahlen einer solchen Kongruenz, die auch einer anderen Kongruenz (n, n') angehören, $n n_1 + n' n_1'$ ist. Später [144] werden wir sehen, daß dasselbe für zwei ganz willkürliche Kongruenzen gilt.

Die Gesamtheit der Strahlen, die drei Gerade a, b, c schneiden, wird, wenn sich a und b in einem Punkte A schneiden und also in einer Ebene α liegen, wenn weiter α die Gerade c im Punkte B schneidet — die Ebene Ac heiße β —, aus den Geraden der zwei Büschel $A\beta$ und $B\alpha$ bestehen. Die von den Strahlen erzeugte Fläche zweiter Ordnung besteht, als Punktort betrachtet, aus den Ebenen α und β, als Ebenenort betrachtet, aus den Scheiteln A und B (s. [27]). Die andere Schar von Erzeugenden besteht aus den Strahlenbüscheln $A\alpha$ und $B\beta$. Diese Entartung einer Fläche zweiter Ordnung erweist sich sehr oft bei Anzahlenbestimmungen nützlich. Jede Schar von Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung wird z. B. $2n'$ Strahlen enthalten, die eine Fläche vom Range n' berühren.

[33] Unvollständige Induktionen durch Betrachtung von Spezialfällen; vorläufige Bestimmung der mehrfachen Sekanten einer Raumkurve. Die eben ausgeführte, für gewisse Strahlenkongruenzen gültige Bestimmung der Anzahl der gemeinschaftlichen Strahlen zweier Kongruenzen hätte eine allgemeine Gültigkeit, wenn man voraussetzen dürfte, daß die gesuchte Anzahl nur von der Ordnung und der Klasse der beiden Kongruenzen abhängt. Dann

würde es genügen, einen einzelnen Fall zu betrachten, in dem die als gegeben betrachteten Zahlen beliebige Werte annehmen können. Sonst haben wir uns immer versichern müssen, entweder daß die gegebene Zahl (Ordnung einer ebenen Kurve, einer Fläche oder eines Komplexes) oder die gegebenen Zahlen (Ordnungen zweier Flächen, die sich schneiden, Anzahlen der Schnittpunkte einer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurve mit ihren beiden Scharen von Erzeugenden) eine zusammenhängende Menge bilden, der dann jeder Spezialfall als Grenzfall angehören muß, oder wenigstens, daß zu jeder der durch die gegebenen Zahlen bestimmten Gattungen ein Grenzfall der fraglichen Art gehört. Diese Untersuchung kann man sich aber ersparen, wenn schon vorausgesetzt werden darf, daß die gesuchte Anzahl nur von gewissen Zahlen abhängt; ein einzelner Fall mit beliebigen Werten dieser Zahlen genügt dann zur Bestimmung.

Bewiesen ist das gefundene Resultat in solchen Fällen nur dann, wenn man auch die Voraussetzung bewiesen hat. Sonst ist die Bestimmung nur vorläufig und muß nachher noch bewiesen werden entweder durch einen nachträglichen Beweis der gemachten Voraussetzung oder auf andere Weise. Beides wird jedoch oft durch die vorläufige Bestimmung erleichtert. Namentlich kann eine Bestimmung dieser Art oft dadurch vervollständigt werden, daß man nachweist, daß alle durch die gegebenen Zahlen charakterisierten Gattungen Grenzfälle von der zur Bestimmung benutzten Art haben.

Als Beispiele sollen uns einige eine Raumkurve betreffende Bestimmungen dienen, von welchen es nahe liegt anzunehmen, daß sie nur von ihrer Ordnung n und der Anzahl h ihrer scheinbaren Doppelpunkte abhängen. Man weiß, daß letzteres wirklich von der Anzahl t_2 ihrer Bisekanten (zweimal schneidenden Strahlen) gilt, die zwei Gerade a und b schneiden; in [31] haben wir nämlich bewiesen, daß diese Zahl die Summe der durch einen Punkt gehenden und der in einer Ebene liegenden Bisekanten ist, also

$$t_2 = h + \tfrac{1}{2} n (n-1).$$

Wir werden nun aber hier voraussetzen, daß auch die Anzahl t_3 ihrer Trisekanten (dreimal schneidenden Strahlen), die eine Gerade c schneiden, allein von n und h abhänge und zwar, daß sie eine ganze rationale Funktion von n und h sei.

Wenn diese Voraussetzung richtig ist, so wird es genügen, eine solche Kurve zu betrachten, die aus n Geraden besteht, die h scheinbare, also, wenn $n' = n(n-1) - 2h$ ist, $\frac{n'}{2}$ wirkliche Schnittpunkte hat. n' ist hier der Rang der Kurve [7] und [28], indem zwei durch eine Gerade a gehenden Tangentialebenen in jeder durch einen wirklichen Schnittpunkt gehenden Ebene zusammenfallen. Freilich sind vielleicht



nicht alle Werte von n und h so beschaffen, daß nicht im Grenzfall auch einige der als scheinbare Doppelpunkte bezeichneten wirkliche würden; allein es gibt doch unendlich viele unter sich unabhängige Werte dieser Art und dies genügt, um eine ganze rationale Funktion völlig zu bestimmen.

Für eine so zusammengesetzte Kurve findet man

$$t_3 = 2 \cdot \tfrac{1}{6} n(n-1)(n-2) - \frac{n'}{2}(n-2)$$
$$= (n-2)(h - \tfrac{1}{6} n(n-1)).$$

Zu demselben Resultat würde man durch Betrachtung einer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurve gelangen. Wenn diese die Erzeugenden der zwei Scharen beziehungsweise in α_1 und α_2 Punkten schneidet, wird der Ort der dreifachen Sekanten die Fläche zweiter Ordnung,

$$\tfrac{1}{6}\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1-2) + \tfrac{1}{6}\alpha_2(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)$$

Mal gezählt, sein. Außerdem ist, wie wir in [28] gesehen haben, $n = \alpha_1 + \alpha_2$, $h = \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1)$. Dadurch wird man auf dasselbe Resultat geführt. Dieses Ergebnis, dessen Herleitung im Vorstehenden auf eine unbewiesene Voraussetzung gegründet ist, wird sich später als allgemein gültig erweisen.

Keiner der hier benutzten Spezialfälle läßt sich jedoch anwenden, um die Anzahl t_4 der Quadrisekanten (viermal schneidenden Strahlen) einer Raumkurve zu finden, selbst wenn wir auch zur Bestimmung dieser Anzahl voraussetzen würden, daß diese nur von n und h abhänge. Denn wenn eine Kurve aus Geraden zusammengesetzt ist, wird jede dieser Geraden unendlich viele, also auch vier Punkte der Kurve enthalten, und man weiß nicht, wie vielmal jede dieser Geraden mitzuzählen ist, um den von n und h abhängigen, allgemeingültigen Ausdruck zu erhalten; sie werden auch verschiedentlich mitzuzählen sein, je nach der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit anderen der die Kurve zusammensetzenden Geraden.

Auch die Betrachtung einer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Kurve beliebiger Ordnung genügt nicht; denn soll diese Quadrisekanten haben, so muß entweder $\alpha_1 > 3$ oder $\alpha_2 > 3$ sein, und dann werden alle Erzeugenden der einen Schar Quadrisekanten sein. Die Gleichung, deren Grad die gesuchte Anzahl angeben soll, wird also in diesem Falle eine identische sein [4], und die aufgestellte Voraussetzung gibt keinen Anhaltspunkt für die Benutzung dieses Spezialfalles als Grenzfall.

Um einen die vorausgesetzte Bedingung erfüllenden Ausdruck von t_4 zu finden, muß man also andere Spezialfälle benutzen, z. B. eine Kurve, die aus lauter Kegelschnitten besteht, wenn n eine gerade Zahl

ist, und wenn sie ungerade ist, aus Kegelschnitten und einer Kurve dritter Ordnung.

Dadurch findet man in beiden Fällen

$$t_4 = \frac{1}{24}[12h(h-4n+11) - n(n-2)(n-3)(n-13)].$$

Später (in [64], s. auch [139]) werden wir wirkliche (voraussetzungslose) Beweise dieser Resultate liefern.

[34] *Cayleys* funktionale Methode. Für die oben betrachteten wie auch für ähnliche Fälle hat man eine Methode aufgestellt, die scheinbar einen mehr systematischen Charakter hat. Auch sie setzt aber als bekannt oder evident voraus, daß die gesuchte Anzahl von gewissen gegebenen Zahlen abhängt, und ihre Beweiskraft reicht daher nicht über die in [33] ausgeführten Bestimmungen hinaus.

Um diese Methode zu erklären, genügt es, ihre Anwendung auf die letzte Aufgabe zu betrachten. Setzt man voraus, daß die Zahl t_4 nur von den zu einer Kurve $c_{n,h}$ gehörigen Zahlen n und h abhängt, so kann man sie auf folgende Weise auf eine Kurve $c_{n_1+n_2,\ h_1+h_2+n_1n_2}$, die aus zwei einander nicht schneidenden Kurven c_{n_1,h_1} und c_{n_2,h_2} zusammengesetzt ist, anwenden. Ersetzen wir die zu einer Kurve $c_{n,h}$ gehörige Bezeichnung t_4 durch die Funktionsbezeichnung $t_4(n, h)$, so findet man jetzt die Funktionalgleichung

$$t_4(n_1+n_2,\ \ h_1+h_2+n_1n_2) = t_4(n_1, h_1) + t_4(n_2, h_2) + \varphi(n_1, n_2,\ \ h_1, h_2),$$

wo φ eine durch die früheren Bestimmungen von t_3 und t_2 bekannte Funktion ist. Zu der Zahl $t_4(n_1+n_2,\ h_1+h_2+n_1n_2)$ gehören nämlich noch die Zahlen der Geraden, die eine der gegebenen Kurven zwei- oder dreimal, die andere zwei- oder einmal schneiden. Die bei Integration der Funktionalgleichung hinzukommenden, willkürlichen Konstanten lassen sich durch Betrachtung von Spezialfällen bestimmen. In einer systematischen Behandlung muß eine dieser Bestimmung ähnliche Bestimmung von t_2 und t_3 vorausgehen.[1])

Wir werden jedoch hier weder auf diese Bestimmung näher eingehen noch andere Beispiele aufstellen[2]), bei denen die Gültigkeit des Verfahrens auf einer noch unbewiesenen Voraussetzung beruht; vielmehr ziehen wir es vor, ein ganz einfaches Beispiel dieses Rekursionsverfahrens zu betrachten, für das die Voraussetzung eine gesicherte Tatsache ist.

---

1) Die wirkliche Ausführung dieser Bestimmung von t_4 würde zwar schwierig sein. Als Übung schlagen wir aber vor, die Größe, die wir hier $\varphi(n_1, n_2,\ h_1, h_2)$ genannt haben, direkt zu bestimmen, wobei jedoch der in [32] vorläufig nur durch Induktion gefundene Ausdruck der Anzahl der gemeinschaftlichen Strahlen zweier Kongruenzen benutzt werden muß. Man wird dann ersehen, daß die aufgestellte Funktionalgleichung von dem aufgestellten Ausdruck für t_4 befriedigt wird.

2) Solche werden in [177] besprochen.



Wir suchen die Anzahl x_n der Kurven c_n eines ebenen Büschels, die eine Gerade g berühren. Da solche Büschel eine durch die Zahl n vollständig charakterisierte zusammenhängende Menge bilden, so wird x_n eine Funktion der Zahl n sein. Um sie zu finden, betrachten wir den Grenzfall, in welchem $n+1$ der festen Punkte des Büschels auf einer Geraden a liegen. Die Kurven des Büschels werden dann aus der Geraden a und den Kurven c_{n-1} eines Büschels von der Ordnung $n-1$ bestehen. In diesem Grenzfalle muß eine Kurve c_n, um eine Gerade g zu berühren, aus a und einer Kurve c_{n-1} bestehen, die entweder g berührt oder durch den Schnittpunkt von a und g geht. Wie viele der gesuchten Kurven mit der Kurve zusammenfallen, die aus a und der durch den Punkt (ag) gehenden Kurve c_{n-1} besteht, könnte man allerdings durch infinitesimale Betrachtungen finden. Hier halten wir nur fest, daß diese Zahl von n unabhängig sein muß und nennen sie A. Dann wird

$$x_n = x_{n-1} + A.$$

Da $x_1 = 0$ ist, folgt hieraus, daß $x_n = (n-1)A$ ist, und da es in einem Büschel von Kegelschnitten zwei gibt, die eine gegebene Gerade berühren, so wird $x_n = 2(n-1)$, ein Resultat, das man später auch mittels des Korrespondenzprinzips beweisen kann.

[35] Gemischte Übungen. 1. Anzahl der Kurven c_n eines Büschels, die einen Doppelpunkt haben. Aus dem eben gefundenen Resultat leitet man mittels der in [18] angegebenen Methode den Satz her, daß der Ort der Berührungspunkte der von einem Punkt A ausgehenden Tangenten an die Kurve c_n eines Büschels von der Ordnung $2n-1$ ist. Zwei solche, den Punkten A und B entsprechende Kurven schneiden einander in $(2n-1)^2$ Punkten. Von diesen fallen n^2 in die festen Punkte des Büschels und $2n-2$ sind die Berührungspunkte der Geraden AB mit Kurven des Büschels [34]. Die übrigen $3(n-1)^2$ Schnittpunkte werden je Doppelpunkte einer Kurve des Systems sein. Durch einen solchen Punkt P geht nämlich nur eine Kurve des Systems, die daselbst von zwei unter sich verschiedenen Geraden PA und PB berührt werden soll, was nur dadurch möglich ist, daß die Kurve da einen Doppelpunkt besitzt [4].

Aus diesem Resultat folgt, daß ein Flächenbüschel m^{ter} Ordnung $3(m-1)^2$ Flächen enthält, die eine gegebene Ebene berühren. — Als Übung schlagen wir vor, dasselbe Resultat mittels des in [34] angegebenen Reduktionsverfahrens herzuleiten und es auf mehrdimensionale Räume zu erweitern. Dann wird es auch den im nächsten Beispiel 2. gefundenen Satz umfassen.

2. Anzahl der Flächen φ_m eines Büschels, die einen konischen Doppelpunkt haben. Der Ort der Berührungspunkte der Flächen des Büschels mit den Ebenen eines Büschels wird eine Kurve von der

Ordnung $3(m-1)^2+2(m-1)$ sein; denn jede Ebene des Büschels wird von $3(m-1)^2$ Flächen, die Achse des Büschels von $2(m-1)$ berührt. Der Ort der Berührungspunkte der Flächen mit den Geraden eines Bündels wird eine Fläche von der Ordnung $2m-1$ sein, die durch die feste Kurve des Büschels geht. Von den Schnittpunkten dieser Gebilde werden $2m^2(m-1)$ die Berührungspunkte der festen Kurve des Flächenbüschels mit Ebenen des Büschels (s. [27]), und $3(m-1)^2$ die Berührungspunkte der Ebene, die durch den festen Punkt des Bündels und die feste Gerade des Ebenenbüschels geht, mit Flächen des Flächenbüschels sein. Die übrigen

$$(3(m-1)^2+2(m-1))(2m-1)-2m^2(m-1)-3(m-1)^2=4(m-1)^3$$

Schnittpunkte werden konische Doppelpunkte der durch sie gehenden Flächen des Büschels sein.

3. Wie schon in [19] bemerkt, ist ein lineares Netz ebener Kurven eine ∞^2-fache Mannigfaltigkeit, in welcher alle Kurven, die durch einen Punkt gehen, einen Büschel bilden.[1]) Ist die Ordnung der Kurven n, so wird der Ort der Doppelpunkte der Kurven eines solchen Netzes, die man die *Jacobi*sche Kurve des Netzes nennt, von der Ordnung $3(n-1)$ sein. Die Schnittpunkte dieses Ortes mit einer Geraden a lassen sich nämlich auch bestimmen als Schnittpunkte mit dem Orte der $n-1$ Punkte, in denen die Geraden, die je einen Punkt B mit einem Berührungspunkt von a mit einer Kurve des Netzes verbinden, diese außerdem noch schneiden. Dieser Ort hat in B einen $2(n-1)$-fachen Punkt und ist also von der Ordnung $3(n-1)$.

4. Ein Flächenbündel m^{ter} Ordnung ist die ∞^2-fache Mannigfaltigkeit der Flächen dieser Ordnung, die durch die m^3 Schnittpunkte dreier Flächen des Bündels gehen. Die Flächen des Bündels, die noch durch einen willkürlich gegebenen Punkt gehen, bilden einen Büschel. Ein lineares ∞^3-faches System (Netz) ist ein solches, in welchem die durch einen Punkt gehenden Flächen ein Bündel bilden (s. [19]).

Der Ort der Berührungspunkte der Flächen eines Bündels mit

---

1) Die Gleichung einer beliebigen Kurve des die Kurven $\varphi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$ enthaltenden Netzes ist von der Form

$$\alpha\varphi+\beta\psi+\gamma\chi=0,$$

wo α, β, γ beliebige Parameter sind. Aus der Polarentheorie folgt dann, daß die *Jacobi*sche Kurve die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix}=0$$

hat, wo der Index i das Symbol $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bedeutet. Ganz ebenso bildet man die Gleichung der *Jacobi*schen Fläche (s. Aufg, 5) eines linearen Netzes von Flächen.

einer Ebene ist eine Kurve von der Ordnung $3(m-1)$. Dies folgt aus dem vorhergehenden Beispiel 3.

5. Der Ort der konischen Doppelpunkte eines ∞^3-fachen linearen Systems von Flächen m^{ter} Ordnung ist eine Fläche von der Ordnung $4(m-1)$; man nennt sie die *Jacobi*sche Fläche des Systems.

6. Der Ort der konischen Doppelpunkte der Flächen eines Bündels ist eine Raumkurve von der Ordnung $6(m-1)^2$. Der Beweis läßt sich auf eine mit der Beweisführung in 3. übereinstimmende Weise führen.

7. Wie viele n-Ecke kann man einem Kegelschnitte so einbeschreiben, daß die Seiten in bestimmter Ordnung durch n gegebene Punkte gehen? Daß es zwei Lösungen gibt, und daß die Aufgabe also durch Lineal und Zirkel lösbar ist, ergibt sich entweder dadurch, daß man die $n-1$ Scheitel des n-Ecks sich auf dem Kegelschnitte bewegen läßt und dann den Ort des letzten sucht (dessen Schnittpunkte mit dem gegebenen Kegelschnitt jedoch nicht alle eine Lösung ergeben werden), oder einfach dadurch, daß man einen der gegebenen Punkte auf den Kegelschnitt selbst verlegt. Vgl. übrigens im folgenden [45].

8. Suche die Ordnung und den Rang der Regelfläche, deren Erzeugende eine Gerade a und zwei einander in zwei Punkten schneidenden Kegelschnitte schneiden. Man kann die Aufgabe durch die Betrachtung des Schnittes einer durch a gehenden Ebene oder der Ebene eines der gegebenen Kegelschnitte lösen.

b) Aufgaben mit unendlich vielen Lösungen.

[36] Spezielle Aufgaben, die mehr Lösungen als die allgemeine haben. — Hat man von einer allgemeinen Aufgabe bewiesen, daß sie eine gewisse Anzahl, n, Lösungen hat, und lassen sich dann in einem Spezialfall $n+1$ oder mehrere Lösungen nachweisen, so muß sie in diesem Falle unendlich viele Lösungen haben. Die Gleichung, deren Grad n sein soll, muß dann nämlich identisch erfüllt sein, was übrigens oft darauf beruhen kann, daß sich in diesem Falle ein identisch null werdender Faktor aus der linken Seite ausscheidet [4]. Die Betrachtung desselben Falles als Grenzfall kann übrigens auch dann oft zur Bestimmung von n benutzt werden. Beispiele dafür finden sich im vorhergehenden: so ist auf der einen Seite jede Gerade nach der punktgeometrischen Auffassung eine Tangente einer abgeplatteten Kurve, da sie diese in zusammenfallenden Punkten schneidet; aber nur die Geraden, die durch die Scheitel der abgeplatteten Kurve gehen, sind als Tangenten zu betrachten, wenn man die abgeplattete Kurve als Grenzform nicht abgeplatteter Kurven betrachtet [29].

Die hier aufgestellte neue Methode werden wir zunächst anwenden,

um zu beweisen, daß gewisse Kurven n^{ter} Ordnung ganz oder teilweise mit einer Kurve r^{ter} Ordnung zusammenfallen, oder gewisse Flächen m^{ter} Ordnung eine solche ganz oder teilweise enthalten. Dazu genügt es ([11] und [16]) $nr + 1$ beziehungsweise $mr + 1$ gemeinschaftliche Punkte abzuzählen.

[37] Bestimmung einer ebenen Kurve durch Punkte; höchste Anzahl der Doppelpunkte einer nicht zusammengesetzten Kurve. — Die Anzahl der zur Bestimmung einer ebenen Kurve oder einer Fläche nötigen Punkte kann man durch Verlegung dieser Punkte finden. Dabei ist nur die Verlegung eines Punktes in eine solche Lage ausgeschlossen, in welcher er zur Bestimmung der Kurve (oder Fläche) nicht mehr verwendet werden kann; dies tritt ein, wenn alle Kurven (Flächen) der gesuchten Art, die durch die übrigen Punkte gehen, von selbst auch durch einen weiteren Punkt gehen; hier ist also die Gleichung, die die Bedingung ausdrückt, daß die Kurven (Flächen) durch diesen Punkt gehen, eine Folge der übrigen gegebenen Gleichungen.

Die n Schnittpunkte einer noch unbekannten ebenen Kurve n^{ter} Ordnung mit einer Gerade a können ganz willkürliche Punkte dieser Geraden sein; soll die Kurve noch durch einen $(n+1)^{\text{ten}}$ Punkt dieser Geraden gehen, so muß sie diese ganz enthalten, und wird aus dieser und einer noch ganz unbestimmten Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen. Wenn man also die Anzahl der zur Bestimmung einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung nötigen Punkte mit A_n bezeichnet, so wird

$$A_n = n + 1 + A_{n-1} = (n+1) + n + (n-1) \cdots + 2 = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$$
$$= \tfrac{1}{2} n(n+3).$$

Dieses Resultat kann man folgendermaßen benutzen, um zu beweisen, daß eine nicht zusammengesetzte, ebene Kurve n^{ter} Ordnung höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte haben kann. Gäbe es nämlich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ Doppelpunkte, so könnte man durch diese und $n-3$ andere Punkte der Kurve — also im ganzen durch $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Punkte — eine Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, die mit der gegebenen $2(\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1)+n-3 = n(n-2)+1$ Schnittpunkte haben würde. Dies ist nur dann möglich, wenn die gegebene Kurve die Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ganz oder teilweise enthält, also jedenfalls zusammengesetzt ist.

Fragen wir weiter, wie viele der nr Schnittpunkte einer im übrigen unbekannten Kurve n^{ter} Ordnung c_n mit einer gegebenen Kurve r^{ter} Ordnung k_r, wo $r \leqq n$ ist, willkürlich gegeben werden können und dann genügen, um die übrigen zu bestimmen. Nennen wir diese Anzahl x, so wird die Forderung, daß c_n durch alle Schnittpunkte der Kurve k_r mit irgendeiner Kurve n^{ter} Ordnung gehen soll, gleichbedeutend sein mit der anderen: sie soll durch x gegebene Punkte gehen. Soll die Kurve c_n noch durch einen von den nr Schnittpunkten verschiedenen

Punkt von k_r gehen, so muß sie, wenn k_r nicht zusammengesetzt ist, was wir vorläufig annehmen, aus k_r und einer noch ganz unbestimmten Kurve $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen. Zu ihrer vollständigen Bestimmung sind also noch $\frac{1}{2}(n-r)(n-r+3)$ Punkte nötig. Also ist

$$x + 1 + \tfrac{1}{2}(n-r)(n-r+3) = \tfrac{1}{2}n(n+3),$$

woraus sich ergibt

$$x = nr - \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2).$$

Dasselbe Resultat gilt auch, wenn die Kurve k_r zusammengesetzt ist, und kein Schnittpunkt ihrer Teile unter die gegebenen Punkte aufgenommen wird. Um dies zu beweisen, darf man voraussetzen, daß k_r aus den Teilen k_{r_1} und k_{r_2} besteht, daß k_{r_1} nicht zusammengesetzt ist, und daß der Satz für die Kurve k_{r_2}, die aus weniger, nicht zerfallenden Teilen als k_r bestehe, schon bewiesen ist. Durch Verlegung von $nr_1 - \frac{1}{2}(r_1-1)(r_1-2)+1$ Punkten der Kurve c_n auf die Kurve k_{r_1} erreicht man dann, daß c_n aus k_{r_1} und einer noch ganz unbestimmten Kurve von der Ordnung $n-r_1$ besteht. Unserer Voraussetzung gemäß kann man durch Verlegung von $(n-r_1)r_2 - \frac{1}{2}(r_2-1)(r_2-2)+1$ ihrer Punkte erreichen, daß diese Kurve die Kurve k_{r_2} enthält. Ganz wie in dem Falle, wo k_r nicht zusammengesetzt war, haben wir also, da $r = r_1 + r_2$ ist, durch Verlegung von

$$nr - \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) + 1$$

ihrer Punkte erreicht, daß c_n die ganze Kurve k_r enthält. Dabei haben wir jedoch vorausgesetzt, daß die beziehungsweise auf k_{r_1} und k_{r_2} fallenden Punkte unter sich verschieden sind, also nicht in die Schnittpunkte dieser Kurven fallen. Daher rührt die hervorgehobene Einschränkung des Satzes.

Der Satz kann auch so ausgedrückt werden, daß von den nr Schnittpunkten einer gegebenen Kurve r^{ter} Ordnung mit einer noch unbekannten Kurve n^{ter} Ordnung $(n \geqq r)$ $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ durch die übrigen bestimmt werden, wenn letztere so unter den nr Schnittpunkten gewählt werden, daß sie sich nicht gegenseitig bestimmen. Der Satz gilt übrigens auch für $n = r-1$ und $n = r-2$, da die Anzahl $\frac{1}{2}n(n+3)$ der c_n bestimmenden Punkte in diesen Fällen gleich $nr - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ ist.

Wenn die Kurven c_n durch einen Doppelpunkt der Kurve k_r gehen, so wird einer der durch die anderen bestimmten $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ Schnittpunkte auch mit diesem zusammenfallen. Gehen sie durch d Doppelpunkte, so bleiben nur noch $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)-d$ der durch die anderen bestimmten Schnittpunkte übrig. Man erhält dadurch einen neuen Beweis dafür, daß eine nicht zusammengesetzte Kurve r^{ter} Ordnung höchstens $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ Doppelpunkte haben kann.

Im Falle $n = r$ ersieht man, daß die Kurven n^{ter} Ordnung, die durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ unter sich unabhängige Punkte gehen, sich alle

in n^2 festen Punkten schneiden, also einen Büschel bilden werden. Allgemeiner läßt sich dasselbe von den Kurven n^{ter} Ordnung sagen, die ein System mit der ersten Charakteristik $\mu = 1$ (s. [17]) bilden; denn durch einen Schnittpunkt zweier Kurven des Systems gehen mehr als μ, also unendlich viele Kurven des Systems, d. h. alle, da ein System mit der Charakteristik $\mu = 1$ nicht zusammengesetzt sein kann.

[38] Mehrfache Punkte. Durch einen gewöhnlichen Punkt einer ebenen Kurve kann man nur eine Gerade ziehen, welche die Kurve in zwei in diesem Punkte zusammenfallenden Punkten schneidet. Wenn man also durch einen Punkt zwei solche Geraden ziehen kann, gibt es deren unendlich viele, und der Punkt ist ein Doppelpunkt. (Vgl. [4], wo wir bereits dieselbe Überlegung anwandten.) In einem solchen gibt es zwei Tangenten, welche die Kurve je in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Gibt es deren drei, so muß es unendlich viele geben, und der Punkt ist dreifach. Allgemein wird ein Punkt k-fach, wenn man durch ihn k Gerade ziehen kann, die die Kurve je in k Punkten schneiden. Daß ein gegebener Punkt der Ebene k-facher Punkt einer algebraischen Kurve sei, erhält man also durch das sukzessive Zusammenfallen von

$$1 + 2 + \cdots k = \frac{k(k+1)}{2}$$

der die Kurve bestimmenden Punkte.

Die Tangentialebene einer Fläche in einem gegebenen Punkt P schneidet sie in einer Kurve mit einem Doppelpunkt; sie wird durch P und noch zwei mit diesem Punkt zusammenfallende Punkte bestimmt. Sie enthält zwei dreipunktig berührende Geraden, die Haupttangenten. Wenn drei durch P gehende, nicht in derselben Ebene liegende Gerade die Fläche zweipunktig treffen, muß P ein Doppelpunkt sein mit einem Tangentenkegel zweiter Ordnung, deren Erzeugende die Fläche dreipunktig berühren; er selbst ist durch fünf Erzeugende bestimmt. P wird auf der Fläche dreifach sein, wenn noch eine nicht der Kegelfläche angehörige, durch P gehende Gerade sie in P dreipunktig schneidet. Durch Fortsetzung dieser Überlegung findet man, daß P ein k-facher Punkt der Fläche wird, wenn der Reihe nach

$$1 + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \cdots \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

der die Fläche bestimmenden Punkte zusammenfallen.

Eine beliebige, durch einen k-fachen Punkt P einer Fläche gelegte Ebene schneidet diese und ihren Tangentenkegel in einer Kurve mit einem k-fachen Punkte beziehungsweise in den k Tangenten dieser Kurve in diesem Punkte. Im ganzen schneiden letztere die Schnittkurve in $k(k+1)$ in P zusammenfallenden Punkten. Die Schnittkurve der Fläche und des Tangentenkegels hat also in P einen $k(k+1)$-fachen Punkt,

und ihre $k(k+1)$ Tangenten werden solche Erzeugende des Tangentenkegels sein, die die Fläche in $k+2$ zusammenfallenden Punkten schneiden.

[39] Bestimmung einer Fläche durch Punkte. Die Anzahl B_m der zur Bestimmung einer algebraischen Fläche m^{ter} Ordnung φ_m nötigen Punkte kann man durch Verlegung von $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ dieser Punkte in eine Ebene finden. Damit kann man nämlich erreichen, daß die Fläche durch eine durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ dieser Punkte bestimmte ebene Kurve m^{ter} Ordnung und noch durch einen weiteren Punkt derselben Ebene geht [37]. Sie muß dann diese Ebene ganz enthalten, und also aus dieser und einer Fläche m^{ter} Ordnung bestehen. So findet man, daß

$$B_m = \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) + B_{m-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) + \tfrac{1}{2}m(m+1) + \cdots \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3$$

ist, wo das letzte Glied die Anzahl der eine Ebene bestimmenden Punkte ist. Also wird

$$B_m = \tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3) - 1 .$$

Die durch $B_m - 1$ Punkte gehenden Flächen schneiden eine Ebene in einem System mit der ersten Charakteristik $\mu = 1$, oder in Kurven, die durch m^2 feste Punkte der Ebene gehen [37]. Die Flächen selbst schneiden sich also alle in einer festen Kurve von der Ordnung m^2. Sie bilden also einen Büschel. — Dasselbe gilt immer von einem System mit der Charakteristik $\mu = 1$.

Die durch $B_m - 2$ Punkte gehenden Flächen werden ein ∞^2-faches System bilden, in welchem alle die ∞^1 durch einen willkürlichen Punkt gehenden Flächen einen Büschel bilden. Von einem solchen System kann man beweisen, daß es ein Bündel ist, oder daß seine Flächen durch m^3 feste Punkte gehen. Diese können als die Schnittpunkte der festen Kurve eines dem System angehörigen Büschels mit einer dem Büschel nicht angehörigen Fläche des Systems bestimmt werden. Durch einen solchen Punkt gehen, außer den Flächen eines Büschels, noch eine, also ∞^2 Flächen des Systems, oder da dieses bei willkürlicher Lage der gegebenen Punkte unteilbar ist, alle Flächen des Systems.

Ganz ebenso sieht man ein, daß ein allgemeines Systen von ∞^2 Flächen, die durch die neuen Bedingungen, durch zwei gegebene Punkte zu gehen, vollständig bestimmt werden, ein Bündel ist, und daß die Flächen eines ∞^1-fachen Systems mit der Charakteristik $\mu = 2$ einem Bündel angehören, wenn sie nicht zwei Büschel bilden.

Um B_m zu bestimmen, könnte man übrigens auch das in [38] gefundene Resultat benutzen. Durch eine geeignete Verlegung von $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ der gegebenen Punkte der Fläche φ_m in einen bestimmten Punkt bewirkt man nämlich, daß dieser ein m-facher Punkt der Fläche, die Fläche also ein Kegel wird; ihre völlige Bestimmung erfordert noch $\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - 1$ gegebene Punkte.

[40] Bestimmung einer Kurve auf einer Fläche. In gewissen Fällen läßt sich die in [37] benutzte Methode anwenden, um die Anzahl der Punkte zu finden, die nötig sind, um eine auf einer gegebenen Fläche m^{ter} Ordnung φ_m liegende Kurve c_n zu bestimmen, nämlich dann, wenn diese gesuchte Anzahl $\geqq n+1$ ist. Legen wir in diesem Fall $n+1$ der Punkte auf einen ebenen Schnitt von φ_m, der nur nicht selbst eine zusammengesetzte Kurve ist, so muß dieser ein Teil von c_n sein, und der übrige Teil wird eine Kurve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung sein. Bleiben noch wenigstens $n-m+1$ bestimmende Punkte übrig, so kann man auf dieselbe Weise fortfahren; jedenfalls hat man eine Reduktion erreicht. Der Versuch, diese Methode anzuwenden, wird alle Kurven liefern, die die gefundenen Bedingungen erfüllen; möglicherweise kann es aber, wie wir sehen werden, noch andere Kurvengattungen derselben Ordnung geben, die sich durch weniger Punkte bestimmen lassen.

Suchen wir z. B. die Kurven c_4 auf einer Fläche φ_2, so werden wir fünf der sie bestimmenden Punkte in eine Ebene legen. Dann wird die dadurch bestimmte spezielle Kurve c_4 aus einem Kegelschnitt und einer anderen Kurve zweiter Ordnung bestehen. Sind für die Bestimmung dieser Kurve noch drei der bestimmenden Punkte übrig, so muß auch sie ein Kegelschnitt sein. Wir erhalten so auf der Fläche φ_2:

1. Eine Kurvengattung c_4, deren einzelne Kurven durch 8 Punkte bestimmt sind, und die als Spezialfall die Kurven umfaßt, die aus zwei sich in zwei Punkten schneidenden Kegelschnitten gebildet werden.

Eine auf φ_2 liegende Kurve zweiter Ordnung kann aber auch aus zwei derselben Regelschar der Fläche angehörigen Erzeugenden bestehen. (Zwei den beiden Regelscharen angehörende Erzeugende würden einen ausgearteten Kegelschnitt bilden; dieser Fall ist also in dem schon behandelten inbegriffen.) Jede der Geraden einer bestimmten Regelschar ist durch einen Punkt bestimmt. Man erhält also auf φ_2 noch:

2. Zwei Kurvenscharen, deren einzelne Kurven durch sieben Punkte bestimmt sind, und die durch Verlegung von fünf dieser Punkte in eine Ebene in einen Kegelschnitt und zwei der einen beziesungsweise der anderen ihrer Regelscharen angehörende Erzeugende zerfällt.

Durch weniger als fünf, nämlich nur durch 4 Punkte, läßt sich auf der Fläche φ_2 noch eine Gattung von Kurven vierter Ordnung bestimmen, nämlich eine solche, deren Kurven je aus vier Erzeugenden derselben Schar bestehen.

Abgesehen von letzteren zusammengesetzten Kurven sind wir also auf die schon in [7] genannten Raumkurven vierter Ordnung gekommen, die mit den Bezeichnungen in [22] beziehungsweise durch $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ und $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ charakterisiert sind. Wir sehen, daß sie sich auf einer vorgegebenen Fläche zweiter Ordnung beziehungsweise durch 8 oder 7 Punkte bestimmen lassen.

Wir können auch die Anzahl der Punkte finden, die nötig sind, um

eine durch willkürliche Werte von α_1 und α_2 charakterisierte Kurve auf einer Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen. Zu diesen Kurven, die die geraden Erzeugenden der einen Schar je in α_1 Punkten und die Erzeugenden der anderen Schar je in α_2 Punkten schneiden, gehört auch eine solche, die aus α_2 Erzeugenden der ersten Schar und α_1 der anderen besteht. Um eine solche zu bekommen, kann man $\alpha_1 + 1$ gegebene Punkte je auf α_2 Erzeugende der ersten Schar legen. Diese werden Teile der Kurve sein, die dann im übrigen aus α_1 Erzeugenden der zweiten Schar bestehen muß. Diese werden durch je einen Punkt bestimmt. Die vollständige Bestimmung wird also $\alpha_2(\alpha_1 + 1) + \alpha_1$ oder $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2$ gegebene Punkte erfordern, ein Resultat, das die eben auf andere Weise bewiesenen Ergebnisse über Raumkurven vierter Ordnung einbegreift.

[41] Regelflächen. Daß eine Fläche zweiter Ordnung zwei Scharen von geraden Erzeugenden enthält, könnte durch die Bemerkung dargetan werden, daß die beiden Haupttangenten in einem Punkt der Fläche diese in drei, also in unendlich vielen Punkten schneiden.

Eine Fläche dritter Ordnung mit einer Doppelgeraden g muß eine Regelfläche sein; denn durch jeden Punkt der Fläche kann man in der Tangentialebene eine Gerade ziehen, die g schneidet und also ganz auf der Fläche liegen muß.[1]) Umgekehrt hat jede Regelfläche dritter Ordnung eine Doppelgerade. Eine durch eine Erzeugende l gelegte Ebene wird nämlich die Fläche in l und in einem Kegelschnitt schneiden. Der eine Schnittpunkt ist Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche (Grenzlage des Schnittpunktes der Ebene mit einer konsekutiven Erzeugenden). Der andere P muß Doppelpunkt der Fläche sein und bewegt sich mit l. Sein Ort, der eine beliebige, durch l gehende Ebene nur in P schneidet, muß eine Gerade sein.

Eine Fläche vierter Ordnung, die entweder zwei Doppelgerade, die sich nicht schneiden, oder eine Doppelkurve dritter Ordnung besitzt, muß eine Regelfläche sein. Man kann nämlich durch jeden ihrer Punkte eine Gerade ziehen, die die Doppelkurve zweimal trifft und also fünf Punkte der Fläche enthält, daher ganz auf der Fläche liegen muß.

Die Existenz der ersten dieser Flächengattungen ist evident, da sie, wenn man als Doppelgerade zwei gegenüberliegende Kanten eines Koordinatentetraeders $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, $u = 0$ nimmt, durch eine Gleichung zweiten Grades je in $\frac{x}{y}$ und $\frac{z}{u}$ dargestellt wird. Da jede durch eine Erzeugende gehende Ebene die Fläche noch in einer Kurve dritter Ordnung schneidet, läßt sich die Fläche übrigens auch durch die Strahlen, die eine ebene Kurve dritter Ordnung und zwei diese schneidende Gerade treffen, erzeugen. Um auch die Existenz

1) Der Satz folgt übrigens auch daraus, daß eine Ebene durch die Doppelgerade die Fläche noch in einer weiteren Geraden schneidet.

der zweiten Gattung zu sichern, bemerken wir erstens, daß eine Ebene, die durch die zwei von demselben Punkte der Doppelkurve ausgehenden Erzeugenden gelegt wird, die Fläche noch in einem die Doppelkurve zweimal schneidenden Kegelschnitt schneiden wird. Umgekehrt wird eine Gerade, die sowohl eine Raumkurve dritter Ordnung r_3 zweimal, als auch einen diese zweimal schneidenden Kegelschnitt einmal schneidet, eine Fläche vierter Ordnung mit r_3 als Doppelkurve erzeugen. Man ersieht dies z. B. daraus, daß eine Bisekante von r_3 die erzeugte Fläche zweimal in jedem ihrer beiden Schnittpunkte mit r_3 und sonst in keinem Punkte schneidet.

[42] Strahlenkomplexe und Strahlenkongruenzen erster Ordnung und Klasse. Ähnliche Anwendungen kann man auf Strahlenkomplexe und -kongruenzen machen [8]. Wir betrachten zuerst jene, die erster Ordnung und Klasse sind. Für Komplexe erster Ordnung sieht man unmittelbar, daß die zu ihnen gehörigen Strahlen, die eine gegebene Gerade schneiden, alle eine bestimmte, mit dieser verbundene Gerade schneiden müssen. —

Für Kongruenzen erster Ordnung und erster Klasse findet man einen einfachen Beweis eines Satzes, der sich in [31] als Spezialfall eines allgemeinen Satzes darbot. Aus den ersten Ausführungen in [31] wissen wir, daß es in der Kongruenz zwei Strahlen gibt, die zwei gegebene Gerade a und b schneiden. Hat man aber a und b schon so bestimmt, daß sie drei Strahlen l, m, n der Kongruenz schneiden, so müssen sie unendlich viele Strahlen der Kongruenz schneiden. Da man hier a und b durch irgendwelche Gerade, die l, m und n schneiden, ersetzen kann, so werden alle Gerade, welche derselben Regelschar zweiter Ordnung wie l, m, n angehören, auch der Kongruenz angehören. Man kann aber a und b so bestimmen, daß sie vier nicht derselben Regelschar zweiter Ordnung angehörende Strahlen der Kongruenz l, m, n, p schneiden. Dann gehen durch einen Punkt P von a zwei Strahlen der Kongruenz, welche beide in der Ebene Pb liegen, nämlich die der Regelschar l, m, n und die der Regelschar l, m, p angehörenden. Also muß jede Gerade des dadurch bestimmten Büschels der Kongruenz angehören, folglich jede Gerade, die sowohl a als auch b schneidet. Da die durch diese Bedingung bestimmten Geraden selbst eine Kongruenz erster Ordnung und Klasse bilden, so muß diese mit der gegebenen identisch sein. Also: die Strahlen einer Kongruenz erster Ordnung und Klasse schneiden zwei feste Geraden. Aus ihrer Bestimmung geht hervor, daß sie imaginär sein oder zusammenfallen können.

Man ersieht auch, daß, wie drei beliebige Gerade Erzeugende einer durch sie bestimmten Fläche zweiter Ordnung sind, so eine Kongruenz erster Ordnung und erster Klasse durch vier ihrer Strahlen bestimmt

wird. Daraus kann man folgern, daß ein Komplex erster Ordnung durch fünf seiner Strahlen bestimmt wird.

[43] Doppelstrahlen einer Kongruenz. In [3] haben wir gesehen, daß es unter den Ebenen, die durch einen Strahl a einer Kongruenz gehen, zwei, μ und μ', gibt, in denen noch ein Strahl mit a zusammenfällt, und daß diese unendlich nahen Strahlen a in zwei den Ebenen μ und μ' entsprechenden Punkten M und M', schneiden. Sowohl die Ebenen μ und μ', als auch die Punkte M und M' werden durch Gleichungen zweiten Grades bestimmt, und wegen des gegenseitigen Entsprechens der Wurzeln der Gleichungen muß die eine von der anderen linear abhängen. Nun kann für einen besonderen Strahl a die eine Gleichung, z. B. die, die μ und μ' bestimmt, identisch werden. Dies muß eintreffen, wenn drei durch a gehende Ebenen je noch einen mit a zusammenfallenden Strahl enthalten: dann muß also dasselbe bei allen durch a gehenden Ebenen der Fall sein. Wegen des Zusammenhangs der Gleichungen kann es geschehen, daß dann auch die Gleichung, die M und M' bestimmt, identisch wird, und also durch jeden Punkt des Strahles a ein anderer mit a zusammenfallender Strahl geht. Die Identität der μ und μ' bestimmenden Gleichung kann aber auch eine Folge des Nullwerdens eines Faktors sein, der nicht zugleich Faktor der entsprechenden, M und M' bestimmenden Gleichung wird. Dann werden M und M' nicht unbestimmt: sie müssen aber dann zusammenfallen; denn das Entsprechen eines Punktes M, nicht aber das Entsprechen zweier Punkte M und M' mit allen durch μ gehenden Ebenen ist ein wirklicher Grenzfall des (1, 1)-deutigen Entsprechens der Ebenen und Punkte. Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn man von der Identität der Mund M' bestimmenden Gleichung ausgeht.

Wir kommen dadurch auf die folgenden Gattungen von Doppelstrahlen einer Kongruenz:

1. Eigentliche Doppelstrahlen, die dadurch charakterisiert werden, daß sowohl durch jeden ihrer Punkte noch ein weiterer mit ihnen zusammenfallender Strahl geht, als auch in jeder durch sie gehenden Ebene ein mit ihnen zusammenfallender Strahl liegt. (Durch einen Punkt des Doppelstrahls gehen also $n-2$ von ihm verschiedene Strahlen, und in einer durch den Doppelstrahl gehenden Ebene liegen $n'-2$ andere Strahlen der Kongruenz.)

2. Punktdoppelte Strahlen, die dadurch charakterisiert werden, daß durch jeden ihrer Punkte noch ein weiterer mit ihnen zusammenfallender Strahl der Kongruenz geht, und daß alle die so bestimmten konsekutiven Strahlen in *einer* Ebene liegen.

3. Ebenendoppelte Strahlen, die dadurch charakterisiert werden, daß in jeder durch sie gehenden Ebene ein mit dem Strahle zusammenfallender Strahl der Kongruenz liegt, und daß diese alle durch *einen* Punkt gehen.

Beispiele von Doppelstrahlen bietet die aus den Normalen einer algebraischen Fläche gebildete Kongruenz dar. Eine Gerade, die in zwei Punkten der Fläche normal ist, wird ein eigentlicher Doppelstrahl und die Normale in einem Kugelpunkt ein ebenendoppelter Strahl sein. Dies bemerken wir jedoch hier nur, um eine Vorstellung von den genannten Singularitäten zu geben; denn die aus den Normalen gebildete Kongruenz hat noch andere, mit dem unendlich fernen Kugelkreis zusammenhängende Doppelstrahlen als die hier genannten.

Übrigens gehört keine der hier genannten Arten von Doppelstrahlen zu den Singularitäten einer Kongruenz, die man als allgemein oder notwendig bezeichnen kann, sondern ihr Vorkommen ist eine, durch eine Gleichung ausdrückbare Bedingung. Wir denken uns dabei die Kongruenz als zu einer gewissen, durch gegebene Anzahlen wie Ordnung n, Klasse n' und vielleicht Rang [8] charakterisierten Gattung[1]) gehörig; näher bestimmt wird sie dann durch die Forderung, daß sie gegebene Strahlen oder Strahlen gegebener Büschel enthalten soll, was beziehungsweise doppelte oder einfache Bedingungen ergibt. Soll nun eine gegebene Gerade a ein eigentlicher Doppelstrahl einer Kongruenz sein, so muß sie erstens der Kongruenz angehören, was eine doppelte Bedingung ist. Sodann müssen drei durch a gehende Ebenen Strahlen enthalten, die mit a zusammenfallen, was drei einzelne Bedingungen gibt, im ganzen hat man also deren fünf. Würde diese Forderung nur zwei durch a gehenden Ebenen auferlegt, aber gleichzeitig verlangt, daß die in diesen beiden Ebenen enthaltenen, dem Strahle a unendlich benachbarten Strahlen a in demselben Punkt treffen, so würde man damit, also im ganzen wieder durch fünf Bedingungen, bewirken, daß a ein ebenendoppelter Strahl wird. Durch die dualistisch entsprechenden Bedingungen bewirkt man, daß a punktdoppelter Strahl wird. Da nun die Bestimmung einer ganz willkürlichen Geraden im Raum von vier Parametern (Koordinaten) abhängt, so bleibt nach der Elimination dieser Parameter aus den Gleichungen, die ausdrücken, daß eine solche Doppelstrahl einer dieser drei Arten ist, noch eine Gleichung übrig, die also ausdrücken muß, daß die Kongruenz überhaupt einen solchen Doppelstrahl hat. Eine zusammenhängende Schar von unendlich vielen Doppelstrahlen würde mehrere Bedingungen erfordern. Es ist selbstverständlich, daß ein eigentlicher Doppelstrahl als „Schnitt" zweier verschiedener Gebiete der Kon-

---

1) Was für Raumkurven gilt, wird natürlich auch hier gelten, daß nämlich diese Charakterisierung nicht eindeutig ist, sondern, daß dieselben Anzahlen unter sich ganz verschiedenen Gattungen angehören können. Man kann natürlich eine Gattung durch so viele oder so kleine Anzahlen und durch andere Einschränkungen definieren, daß die Bedingungsgleichung identisch erfüllt wird und also alle der betreffenden Gattung angehörenden Kongruenzen Doppelstrahlen bekommen, die dann als notwendig zu bezeichnen sind. (Vgl. die diesem Art. beigefügte Anmerkung).



gruenz auftreten kann und dann im allgemeinen vierfache Tangente der Brennfläche der Kongruenz [31] sein wird. Dies wird z. B. in der Kongruenz der Normalen einer Fläche bei denjenigen Strahlen der Fall sein, die zweimal auf der Fläche normal sind. Zwei der Berührungspunkte können auch so zusammenfallen, daß der Doppelstrahl nur dreifache Tangente der Brennfläche wird. Unter Umständen werden die dreifachen Tangenten dieser Fläche auch dreifache Strahlen der Kongruenz. Auch können zwei nicht zusammengehörige Fokalpunkte in einem konischen Doppelpunkt der Brennfläche zusammenfallen; der Doppelstrahl kann auch zwei derartige Punkte miteinander verbinden. In [44] werden wir übrigens sehen, daß die Doppelstrahlen der Kongruenz auch Doppelgerade der Brennfläche sein können. Durch diese Eigenschaft unterscheiden sich diese Doppelstrahlen derart von den anderen, daß wir künftig Doppelstrahlen, die Doppelgerade der Brennfläche sind, eigentliche Doppelstrahlen zweiter Art nennen werden; die übrigen, die nicht auf der Brennfläche liegen[1]), nennen wir eigentliche Doppelstrahlen erster Art.

Anmerkung. Wir gehen auf die Frage über die größere oder kleinere Allgemeinheit der durch ihre verschiedenen Beziehungen zur Brennfläche charakterisierten Doppelstrahlen nicht näher ein. Daß wir aber überhaupt das Auftreten eines Doppelstrahls in einer durch Anzahlen charakterisierten Gattung von Kongruenzen als nicht allgemein bezeichnet haben, scheint mit ihrem Vorkommen in Kongruenzen zweiter Ordnung nicht übereinzustimmen; *Kummer*[2]) hat nämlich gefunden, daß eine Kongruenz von der Ordnung $n = 2$ und der Klasse n' ohne Brennkurve $\frac{1}{2}(n'-2)(n'-3)$ Doppelstrahlen hat, und *R. Sturm,* der den Satz *Kummers* in Nr. 316 seiner Liniengeometrie[3]) beweist, nennt in Nr. 311 die Strahlenkongruenzen ohne Brennkurve (singuläre Linien) die allgemeinsten, was auch für hinreichend hohe Werte von n richtig sein würde. Um diese scheinbare Unstimmigkeit zu erklären, können wir aber sogleich bemerken, daß die Beifügung „ohne Brennkurve" wenigstens für $n = 2$ als eine solche Einschränkung der von uns als „allgemein" betrachteten Kongruenzen betrachtet werden kann, die das Auftreten von Doppelstrahlen mit sich bringt. Dies ist am leichtesten zu erkennen, wenn wir uns an *Sturms* Beweis des *Kummer*schen Satzes halten, da auch dieser Beweis auf abzählende Methoden gegründet ist, teilweise freilich auf solche, mit denen wir uns erst später beschäftigen werden, auf deren Resultate wir aber schon hier hinweisen können.

Wir benutzen dabei außer der Ordnung n und der Klasse n' einer Kongruenz auch die Anzahl der Strahlenpaare der Kongruenz, die mit einer beliebig gegebenen Geraden zu einem Strahlenbüschel gehören. Diese Anzahl, die man den Rang der Kongruenz nennt, bezeichnen wir mit r [8]. Der Ort der Schnittpunkte solcher Strahlen der Kongruenz, welche in Ebenen liegen, die durch eine Gerade a gehen, ist dann eine Kurve (a) von der Ordnung

---

1) Solche, die einfache Linien der Brennfläche sind, gibt es kaum. Wir beanspruchen hier jedoch nicht, eine vollständige Übersicht über alle Arten von Doppelstrahlen zu geben (vgl. [48] 6.).

2) Abhandlungen der Berliner Akademie für 1866.

3) Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung II, Leipzig 1893.

$\frac{1}{2} n' (n' - 1) + r$, weil er eine durch a gehende Ebene in $\frac{1}{2} n' (n' - 1)$ Punkten außerhalb von a und in r auf a liegenden Punkten schneidet. Der Ort der Schnittpunkte solcher Strahlen der Kongruenz, die in Ebenen liegen, die durch einen Punkt B gehen, ist eine Fläche (B) von der Ordnung $r + \frac{1}{2} n(n-1)$, weil er eine Gerade durch B in r Punkten außerhalb von B und in $\frac{1}{2} n(n-1)$ in B liegenden Punkten schneidet. Die dem Punkt B entsprechende Fläche (B) und die einem anderen Punkt C in ähnlicher Weise entsprechende Fläche (C) schneiden sich in einer Kurve von der Ordnung $(r + \frac{1}{2} n(n-1))^2$. Ein Teil dieser Kurve ist die der Geraden BC entsprechende, bereits gefundene Kurve von der Ordnung $\frac{1}{2} n' (n' - 1) + r$. Übrig bleibt eine Restkurve von der Ordnung

$$(r + \tfrac{1}{2} n (n-1))^2 - \tfrac{1}{2} n' (n' - 1) - r,$$

die übrigens für hinreichend große Werte von n aus zwei Kurven bestehen muß: die eine ist der Ort der Punkte P, die so beschaffen sind, daß die Ebene, die zwei durch P gehende Strahlen verbindet, durch B, diejenige, die zwei andere verbindet, durch C geht; die andere der Ort der Punkte P, die so beschaffen sind, daß die Ebenen, die einen durch P gehenden Strahl mit zwei anderen verbinden, beziehungsweise durch B nnd C gehen. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß durch P wenigstens vier, beziehungsweise drei Strahlen gehen. Wenn die Kongruenz eigentliche Doppelstrahlen erster Art hat, wird die gefundene Summe der Ordnungen dieser Örter um die Anzahl solcher Doppelstrahlen vermindert. Es geht nämlich aus unserer Herleitung der Gleichungen zwischen r und der Ordnung und der Klasse der Brennfläche in [104] hervor, daß zwar die eigentlichen Doppelstrahlen erster Art, aber weder die eigentlichen Doppelstrahlen zweiter Art noch die punktdoppelten und die ebenendoppelten Strahlen auf den Flächen (B) und (C) liegen.

R. Sturm wendet jedoch diese Beweisführung nur auf den Fall $n = 2$ an. Dann ist, wie wir in [104] beweisen werden, $r = n' - 2$. Die Ordnung der gefundenen Restkurve mit Ausnahme der eigentlichen Doppelstrahlen erster Art, deren Anzahl wir mit d_1 bezeichnen, wird dann

$$\tfrac{1}{2} (n' - 2)(n' - 3) - d_1 .$$

Ist diese Ordnung von 0 verschieden, so existiert die Kurve, durch deren Punkte drei oder vier, und also, da die Ordnung der Kongruenz nur 2 ist, unendlich viele ihrer Strahlen gehen. Diese Eigenschaft ist eben für eine Brennkurve charakteristisch, und die Kongruenz besitzt also eine solche. Setzt man aber mit *Kummer* und *Sturm* voraus, daß die Kongruenz keine Brennkurve hat, so muß die gefundene Ordnung 0 sein; daraus folgt

$$d_1 = \tfrac{1}{2} (n' - 2)(n' - 3).$$

Da die Ordnung der Brennfläche nur vier ist [31], können die d_1 Doppelstrahlen, die eben nicht auf der Brennfläche liegen, da sie erster Art sind, diese nur in zwei Punkten berühren. Von diesen muß dann wenigstens der eine ein konischer Doppelpunkt sein.

Die verschiedenen Kongruenzen von der Ordnung zwei, nämlich 1. die ohne Brennkurve aber mit Doppelstrahlen erster Art, 2. die ohne Doppelstrahlen erster Art aber mit Brennkurven oder endlich 3. die mit beiden Singularitäten bilden also verschiedene Gattungen, von welchen die eine nicht als Spezialfall der anderen betrachtet werden kann. Es hat sich aber hier gezeigt, daß allein die niedere Ordnung zwei einer Kongruenz notwendig die eine oder die andere der genannten Singularitäten, die für Kongruenzen höherer Ordnung Bedingungsgleichungen erfordern würden, bedingt. Die Möglichkeit dieses Sachverhalts haben wir auch in der Note S. 71 berücksichtigt.



[44] *Hirst*sche Kongruenz. Ein Beispiel für das Vorkommen von Doppelstrahlen zweiter Art bietet die *Hirst*sche Kongruenz dar. Diese wird uns auch Gelegenheit geben, die hier behandelte Form der Methode der Erhaltung der Anzahl durch neue Beispiele zu beleuchten.

Um eine *Hirst*sche Kongruenz zu erhalten, nehmen wir für eine Fläche zweiter Ordnung φ_2 eine projektive Anordnung der Erzeugenden der einen Schar (l) und eine ähnliche der anderen Schar (m) an, so daß

$$(1) \qquad (l) \overline{\wedge} (l'), \quad (m) \overline{\wedge} (m'),$$

und verbinden sodann den Schnittpunkt P der Erzeugenden l und m mit dem Schnittpunkt P' der Erzeugenden l' und m'. Jedem Punkte P entspricht ein Punkt P' und umgekehrt, und da ein Punkt der Fläche φ sowohl ein Punkt P als auch ein Punkt P' ist, so werden durch ihn und somit durch alle Punkte des Raumes zwei Strahlen PP' gehen. Die Ordnung n der aus den Strahlen PP' erzeugten Kongruenz ist also zwei (wenn nur nicht beide Projektivitäten (1) Involutionen sind).

Da die Gerade PP' auch als Schnittlinie der Ebenen lm' und $l'm$ bestimmt werden kann, und diese Bestimmung der ersten dualistisch entspricht, so muß die Kongruenz auch von der Klasse zwei sein. Ihre Erzeugung zeigt, daß sowohl die Strahlen a und b, die die projektiven Strahlenscharen l und l', als auch die Strahlen c und d, die die Scharen m und m' entsprechend gemein haben, eigentliche Doppelstrahlen[1]) sein müssen. Wir sehen weiter, daß die Tangenten an die Fläche φ_2 in den vier Punkten ac, ad, bc, bd alle der Kongruenz angehören. Man könnte dies daraus schließen, daß z. B. sowohl a als auch c zweimal als ein durch (ac) gehender Strahl zu zählen ist. Da die Ordnung der Kongruenz nur zwei ist, so muß es also unendlich viele solche Strahlen geben. Daß diese alle dem Büschel der Tangenten angehören, schließt man daraus, daß jede andere durch (ab) gehende Gerade φ_2 in einem Punkt trifft, der nicht (ab) entspricht.

Nennen wir die Schnittpunkte des Strahles PP' mit einer anderen Fläche ψ_2 des durch die zwei Paare von Erzeugenden a und b, c und d gehenden Büschels P_1 und P_1', so wird P_1 (und ebenso P_1') eine Erzeugende m_1 (m_1') der Fläche ψ_2 durchlaufen, wenn P und P' je Erzeugende m und m' der Fläche φ_2 durchlaufen. In diesem Fall werden nämlich die Geraden PP' eine Fläche zweiter Ordnung erzeugen, und da diese die Erzeugenden a und b der Fläche ψ_2 enthält, so wird sie diese noch in zwei Erzeugenden m_1 und m_1' der anderen Schar schneiden. Außerdem ist in diesem Fall

$$(P_1) \overline{\wedge} (P_1') \overline{\wedge} (P) \overline{\wedge} (P'),$$

---

1) Daß diese nicht erster Art sein können, geht schon aus unserer Bestimmung der Anzahl d_1 der Doppelstrahlen erster Art einer Kongruenz zweiter Ordnung hervor ([43] Anm.); d_1 wird nämlich hier 0, weil auch $n' = 2$ ist.

und also auch, wenn man mit l_1 und l_1' die durch P_1 und P_1' gehenden Erzeugenden von ψ_2, die derselben Schar wie a und b angehören, bezeichnet,

(2) $$(a, b, l_1) \barwedge (a, b, l_1') \barwedge (a, b, l) \barwedge (a, b, l')\,.$$

Durch Vertauschung der beiden Scharen von Erzeugenden der Flächen findet man ebenso

(3) $$(c, d, m_1) \barwedge (c, d, m_1) \barwedge (c, d, m) \barwedge (c, d, m')\,.$$

Dadurch wird ein (1, 1)-deutiges Entsprechen von je zwei der die Flächen φ_2 und ψ_2 durchlaufenden Punkte P_1, P_1', P, P' ausgedrückt; und das Entsprechen wird vollständig bestimmt, wenn man außer den Geraden a, b, c, d den einem gegebenen Punkt P entsprechenden Punkt P' der durch P bestimmten Fläche φ_2 des Büschels oder den Punkt P_1 einer anderen Fläche ψ_2 des Büschels kennt.

Sei nun außer den Doppelstrahlen a, b, c, d ein beliebiger Strahl gegeben, der φ_2 in P und P', ψ_2 in P_1 und P_1' schneidet, so kann man dem Punkt P entweder P_1 oder P_1' entsprechen lassen. Dadurch werden also zwei Kongruenzen bestimmt. Diejenige, die P_1 dem Punkt P zuordnet, muß P_1' dem Punkt P' zuordnen. Durch Benutzung der Schnittpunkte P und P' mit einer einzigen Fläche erhält man im allgemeinen die zwei verschiedenen Kongruenzen ebenfalls, da es zwei verschiedene Korrespondenzen sind, die dem Punkte P den Punkt P', beziehungsweise dem Punkte P' den Punkt P zuordnen. Der Fall, in welchem die Korrespondenzen involutorisch sind, und also diese Verschiedenheit wegfällt, ist ein Grenzfall, auf den wir hier nicht näher eingehen.

Der Umstand, daß die Klasse der Kongruenz zwei ist, lehrt uns, daß, wenn der Punkt P eines Strahls der Kongruenz auf der Fläche φ_2 des Büschels einen ebenen Kegelschnitt durchläuft, sowohl der andere Schnittpunkt P' des Strahls mit φ_2 als auch seine Schnittpunkte P_1 und P_1' mit einer anderen Fläche ψ_2 des Büschels ebene Kegelschnitte durchlaufen werden. Ihre Örter werden nämlich die Ebene des gegebenen Kegelschnitts je in zwei Punkten schneiden.

Was hier gesagt ist, wird auch auf den Fall anwendbar, in welchem die Fläche $\varphi_2\,(\psi_2)$ aus den zwei Ebenen ac und bd (oder ad und bc) besteht.

Da die Kongruenzen von der zweiten Ordnung und zweiten Klasse sind, wissen wir schon [31], daß ihre Brennfläche von der vierten Ordnung und Klasse ist. Die durch einen Punkt einer der vier Doppelstrahlen a, b, c, d gehenden Strahlen, fallen, wie schon bemerkt, mit dem Doppelstrahl selbst zusammen. Die Konstruktion der durch einen Punkt P einer Fläche φ_2 des Büschels gehenden zwei Strahlen zeigt, daß diese sonst nicht zusammenfallen. Die Brennfläche kann also φ_2 nur in a, b, c, d schneiden, und da die Schnittkurve von der achten Ordnung sein soll, so muß jede dieser Geraden in der Schnittkurve für zwei gezählt wer-

den. Da dies von allen Flächen des Büchels gelten soll, so müssen die vier Doppelstrahlen Doppelgerade der Brennfläche sein. Sie sind also eigentliche Doppelstrahlen zweiter Art. Läßt man nun eine Fläche χ_2 des Büschels durch einen nicht auf den Doppelstrahlen liegenden Punkt M der Brennfläche gehen, so muß diese Fläche, die schon eine auf der Brennfläche liegende zusammengesetzte Kurve achter Ordnung enthält, ein Teil der Brennfläche sein. Die Brennfläche besteht also aus zwei Flächen χ_2 und ω_2 des durch die vier Doppelstrahlen gehenden Büschels. Diese berühren alle Strahlen der Kongruenz.

Umgekehrt bilden offenbar die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Flächen zweiter Ordnung χ_2 und ω_2 im allgemeinen eine Kongruenz von der Ordnung vier und der Klasse vier. Diese wird sich in zwei *Hirst*sche Kongruenzen teilen, wenn, wie hier vorausgesetzt, die Flächen durch ein windschiefes Viereck gehen (sich in vier Punkten berühren). Die Seiten dieses Vierecks sind nämlich Doppelstrahlen zweier *Hirst*schen Kongruenzen, die außerdem einen willkürlichen Strahl p enthalten; wenn p die Flächen χ_2 und ω_2 berührt, so muß die Brennfläche beider Kongruenzen aus diesen Flächen bestehen; denn ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung enthält nur zwei Flächen, die eine gegebene Gerade berühren.[1])

Da die hier gefundenen Flächen dem durch die Doppelstrahlen bestimmten Büschel angehören, so werden dieselben Strahlen, die die anderen Flächen in Punkten von zusammengehörigen Erzeugenden schneiden, diese in Punkten entsprechender Erzeugenden berühren. Bezeichnen wir durch m eine der Schar cd angehörende Erzeugende der Fläche χ_2, und durch m_1 die entsprechende Erzeugende der Fläche ω_2, und mit G und G_1 die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Doppelstrahl a, so sehen wir, daß, wenn sich ein Punkt P auf der Fläche χ_2 dem Punkt G nähert, die Grenzlage der Ebene der von P ausgehenden zusammenfallenden Strahlen die Tangentialebene an ω_2 in G_1 sein wird. Zwischen den Punkten G der Fläche χ_2 und G_1 der Fläche ω_2 und den Tangentialebenen dieser Flächen in den genannten Punkten besteht also die für zusammengehörige Fokalpunkte und Fokalebenen charakteristische Verbindung. Der Punkt G_1 wird, wenn man ihn als Punkt von ω_2 betrachtet, auf dieselbe Weise mit einem anderen Punkt des Doppelstrahls a verbunden sein.

Dieselben Verhältnisse werden im allgemeinen für einen Doppelstrahl zweiter Art eintreten, nur daß χ_2 und ω_2 dann gewöhnlich durch verschiedene Mäntel derselben Brennfläche ersetzt werden. Dagegen fin-

1) Daß es nur zwei solche Flächen gibt, folgt aus der Involution der Schnittpunkte der Geraden p mit den Flächen des Büschels. Es ergibt sich auch mittels des Korrespondenzprinzips (Kap. IV).

det ähnliches für Doppelstrahlen erster Art, die als Schnitte verschiedener Gebiete einer Kongruenz auftreten, nicht statt. Daraus erklärt sich der wesentliche Unterschied zwischen den zwei Arten von Doppelstrahlen, der auch in unseren späteren abzählenden Formeln hervortreten wird [150].

[45] Schließungssätze. Die vorliegende Art und Weise, die Methode der Erhaltung der Anzahl anzuwenden, gibt die einfachsten Beweise der sogenannten Schließungssätze. Bekanntlich kann man einem Kegelschnitt zwei n-Ecke einbeschreiben, deren Seiten in einer bestimmten Ordnung durch n gegebene Punkte gehen. Dies läßt sich übrigens auch durch die Methode der Erhaltung der Anzahl leicht beweisen (siehe [35] 7). Nehmen wir nun an, daß n gerade ist, und daß die n gegebenen Punkte die Schnittpunkte der Seiten eines bereits einbeschriebenen n-Ecks mit einer Geraden a sind. Dann gibt es bereits drei n-Ecke, die die gegebene Bedingung erfüllen, nämlich das vorgegebene und zwei, deren Seiten mit a zusammenfallen und von welchen eine bestimmte Ecke in den einen oder den anderen Schnittpunkt der Geraden a mit dem Kegelschnitt fällt. Es wird daher in diesem Fall unendlich viele Auflösungen geben, so daß eine bestimmte Ecke in einen ganz willkürlichen Punkt des Kegelschnittes fallen kann. Dies läßt sich auch so ausdrücken, daß für gerades n der Schnittpunkt einer der Seiten eines einbeschriebenen n-Ecks mit einer willkürlichen Geraden a durch die $n-1$ übrigen und durch den Kegelschnitt bestimmt wird. Von diesem kommen jedoch nur die Schnittpunkte mit a in Betracht; denn zwei Kegelschnitte, die a in denselben Punkten schneiden, sind perspektiv kollinear in Beziehung auf a als Achse. — Der gefundene Satz umfaßt den bekannten *Desargues*schen Involutionssatz.

Der einfache *Poncelet*sche Schließungssatz geht aus dem Versuch hervor, in einen gegebenen Kegelschnitt c_2 ein n-Eck $P_1 P_2 \cdots P_n$ einzubeschreiben, das einem anderen k_2 umbeschrieben ist. Gibt man zunächst P_1 eine willkürliche Lage auf c_2, so wird man zwei offene Vielecke $P_1 P_2 \cdots P_n P_{n+1}$ und $P_1 P'_2 \cdots P'_n P'_{n+1}$ erhalten, die die gegebenen Bedingungen erfüllen würden, wenn P_{n+1} beziehungsweise P'_{n+1}, mit P_1 zusammenfiele. Gewöhnlich wird dies nicht der Fall sein; sondern die Geraden $P_1 P_{n+1}$ (oder $P_1 P'_{n+1}$) werden einen Kegelschnitt s_2 berühren; denn von einem Punkte P_1 von c_2 gehen zwei solche Gerade aus.

Gäbe es nun eine eigentliche Auflösung, so müßte die Tangente an c_2 im Punkte P_1 auch s_2 in demselben Punkte P_1 berühren; denn in diesem Falle fallen die Punkte P_{n+1} und P'_{n+1}, die je durch die Polygone $P_1 P_2 \cdots P_n P_{n+1}$ und $P_1 P_n \cdots P_2 P'_{n+1}$ bestimmt werden, mit P_1 zusammen. Also werden sich s_2 und c_2 in P_1 berühren. Bei dieser Bestimmung kann aber P_1 durch jede andere Ecke desselben n-Ecks ersetzt werden. s_2 und c_2 berühren also einander in n Punkten, und da $n \geqq 3$ ist, muß s_2 mit c_2 zusammenfallen. P_1 darf also ein ganz willkür-

licher Punkt von c_2 sein. Wenn also die Aufgabe eine eigentliche Auflösung hat, muß sie unendlich viele haben: das mit einem willkürlichen Punkt von c_2 begonnene n-Eck wird sich dann immer schließen.

Hieraus folgt umgekehrt, daß, wenn ein c_2 einbeschriebenes und k_2 umbeschriebenes nEck sich nicht schließt, sich kein solches schließen wird. Welche Bedeutung werden aber dann die vier gemeinschaftlichen Tangenten des Kegelschnittes c_2 und des gefundenen Hilfskegelschnittes s_2, der die Einhüllende der Verbindungsgeraden $P_1 P_{n+1}$ ist, haben? Diese Frage wird verschieden für gerade und ungerade Werte von n, $n = 2r$ und $n = 2r - 1$, zu beantworten sein. Für $n = 2r$ betrachten wir besonders den Fall, in welchem P_{r+1} in einen Schnittpunkt von c_2 und k_2 fällt. Dann werden die Polygonstücke $P_{r+1} P_r \cdots P_2 P_1$ und $P_{r+1} P_{r+2} \cdots P_n P_{n+1}$ miteinander zusammenfallen, also auch P_1 und P_{n+1}. Also wird $P_1 P_{n+1}$ c_2 berühren. Für $n = 2r - 1$ nehme man als Seite $P_r P_{r+1}$ eine gemeinschaftliche Tangente von c_2 und k_2. Dann fallen P_r und P_{r+1} in ihrem Berührungspunkte mit c_2 zusammen, woraus folgt, daß auch $P_r P_{r-1} \cdots P_1$ mit $P_{r+1} P_{r+2} \cdots P_{2r-1} P_{n+1}$, also wieder P_1 mit P_{n+1} zusammenfallen wird. In diesen Fällen erhält man nur dann einen Grenzfall der Auflösung der gestellten Aufgabe, wenn die beiden von P_1 ausgehenden Tangenten von k_2 zusammenfallen, d. h., wenn der auf diese Weise bestimmte Punkt P_1 selbst ein Schnittpunkt von c_2 und k_2 wird. Dies muß also eintreffen, wenn c_2 und k_2 überhaupt die gesuchten ein- und umbeschriebenen n-Ecke zulassen.

[46] Der allgemeinere Schließungssatz von *Poncelet*. Wenn uns später namentlich das Korrespondenzprinzip andere Abzählungsmittel an die Hand gibt, so werden wir auch in anderen Fällen auf ähnliche Weise von der Existenz einer eigentlichen Lösung einer Aufgabe auf eine stetige Folge solcher Lösungen schließen können, nämlich dann, wenn im allgemeinen alle abgezählten Lösungen der für die Anwendung der Methode modifizierten Aufgabe uneigentlich sind, d. h. den ursprünglich gestellten Forderungen nicht entsprechen. Eine solche Folge kann man jedoch auch in solchen Fällen antreffen, in welchen die Aufgabe neben einer stetigen Folge von Auflösungen auch isolierte Lösungen hat.

Ein lehrreiches Beispiel dafür gibt der allgemeinere Schließungssatz von *Poncelet* ab. Stellen wir uns die Aufgabe, einem gegebenen Kegelschnitt c_2 ein n-Eck einzubeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte k_2', k_2'', $\cdots k_2^{(n)}$ berühren, die alle einem Büschel angehören, der auch c_2 enthält.

Versuchen wir, wie in [45], das n-Eck mit einer beliebigen Ecke P_1 auf c_2 anzufangen, so wird man zwei Bestimmungen der Ecke P_2, 2^2 der Ecke P_3 usw., 2^{n-1} der Ecke P_n erhalten, und nur, wenn dann die Gerade $P_1 P_n$ den letzten Kegelschnitt $k^{(n)}$ berührt, wird man eine Lösung der gestellten Aufgabe haben. Läßt man P_1 den Kegelschnitt

c_1 durchlaufen, so muß jeder Punkt dieser Kurve Anfangspunkt P_1 von 2^{n-1} und Endpunkt P_n von 2^{n-1} noch offenen Vielecken $P_1 P_2 \cdots P_n$ werden, und er kann nicht auf andere Weise auf der Geraden $P_1 P_n$ liegen. Die Einhüllende dieser Geraden ist also von der Klasse 2^n.

Um diese Kurve näher zu untersuchen, wird es zweckmäßig sein, ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt c_2 aufzusuchen. Ein solcher Punkt wird dadurch charakterisiert, daß zwei der von ihm ausgehenden 2^n Tangenten ($P_1 P_n$ oder $P_n P_1$ je nachdem man den Punkt als Punkt P_1 oder P_n betrachtet) zusammenfallen, ohne daß dies mit zwei von einem anderen Punkt derselben Geraden ausgehenden Tangenten der Fall ist; im letzteren Fall nämlich würde die Gerade selbst eine mehrfache Tangente sein. Diese Bedingung ist offenbar von den gemeinschaftlichen Schnittpunkten A, B, C, D der Kegeschnitte des Büschels erfüllt. Fällt P_1 in einen dieser Punkte z. B. A, so fallen die zwei von P_1 ausgehenden Geraden $P_1 P_2$ mit der Tangente von k_2' zusammen; damit fallen die zwei entprechenden Punkte P_2 zusammen; weiter werden die entsprechenden Punkte P_3, $P_4 \cdots P_n$ je zu zwei zusammenfallen, und damit wieder die 2^{n-1} Tangenten $P_1 P_n$, ohne daß im allgemeinen auch zwei der 2^{n-1} Geraden $P_n P_1$, die von einem der so bestimmten Punkte P_n ausgehen, zusammenfallen. Umgekehrt geht es, wenn P_n mit A zusammenfällt. Die Einhüllende wird also in A einen 2^{n-1}-fachen Punkt haben, und ebenso in B, C und D.

Sie wird weiter c_2 nur in diesen Punkten schneiden. Zwei der von einem anderen Punkt von c_2 ausgehenden Tangenten werden zwar zusammenfallen, wenn entweder dieselbe Gerade zwei verschiedene der offenen Polygonen schließt, oder wenn eine dazwischenliegende Ecke, P_2, $P_3 \cdots P_{n-1}$ in einen der Punkte A, B, C oder D fällt. Dann werden aber gleichzeitig zwei der von P_1 und zwei der von P_n ausgehenden Tangenten $P_1 P_n$ zusammenfallen, und die Gerade $P_1 P_n$ ist also eine Doppeltangente. Daß sie weder in P_1 noch in P_n einen Berührungspunkt hat, sieht man daran, daß von diesen Punkten ausgehende Tangenten nur zu je zwei zusammenfallen.

Die Kurve schneidet also c_2 nur in den vier Punkten A, B, C, D, die 2^{n-1}-fache Punkte werden. Sie ist also von der Ordnung 2^n und schneidet jeden Kegelschnitt des Büschels nur in den Punkten A, B, C, D, und zwar 2^{n-1} mal in jedem von diesen Punkten. Geht dann ein Kegelschnitt des Büschels noch durch einen weiteren Punkt der gesuchten Einhüllenden, so wird er diese im ganzen in $2^{n+1}+1$ Punkten treffen und muß also selbst ein Teil dieser Kurve sein. Diese besteht dann aus 2^{n-1} zu dem Büschel gehörigen Kegelschnitten l_2. Diese müssen je den Reihen sukzessiver Tangenten an die Kegelschnitte k entsprechen, die man bei der von einem willkürlichen Punkt P_1 ausgehenden Konstruktion der offenen Polygone $P_1 P_3 \cdots P_n$ benutzt.

Je nach der Wahl dieser Tangenten löst sich die gestellte Aufgabe in 2^{n-1} Aufgaben auf. Jede von diesen hat vier Lösungen, die man dadurch findet, daß man die Gerade $P_1 P_n$ als gemeinschaftliche Tangente des gegebenen Kegelschnitts $k_2^{(n)}$ und des zu der betreffenden Teilaufgabe gehörigen Kegelschnitts l_2 bestimmt. In dem Fall, daß $k_2^{(n)}$ mit diesem Kegelschnitt l_2, den er von vornherein in A, B, C, D schneidet, zusammenfällt, hat die betreffende Teilaufgabe unendlich viele Lösungen, die eine stetige Folge bilden; gleichzeitig werden aber die übrigen $2^{n-1}-1$ Teilaufgaben im allgemeinen verschiedene Lösungen haben.

Wenn also ein n-Eck gegeben ist, das dem Kegelschnitte c_2 einbeschrieben ist und dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte k_2', $k_2'' \cdots k_2^{(n)}$ eines Büschels, dem c_2 angehört, berühren, so darf man nicht sogleich schließen, das es eine stetige Folge solcher n-Ecke gibt. Ist aber $(k_2^{(n)})$ der andere Kegelschnitt des Büschels, der die Seite $P_n P_1$ des n-Ecks berührt, so muß es entweder für die gegebenen Kegelschnitte oder für die Kegelschnitte c_2, k_2', k_2'', $\cdots (k_2^{(n)})$ eine stetige Folge von n-Ecken geben, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Da nämlich $k_2^{(n)}$ und $(k_2^{(n)})$ die einzigen Kegelschnitte des Büschels sind, die $P_n P_1$ berühren, so muß der eine oder andere einer der durch die übrigen Kegelschnitte bestimmten 2^{n-1} Kegelschnitte l_2 sein, die Einhüllende der Seiten $P_n P_1$ sind. Wir werden übrigens bald [52] ein Kriterium angeben, woraus man, wenn das Vieleck reell ist, sogleich ersehen kann, welcher von den zwei Kegelschnitten diese Einhüllende ist.

[47] Rechtfertigung der Verwendung von gezeichneten Figuren. Setzen wir voraus, daß eine variable Figur von einem Parameter abängt, und daß ihre Eigenschaften durch eine Zeichnung anschaulich gemacht werden. Eine solche wird gewöhnlich allen Werten des Parameters, die zwischen gewissen Grenzen liegen, also unendlich vielen Werten des Parameters entsprechen. Läßt sich nun die Figur benutzen, um einen Satz zu beweisen, so ist dieser für unendlich viele Werte des Parameters richtig. Ist der Satz algebraisch ausdrückbar (was wir ja immer von den in diesem Buche behandelten Sätzen voraussetzen), so muß also die ihn ausdrückende Gleichung identisch erfüllt sein, und der Satz gilt somit für alle Figuren, die man durch Abänderung des Parameters erhalten kann.

Die auf der Zeichnung hervortretenden Teile der Figur müssen reell sein, und nur solche dürfen unmittelbar in einem an die Zeichnung geknüpften Beweis benutzt werden. Durch die hier genannte Erweiterung läßt sich aber der bewiesene Satz auch auf solche Fälle erweitern, in welchen die benutzten Teile der Figur imaginär sind.

Nennen wir ein ganz elementares Beispiel. Wenn sich zwei Kreise in reellen Punkten schneiden, so sieht man sogleich, daß alle Punkte ihrer gemeinschaftlichen Sehne die Eigenschaft haben, daß die von einem

solchen ausgehenden Tangenten an die zwei Kreise dieselbe Länge haben. Da die aus zwei sich nicht schneidenden Kreisen bestehende Figur aus der hier benutzten durch Abänderung eines Parameters entstehen kann, muß auch mit ihr eine Gerade, die dieselben Eigenschaften besitzt, verbunden sein, und diese Gerade muß durch die imaginären Schnittpunkte der Kreise gehen. Der Satz gilt noch, wenn die Kreise selbst imaginär werden, was auch rein geometrisch wichtig sein kann, weil man solche Kreise benutzen kann, um Sätze, die nur reelle Punkte und Linien betreffen, zu beweisen.

Auch bei den abzählenden Untersuchungen sind ähnliche Betrachtungen nützlich. Nähern sich z. B. die Berührungspunkte eines einfachen Zuges einer Kurve mit einer Doppeltangente, so zeigt eine Figur, in welcher diese Punkte reell sind, daß wenigstens zwei Wendepunkte sich gleichzeitig einander nähern, und daß alle vier Punkte unter sich zusammenfallen, wenn der Kurvenzug Berührung dritter Ordnung mit der Doppeltangente bekommt. Wir sagen „wenigstens", weil es ja denkbar wäre, daß (wenn die Kurve algebraisch ist) außer den reellen im allgemeinen noch imaginäre Wendepunkte mit den anderen zusammenfielen. Diese Einschränkung wird dadurch überflüssig, daß, wie die Figur zeigt, auch umgekehrt das Zusammenfallen zweier Wendepunkte eines einfach bleibenden Kurvenzuges bewirkt, daß zwei Berührungspunkte einer Doppeltangente zusammenfallen. Was hier aus einer Figur zu ersehen ist, läßt sich nun auch auf die Fälle erweitern, in welchen die behandelten Teile der Figur imaginär sind.

Daß die Vorsicht, die uns veranlaßte, vorläufig „wenigstens" zwei Wendepunkte zu sagen, nicht überflüssig war, zeigt folgendes Beispiel. Wenn sich zwei Kurvenzüge nähern, um schließlich einen Doppelpunkt des Kurvenzuges oder einen Schnittpunkt zweier durch die Änderung entstehenden neuen Kurvenzüge zu bilden, so zeigt eine Figur, daß im allgemeinen gleichzeitig zwei Wendetangenten je mit einer Tangente im neu entstehenden Doppelpunkt zusammenfallen. Eine später zu entwickelnde Formel wird aber zeigen, daß sechs Wendepunkte vom neu entstehenden Doppelpunkt absorbiert werden, oder daß jede Tangente im neuen Doppelpunkte die Grenzlage dreier Wendetangenten ist. Zwei der letzteren sind also imaginär, wenn die Kurvenzüge reell sind. (S. [60] und [70]).

[48] Beispiele und Übungen. 1. Es sei gegeben eine ebene Kurve k_r von der Ordnung r mit d Doppelpunkten, und eine durch diese gehende Kurve c_n von der Ordnung n, die k_r noch in $nr - 2d$ Punkten schneidet. Wenn die Forderung, durch diese und die d Doppelpunkte zu gehen, einer Kurve von der Ordnung n für $n > r - 3$ weniger als $nr - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ oder für $n < r$ weniger als $\frac{1}{2}n(n+3)$ unter sich unabhängige Bedingungen auferlegt, ist k_r zusammengesetzt, sonst nicht.

2. Wenn ein Kegelschnitt eine Kurve vierter Ordnung in vier Punkten berührt, wird jeder durch diese gehende Kegelschnitt die Kurve in vier anderen Punkten schneiden, in welchen sie ebenfalls von einem Kegelschnitt berührt wird [37].

3. Eine Fläche vierter oder fünfter Ordnung soll eine gegebene Raumkurve dritter Ordnung als Doppelkurve enthalten. Wie viele Punkte der Fläche sind noch nötig, um sie vollständig zu bestimmen?

4. Wenn eine Fläche m^{ter} Ordnung zwei Raumkurven dritter Ordnung, die sich in einem Punkte schneiden, enthalten soll, wie viele Punkte müssen dann noch gegeben sein, um sie vollständig zu bestimmen?

5. Zu beweisen, daß die Umhüllungsfläche der doppelt berührenden Ebenen der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung aus Kegeln zusammengesetzt ist. (Jede Verbindungsgerade der Berührungspunkte einer doppelt berührenden Ebene wird einen Punkt P enthalten, von welchem drei und somit unendlich viele Bisekanten ausgehen.) Der Satz folgt übrigens auch aus [35] 2, woraus man auch sieht, daß es vier solche Kegel gibt. S. auch [49].

6. Die Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung, die eine andere Fläche zweiter Ordnung berühren, werden Doppelstrahlen der von den gemeinschaftlichen Tangenten der Flächen gebildeten Kongruenz sein; von welcher Art [43] sind sie? Ihre Anzahl kann man durch Spezialisieren der einen Fläche finden. — Da die Brennfläche der Kongruenz aus den zweimal gezählten Flächen besteht, ist dieser Fall kein Beispiel für solche Doppelstrahlen, die einfache Linien der Brennfläche sind (vgl. [43], Fußnote, wo wir annahmen, daß solche überhaupt nicht existieren).

c) Aufgaben mit null Lösungen.

[49] Einhüllende oder Rückkehrkurven von der Ordnung 0. Es kann geschehen, daß die Abzählung der Lösungen einer Aufgabe null ergibt. Bezieht sich diese Abzählung auf die Anzahl der Schnittpunkte einer ebenen Kurve oder einer Fläche mit einer Geraden oder Kurve, oder einer Raumkurve mit einer Fläche, so kann man sagen, daß das betreffende Gebilde von der Ordnung 0 ist; die Kurve besteht daher in diesem Fall nur aus einzelnen Punkten, die Fläche nur aus einer Kurve, oder, wenn eine entsprechende Abzählung auch für den Rang den Wert 0 ergibt, nur aus einzelnen Punkten[1]).

Auf solche Gebilde kann man kommen, wenn man die Einhüllende

1) Die hier genannten einzelnen Punkte und die Kurven, aus denen eine Fläche bestehen kann, sind natürlich von denjenigen, die man sonst „isolierte Punkte", „isolierte Kurven" nennt, verschieden. Durch letztere Benennungen hebt man nur die reellen Punkte des Gebildes hervor, während in der abzählenden Geometrie imaginäre Punkte als mit den reellen gleichwertig betrachtet werden.



eines Systems von ∞^1 Kurven oder Flächen, oder die Rückkehrkurve einer solchen Umhüllungsfläche sucht. Der Beweis dafür, daß die Systeme von Kurven oder Flächen mit der Charakteristik $\mu = 1$ oder $\mu = 2$ Büschel sind oder Bündeln angehören ([37] und [39]), konnte z. B. dadurch geführt werden, daß man die Ordnung 0 der Einhüllenden beziehungsweise der Rückkehrkurve durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer Geraden oder Ebene bestimmte.

Suchen wir z. B. die Rückkehrkurve der Umhüllungsfläche der doppelt berührenden Ebenen der Schnittkurve r_4 zweier Flächen zweiter Ordnung φ und ψ. Dies kann dadurch geschehen, daß wir die Schnittpunkte dieser Rückkehrkurve mit der Fläche φ (von der wir annehmen werden, daß sie nicht eine Kegelfläche ist) suchen. Durch einen Punkt der Rückkehrkurve gehen drei konsekutive Tangentialebenen, also zwei konsekutive Erzeugende der Umhüllungsfläche. Die Erzeugenden müssen alle r_4 zweimal schneiden. Die durch einen Punkt P von φ gehenden Bisekanten der Kurve r_4 sind die durch P gehenden zwei Erzeugenden der Fläche φ. Diese fallen für keinen Punkt P der Fläche φ zusammen, und ein solcher Punkt kann also nicht auf der gesuchten Rückkehrkurve liegen. Da somit diese die Fläche φ in keinem Punkt schneidet, muß sie von der Ordnung 0 sein, d. h. die Umhüllungsfläche löst sich in Kegelflächen auf (vergleiche [48] 5)[1]).

[50] Beweise dafür, daß Größen konstant bleiben. Besteht zwischen zwei Größen x und y eine algebraische Gleichung

$$f(x,y) = 0,$$

so wird man daraus für jeden gegebenen Wert von y wenigstens einen entsprechenden Wert von x bestimmen können; denn die Fälle, die man oft als Ausnahmefälle betrachtet, wo nämlich x nur unendliche Werte annehmen kann, werden hier in der abzählenden Geometrie, wo die Lösungen, die in Grenzfällen unendlich werden, auch mitzuzählen sind [4], hiermit ausdrücklich mit aufgenommen. Gibt es also einen Wert, den y für keinen Wert von x annehmen kann, so muß y unabhängig von x sein, also konstant bleiben, wenn x sich ändert. Anschaulich wird das hier Gesagte, wenn man x und y als gewöhnliche Koordinaten in der Ebene darstellt. Die Gleichung wird dann eine Kurve darstellen, die jede Parallele mit der Abszissenachse in einer durch den Grad der Gleichung in x bestimmten Anzahl von Punkten schneidet. Davon rückt einer oder mehrere ins Unendliche, wenn die Gerade eine Asymptote ist. Wenn man nun auch nur von einer Geraden weiß, daß sie die Kurve nicht auf diese Weise schneidet, so muß diese aus Parallelen mit der Abszissenachse zusammengesetzt sein; d. h., die Gleichung ist unabhängig von x oder vom Grade 0 in x und liefert also

1) Ein anderes Beispiel findet sich später in [90] Fußnote.

nur eine Anzahl konstanter Werte von y. — Die Gradzahl 0 der Gleichung wird hier, wie bei den früheren Anwendungen der Methode der Erhaltung der Anzahl durch Abzählung in einem einzelnen Spezial- oder Grenzfall bewiesen.

Natürlich kann man auf dieselbe Weise die Unabhängigkeit der Variabeln y von mehreren variablen Größen beweisen. Da eine algebraische Gleichung immer ausdrückt, daß eine gewisse Größe konstant bleibt, so läßt sich diese Methode eigentlich anwenden, um alle durch algebraische Gleichungen ausdrückbaren Sätze zu beweisen. Wir werden damit anfangen, zu zeigen, wie dies eben für Relationen zwischen Fundamentalgrößen sehr einfach ausgeführt werden kann.

[51] Konstante Doppelverhältnisse. Das Doppelverhältnis (L, M, N, P) der vier Punkte L, M, N, P einer Geraden kann nur dann $0, \infty$ oder 1 werden, wenn zwei der Punkte zusammenfallen. Fallen drei oder alle vier zusammen, so wird es unbestimmt, wird aber dann in hinlänglich bestimmten Grenzfällen bestimmte Grenzwerte annehmen. Können also entweder für keinen Wert eines Parameters, von welchem die Figur abhängt, jemals zwei der Punkte zusammenfallen, oder kann dies nur so geschehen, daß immer mehr als zwei zusammenfallen, und daß das Doppelverhältnis einen der oben genannten Werte für keinen solchen Fall als Grenzwert annimmt, so muß es konstant sein. — Ebenso geht es mit dem Doppelverhältnis von vier Geraden eines Büschels.

Seien erstens L, M, N, P die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit vier Geraden l, m, n, p eines Büschels, dessen Scheitel wir A nennen werden. Um zu zeigen, daß die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte dieser festen Geraden mit zwei willkürlichen Geraden q und r gleich groß sind, kann man untersuchen, wie sich das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der festen Geraden mit den Geraden des durch q und r bestimmten Büschels ändern kann. Zwei der Schnittpunkte L, M, N, P mit einer Geraden dieses Büschels werden nur dann zusammenfallen, wenn die Gerade durch A geht. Dann werden sie aber alle zusammenfallen, das Doppelverhältnis wird also unbestimmt. Der allgemeinen Regel gemäß muß es dann durch seinen Grenzwert ersetzt werden, und da die Bestimmung jedenfalls algebraisch und eindeutig ist, ist auch dieser Grenzwert eindeutig, indem die Punkte L, M, N, P in einer bestimmten Ordnung zu nehmen sind. Es könnte also höchstens einen der drei Werte $0, \infty$ und 1 annehmen, und es wird somit Werte geben, die es nicht annehmen kann. Das Doppelverhältnis ist also konstant.

Seien sodann l, m, n, p die Geraden, die einen beweglichen Punkt eines Kegelschnittes mit vier festen Punkten des Kegelschnittes verbinden. Dann fallen niemals zwei der Geraden zusammen. Ihr Doppelverhältnis muß also konstant bleiben.

Dasselbe ist der Fall, wenn l, m, n, p die vier Tangenten einer Kurve dritter Ordnung sind, die durch einen beweglichen Punkt G dieser Kurve

gehen und sie in anderen Punkten berühren[1]). Da die Kurve keine Doppeltangente haben kann, und da in einem Wendepunkt nur eine der vier Tangenten mit der Wendetangente zusammenfällt, werden für keine Lage des Punktes G zwei der vier Tangenten zusammenfallen. Ihr Doppelverhältnis kann also keinen der Werte 0, ∞ und 1 annehmen und muß daher konstant bleiben. Nur in dem Grenzfalle, in welchem die Kurve einen Doppelpunkt hat, fallen für alle Lagen von G zwei der vier Tangenten zusammen, und das konstante Doppelverhältnis hat also, je nach der Anordnung der Tangenten, die Werte 0, ∞, 1.

Die verschiedenen Kurven dritter Ordnung werden durch die Werte der ihnen zugehörigen Doppelverhältnisse charakterisiert. Bilden die vier Tangenten einen harmonischen Büschel, so nennt man die Kurve harmonisch, und bilden sie einen äquianharmonischen Büschel, äquianharmonisch. Entsprechendes gilt für Kurven dritter Klasse.

Die Konstanz der Doppelverhältnisse der Ebenen, die einen beliebigen Strahl eines *Reye*schen Komplexes [30] mit den Scheiteln des zu ihm gehörigen Tetraeders verbinden, läßt sich auf dieselbe Weise beweisen. — Ebenso ergibt sich, daß die Schnittpunkte beziehungsweise Berührungspunkte der Strahlen einer *Hirst*schen Kongruenz [44] mit den durch ihre vier Doppelstrahlen gehenden Flächen zweiter Ordnung konstante Doppelverhältnisse bilden.

In derselben Weise kann man die harmonische Eigenschaft der Polare a eines Punktes A in Beziehung auf einen Kegelschnitt c_2 beweisen, wenn man die Polare als die Gerade definiert, die durch die Berührungspunkte B und C der durch A gehenden Tangenten geht. Wenn nämlich eine beliebige durch A gehende Gerade l den Kegelschnitt c_2 in den Punkten P und P', die Gerade a in N schneidet, so werden zwei der Punkte A, N, P, P' nur dann zusammenfallen, wenn l durch B oder C geht, und dann fallen N, P, P' zusammen. Da aber gleichzeitig NP und NP' unendlich klein von derselben Ordnung werden, so kann das Doppelverhältnis (A, N, P, P') keinen der Werte $0, \infty$ annehmen. Es bleibt also konstant. Da P ein willkürlicher Punkt des Kegelschnitts ist, läßt er sich mit P' vertauschen, ohne daß sich das Doppelverhältnis ändert. P und P' sind also in Beziehung auf A und N harmonisch verbunden.

[52] Anwendung auf den allgemeineren *Poncelet*schen Schließungssatz. In [46] haben wir bewiesen: wenn $c_2, k_2', k_2'', \ldots k_2^{(n-1)}$ gegebene Kegelschnitte eines Büschels sind, und wenn man dem Kegelschnitt c_2 ein n-Eck $P_1 P_2 \ldots P_n$ so einschreibt, daß die Seiten $P_1 P_2, P_2 P_3 \ldots P_{n-1} P_n$ der Reihe nach die Kegelschnitte k_2', $k_2'' \ldots k_2^{(n-1)}$ berühren, so wird der eine der Kegelschnitte des Büschels,

1) Die Kurve ist von der Klasse 6, und zwei der durch G gehenden sechs Tangenten, oder drei, wenn G ein Wendepunkt ist, fallen mit der Tangente in G zusammen ([12] u. [13]).

die die Seite $P_n P_1$ berühren, die Eigenschaft haben, daß die Seiten einer stetigen Folge von Vielecken, die alle c_2 einbeschrieben sind, der Reihe nach $k_2', k_2'' \ldots, k_2^{(n-1)}$ und diesen neuen Kegelschnitt berühren. Diesen Kegelschnitt werden wir $k_2^{(n)}$ nennen, den anderen Kegelschnitt des Büschels, der nur für ein isoliertes n-Eck die Seite $P_n P_1$ berührt, $(k_2^{(n)})$. Durchläuft das Vieleck die ganze stetige Folge, so muß der mit $k_2^{(n)}$ verbundene Kegelschnitt $(k_2^{(n)})$ den ganzen Büschel durchlaufen.

Nennen wir die Berührungspunkte der Seiten des variablen n-Ecks mit $k_2', k_2'' \ldots k_2^{(n)}$ bezw. $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$, so kann man beweisen, daß die Größe

$$x_n = \frac{P_1 Q_1}{Q_1 P_2} \cdot \frac{P_2 Q_2}{Q_2 P_3} \cdots \frac{P_n Q_n}{Q_n P_1}$$

für die genannte stetige Folge konstant bleibt. Keine der $2n$ hier auftretenden Strecken kann nämlich null werden, wenn nicht eine Ecke in einen der Schnittpunkte A, B, C, D der Kegelschnitte des Büschels fällt. Fällt dagegen z. B. P_2 in den Punkt A, so werden zwar $P_2 Q_1$ und $P_2 Q_2$ gleich 0; durch eine unendlich kleine Bewegung des Punktes P_2 werden aber die beiden Größen unendlich klein von derselben Ordnung, der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{P_2 Q_2}{Q_1 P_2}$ wird also weder 0 noch ∞ sein. Da jeder Punkt sowohl in den Zähler als auch in den Nenner eingeht, können diese Werte auch nicht auftreten, wenn ein Punkt ins Unendliche rückt. (Bekanntlich ist auch ein Ausdruck von der genannten Form projektiv.) Die Größe x_n kann also überhaupt weder 0 noch ∞ werden, muß also konstant bleiben.

Ihren Wert x_n kann man folgendermaßen bestimmen. Betrachtet man eine beliebige Lage der veränderlichen Figur und bezeichnet man mit (Q_n) den Berührungspunkt des anderen Kegelschnittes $(k_2^{(n)})$ des Büschels, der $P_1 P_n$ berührt, so weiß man, daß Q_n und (Q_n) in Beziehung auf P_1 und P_n harmonisch verbunden sind, daß also

$$\frac{P_n (Q_n)}{(Q_n) P_1} = - \frac{P_n Q_n}{Q_n P_1}$$

ist. Der Wert des Produkts, der einer solchen isolierten Auflösung der Aufgabe, ein n-Eck dem Kegelschnitt c_2 einzuschreiben, dessen Seiten $k_2', k_2'' \ldots (k_2^{(n)})$ berühren, entspricht, ist also $-x_n$. Betrachten wir nun besonders den Fall, in welchem $(k_2^{(n)})$ mit c_2 zusammenfällt, und also P_1, P_n und (Q_n) im Berührungspunkt einer gemeinschaftlichen Tangente der Kegelschnitte c_2 und $k_2^{(n)}$ zusammenfallen. Dann ist $\frac{P_n Q_n}{Q_n P_1} = -1$, also, wenn man den Fall als Grenzfall betrachtet, $\frac{P_n (Q_n)}{(Q_n) P_1} = 1$. Da somit dieser Faktor wegfallen kann, so erhält man auch für das durch das Zusammenfallen von P_1 und P_n entstehende $(n-1)$-Eck $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$,

dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte $k_2', k_2'' \ldots k_2^{(n-1)}$ berühren,

$$\frac{P_1 Q_1}{Q_1 P_2} \cdot \frac{P_2 Q_2}{Q_2 P_3} \cdots \frac{P_{n-1} Q_{n-1}}{Q_{n-1} P_1} = - x_n.$$

Das so erhaltene $(n-1)$-Eck ist aber wieder eine isolierte Auflösung; denn sonst müßte die Einhüllende $k_2^{(n)}$ der Geraden $P_1 P_n$ mit c_2 zusammenfallen, was wir nicht vorausgesetzt haben. Man wird daher eine stetige Folge von $(n-1)$-Ecken haben, wenn man $k_2^{(n-1)}$ durch den anderen Kegelschnitt des Büschels ersetzt, der $P_1 P_{n-1}$ berührt. Für diese stetige Folge bekommt das Produkt wieder den Wert $+x_n$, oder man hat

$$x_n = x_{n-1}.$$

Es genügt nun, den Fall $n = 2$ zu betrachten. Hier fällt immer $P_2 P_1$ mit $P_1 P_2$, die Enveloppe k_2'' der Seiten $P_2 P_1$ mit k_2', der Berührungspunkt Q_2 mit Q_1 zusammen. Also wird

$$x_2 = \frac{P_1 Q_1}{Q_1 P_2} \cdot \frac{P_2 Q_2}{Q_2 P_1} = 1,$$

x_2, und damit im allgemeinen x_n, ist also 1, während das entsprechende Produkt für die isolierten Auflösungen gleich -1 wird.

Wenn das Vieleck $P_1 P_2 \ldots P_n$ reell ist, so wird sich das Vorzeichen unseres Produkts unmittelbar aus einer Figur ergeben. Dann kann man also sogleich unterscheiden, ob ein vorgelegtes, einem Kegelschnitt c_2 eines Büschels einbeschriebenes n-Eck, dessen Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte $k_2', k_2'', \ldots k_2^{(n)}$ desselben Büschels berühren, einer stetigen Folge von n-Ecken angehört, die dieselben Bedingungen erfüllen, oder eine isolierte Auflösung der durch diese Bedingungen gestellten Aufgabe ist.

[53] ***Carnots* Satz**, den wir der Übersichtlichkeit halber hier nur für einen Kegelschnitt aussprechen und beweisen wollen, der sich aber ganz ebenso für eine beliebige algebraische Kurve aussprechen und beweisen läßt, lautet so:

Wenn die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 2) einen Kegelschnitt in folgenden Punkten schneiden: BC in X_1 und X_2, CA in Y_1 und Y_2, AB in Z_1 und Z_2, so ist

$$\frac{BX_1 \cdot BX_2}{CX_1 \cdot CX_2} \cdot \frac{CY_1 \cdot CY_2}{AY_1 \cdot AY_2} \cdot \frac{AZ_1 \cdot AZ_2}{BZ_1 \cdot BZ_2} = 1.$$

Um dies zu beweisen, läßt man A sich auf einer Geraden l bewegen, die nicht durch einen Berührungspunkt einer von B oder C ausgehenden Tangente geht. Dann kann die linke Seite der aufgestellten Gleichung nicht 0 (oder ∞) werden und muß also konstant bleiben. Der Zähler wird zwar 0, wenn A in einen Schnittpunkt A' der Geraden mit dem Kegelschnitte fällt und also z. B. AZ_1 verschwindet. Dann verschwin-

det aber auch im Nenner ein Faktor, z. B. AY_1. Der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{AZ_1}{AY_1}$ wird aber dann $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ sein, wo β und γ die Winkel sind, die die Tangente in A' mit den Geraden $A'B$ und $A'C$ bildet, ist also nicht 0 (oder ∞). Daß der gesuchte konstante Wert $= 1$ ist, ersieht man sodann aus dem Falle, in welchem A in den Schnittpunkt der Geraden BC und l fällt.

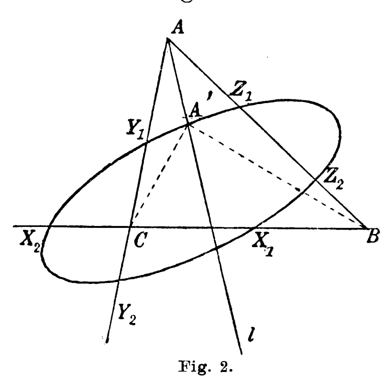


Fig. 2.

Da man zwei Punkte A durch eine Gerade oder wenigstens durch eine gebrochene Linie verbinden kann die nicht durch Berührungspunkte der von B und C ausgehenden Tangenten geht, gilt der Satz für jede Lage von A.

Auf eine Anwendung dieses Satzes haben wir in [10] hingewiesen.

[54] Übungen. 1. Mittels der Methode [49] zu beweisen, daß die Einhüllende der Ebenen, die eine Fläche zweiter Ordnung in Punkten eines ebenen Schnittes berühren, ein Kegel ist.

2. Mittels der Methode [50] zu beweisen, daß eine Gerade drei Kegelschnitte eines Büschels in sechs Punkten in Involution schneidet.

3. Wenn man von zwei Punkten A und B einer Kurve dritter Ordnung aus die vier (von den Tangenten in A und B verschiedenen) Tangenten an die Kurve zieht, so werden die vier Geraden, die A mit den Berührungspunkten der von B ausgehenden Tangenten verbinden, dieselben Doppelverhältnisse bilden wie die Geraden, die B mit den Berührungspunkten der von A ausgehenden Tangenten verbinden. — Dieser Satz läßt sich beweisen, indem man zeigt, daß für eine passende Anordnung der Geraden der Büschel das Verhältnis der zwei Doppelverhältnisse unverändert bleibt, wenn man entweder B sich auf der Kurve bewegen läßt oder A und B festhält, während die Kurve einen ganzen durch A und B gehenden Büschel durchläuft. — Einen anderen Beweis wird man übrigens später in [101] finden.

4. Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte auf einem der Kegelschnitte gerechnet, ist dem Doppelverhältnis der Berührungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten mit dem anderen Kegelschnitt (in passender Ordnung genommen) gleich. Diesen Satz kann man beweisen, indem man zeigt, daß das letztere Doppelverhältnis ungeändert bleibt, wenn letzterer Kegelschnitt den durch die vier Schnittpunkte bestimmten Büschel durchläuft. (S. auch [101]).

5. Zu beweisen, daß die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung zu je drei auf zwölf Geraden (Wendepunktlinien) liegen (mittels [53]).

d) Anwendung auf metrische Eigenschaften.

[55] Projektive Verallgemeinerung metrischer Eigenschaften. Da sich die abzählenden Methoden auf den Grad der Gleichungen beziehen und dieser sich durch lineare Umformungen nicht ändert, werden die durch sie gewonnenen Sätze entweder unmittelbar eine projektive Gestalt haben oder doch durch einfache Erweiterung eine solche annehmen können. Um sie auf eine gewisse Figur anzuwenden, braucht man daher nur den diese definierenden Eigenschaften eine verallgemeinerte projektive Gestalt zu geben. In dieser Gestalt die ganze Figur zu beschreiben, ist jedoch oft recht weitläufig. Es genügt aber gewöhnlich, bei jeder einzelnen Eigenschaft an ihre projektive Bedeutung zu erinnern. Da abzählende Methoden auch für ganz elementare Untersuchungen, denen man nicht von Anfang an eine projektive Form gegeben hat, mit Vorteil benutzt werden können, ist es, um die genannten Methoden recht zu verwerten, wichtig, die projektive Interpretation der metrischen Eigenschaften zu beachten.

In dieser Beziehung haben wir schon bemerkt, daß man unendlich große Wurzeln, somit auch die unendlich fernen Punkte und Geraden, in denen sich die parallelen Geraden und Ebenen schneiden, mitzählen muß. Daß eine Gerade oder Ebene nur einen unendlich fernen Punkt oder eine unendlich ferne Gerade hat, stimmt vom Standpunkt der abzählenden Geometrie aus damit überein, daß die unendlich fernen Punkte einer Ebene als in einer Geraden liegend, die unendlich fernen Punkte und Geraden des Raumes als in einer Ebene liegend aufgefaßt werden.

Zwei Punkte A und B haben einen bestimmten Abstand, wenn das durch A und B, den unendlich fernen Punkt der Geraden AB und den auf ihr im Abstand $+1$ von A liegenden Punkt bestimmte Doppelverhältnis gegeben ist. — Die Kreise einer Ebene sind Kegelschnitte, die ihre unendlich ferne Gerade in zwei festen Punkten, den Kreispunkten, I und J, schneiden. Zwei konzentrische Kreise berühren sich in diesen Punkten. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß der Abstand AB zweier Punkte 0 ist, gibt an, daß z. B. B auf einem Kreise mit dem Zentrum A und dem Halbmesser 0 liegt, also daß AB durch I oder J geht. Nur wenn der eine Punkt mit I oder J zusammenfällt, wird der Abstand unbestimmt.

Die Kugeln sind Flächen zweiter Ordnung, die die unendlich ferne Ebene in einem festen Kegelschnitt, dem Kugelkreise, schneiden. Dieser schneidet jede Ebene in ihren Kreispunkten.

Zwei Gerade bilden einen bestimmten Winkel, wenn das Doppelverhältnis ihrer unendlich fernen Punkte und der Kreispunkte ihrer Ebene bestimmt ist. Der Winkel ist ein rechter, wenn ihre unendlich fernen Punkte in Beziehung auf den Kugelkreis (auf die Kreispunkte

ihrer Ebene) harmonisch konjugiert sind. Daß der *sinus* eines Winkels 0 ist, drückt aus, daß die Ebene seiner Schenkel den Kugelkreis berührt. Ein Spezialfall hiervon ergibt sich, wenn die Schenkel zusammenfallen und daher keine Ebene bestimmen. Wenn ein Schenkel eines Winkels den Kugelkreis schneidet, hat man für diesen Winkel u die Werte $\operatorname{tg} u = \pm\sqrt{-1}$, wo die Vorzeichen den zwei Kreispunkten der Ebene entsprechen, $\sin u = \infty$, $\cos u = \infty$. Nur wenn die Ebene gleichzeitig den Kugelkreis berührt, wird der Winkel unbestimmt. Wenn eine Gerade den Kugelkreis schneidet, ist ihr Abstand von einem Punkt, der nicht in ihr liegt, oder von einer Geraden, die sie nicht schneidet, unendlich.

Die Brennpunkte eines Kegelschnitts sind die vier Schnittpunkte der durch die Kreispunkte seiner Ebene gehenden Tangenten. Wenn die Kurve die unendlich ferne Gerade berührt, d. h. eine Parabel ist, sind drei Brennpunkte unendlich fern; von diesen fallen zwei in I und J, der dritte ist unbestimmt.

Diese bekannten Definitionen sind nichts anderes als verschiedene Interpretationen der algebraischen Gleichungen, die die entsprechenden metrischen Eigenschaften ausdrücken. Mittels ihrer kann man die bereits entwickelten Methoden auf die folgenden Beispiele anwenden.

[56] Lösung einer elementaren Aufgabe. Suchen wir den Ort der Punkte, von denen aus man solche Tangenten an einen (einen Mittelpunkt besitzenden) Kegelschnitt c_2 ziehen kann, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden (Spezialfall von [22]). — Da man hier nicht zwischen Umlaufsrichtungen unterscheiden kann, wird eine Tangente an c_2 die gesuchte Kurve in vier Punkten schneiden. Ihre Ordnung ist also vier. Die vier Tangenten, die eine vom Kreispunkte I ausgehende Tangente in ihren Schnittpunkten mit dem Orte schneiden, müssen die von I ausgehenden Tangenten sein, jede zweimal gezählt. Die Schnittpunkte fallen also je zu zweien zusammen in I und in dem Punkt, in dem die Tangente c_2 berührt Die gesuchte Kurve hat also Doppelpunkte in den Kreispunkten I und J, und berührt die von diesen Punkten ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes c_2 in denselben Punkten wie c_2. Dies drückt man — durch eine Erweiterung der oben genannten Bestimmung eines Brennpunktes auf Kurven höherer Ordnung — so aus, daß man sagt: die Brennpunkte von c_2 sind auch Brennpunkte der gesuchten Kurve. Da die Kurve, die keine anderen Doppelpunkte hat, achter Klasse ist [12], wird sie übrigens noch zwei von I (oder J) ausgehende Tangenten — also mehrere Brennpunkte — haben.

Um das Kurvensystem zu bestimmen, das verschiedenen Werten des gegebenen Winkels entspricht, bemerken wir, daß nur je eine Kurve durch einen gegebenen Punkt P geht; denn dieser wird die Größe des Winkels bestimmen. Die Kurven bilden also einen Büschel ([37] Schluß). Ist der Winkel ein rechter, so fallen die Schnittpunkte des Ortes mit einer Tangente an c_2 je zu zwei zusammen. Der Ort reduziert sich

also auf einen zweimal zu zählenden Kreis, der durch die Berührungspunkte der durch die Kreispunkte gehenden Tangenten an c_2 geht. Wenn der Winkel 0 ist, so wird der Ort aus c_2 und der zweimal zu zählenden unendlich fernen Geraden bestehen. Hat c_2 die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

so hat der genannte Kreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2,$$

und die dem Winkel v entsprechende Kurve hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2 \mp b^2)^2 \mp 4a^2b^2 \cot^2 v \left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0\,.$$

Der Koeffizient $\mp 4a^2b^2 \cot^2 v$ wird dadurch bestimmt, daß die Kurve durch den Schnittpunkt der Geraden $x = a$ mit einer Tangente, die mit ihr den Winkel v bildet, gehen muß; ebenso wird der Halbmesser $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ des Kreises gefunden. Im übrigen ist die Gleichung ohne Rechnung gefunden worden. In ähnlicher Weise bekommt man den entsprechenden Ort, wenn die Kurve eine Parabel ist.

[57] Metrische Haupteigenschaften der Brennpunkte eines Kegelschnittes. Lehrreich ist die Anwendung der abzählenden Methoden zur Begründung der einfachsten metrischen Eigenschaften der Brennpunkte eines Kegelschnittes. Sei F ein Brennpunkt, f die entsprechende Leitlinie, das heißt die Polare von F, und P ein beliebiger Punkt der Kurve. Wir wollen dann beweisen, daß das Verhältnis der Abstände $\frac{FP}{fP}$ die Werte 0 und ∞ nicht, oder jedenfalls nicht diese beiden Werte annehmen kann, also konstant sein muß. Zähler und Nenner werden nämlich gleichzeitig unendlich, wenn P ins Unendliche rückt; dann wird aber das Verhältnis $\pm \frac{1}{\cos v}$, wo v der von der Hauptachse und einer Asymptote gebildete Winkel ist. Null werden Zähler und Nenner nur, wenn P auf f fällt und FP also eine Tangente wird, die der Definition der Brennpunkte gemäß durch einen Kreispunkt geht. Wäre nun der Grenzwert, den das Verhältnis annimmt, wenn sich P dem einen der so bestimmten Punkte nähert, null, so müßte er wegen der Symmetrie in Beziehung auf die Abszissenachse auch null werden, wenn sich P dem anderen näherte. Dann könnte das Verhältnis also niemals ∞ werden. Wäre es ∞, so könnte es niemals null werden. Es muß also konstant sein und zwar $= \frac{1}{\cos v}$.

Bezeichnet F_1 den anderen Brennpunkt, so kann man ebenso beweisen, daß entweder die Summe oder die Differenz von FP und F_1P, oder bequemer, daß deren Quadrat

$$u = (FP \pm F_1P)^2$$



konstant bleibt, wenn P sich auf dem Kegelschnitte bewegt. Betrachten wir nämlich u als Funktion eines die Punkte P der Kurve eindeutig bestimmenden Parameters t, so werden, für willkürliche Lagen der Punkte F und F_1, die Werte von u, die wir hier durch das doppelte Vorzeichen unterschieden haben, nur verschiedene Werte derselben Funktion sein, die sich also durch eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche darstellen läßt. Die Verzweigungspunkte dieser Fläche sind jene Punkte, in welchen die beiden Werte von u einander gleich werden, was nur für $FP = 0$ oder für $F_1P = 0$ eintreffen wird. Denn wenn die eine dieser Größen unendlich ist, ist es die andere auch und einer der zwei Werte von u ist dann unendlich, während der andere endlich, also vom ersten verschieden ist. Die einzigen Verzweigungspunkte entsprechen also den Werten von t, die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit den Geraden FI, FJ, F_1I, F_1J liefern, die F und F_1 mit den Kreispunkten I und J der Ebene verbinden. Läßt man den dem Parameter t entsprechenden Punkt einen dieser acht Verzweigungspunkte so umkreisen, daß er nicht gleichzeitig andere umkreist, so ändert sich der Wert von u; umkreist er dagegen zwei und nur zwei Verzweigungspunkte, so bleibt er unverändert. Fallen also zwei Verzweigungspunkte in einem Punkt zusammen, so ist dieser kein Verzweigungspunkt mehr.

Sind nun F und F_1 die Brennpunkte des Kegelschnittes, und zwar die reellen Brennpunkte, so werden die vier genannten Geraden alle den Kegelschnitt berühren, und die acht Verzweigungspunkte fallen also paarweise zusamen, d. h. sie fallen alle ganz weg. Die Funktion u zerfällt somit in zwei verschiedene Funktionen, die wir

$$u_1 = (FP + F_1P)^2 \quad \text{und} \quad u_2 = (FP - F_1P)^2$$

schreiben können. Eine dieser Funktionen wird null, wenn P auf der zweiten Achse der Kurve liegt, nämlich u_2 für die Ellipse, u_1 für die Hyperbel. Die andere kann nicht null werden, muß also konstant bleiben für alle Punkte des Kegelschnittes. In ähnlicher Weise kann man beweisen, daß der Perimeter der *Poncelet*schen Vielecke [45], die einem Kegelschnitte einbeschrieben und einem anderen mit denselben Brennpunkten umbeschrieben sind, konstant bleibt, wenn man alle Seiten mit passenden Vorzeichen rechnet, z. B. positiv, wenn die Kegelschnitte Ellipsen sind.

[58] Ort des Schwerpunktes einer Punktgruppe.[1]) Wir werden hier den Ort des Schwerpunktes S einer beweglichen Gruppe von Punkten $P_1, P_2 \cdots$, denen wir allen dasselbe Gewicht erteilen, dadurch bestimmen, daß wir die Anzahl seiner Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden suchen. Wir bemerken dabei, daß der Schwerpunkt S zweier Punkte P_1 und P_2 der Punkt der Geraden P_1P_2 ist,

1) Die hier genannten Beispiele sind teilweise *E. Holst*s Doktordissertation (Christiania 1882) entnommen.

der in Beziehung auf P_1 und P_2 mit ihrem unendlich fernen Punkt U harmonisch verbunden ist. Wenn der eine Punkt P_1 sich ins Unendliche entfernt, so wird der Schwerpunkt der zwei Punkte mit P_1 zusammenfallen. Wenn auch P_2 unendlich fern ist, ohne mit P_1 zusammenzufallen, so wird U unbestimmt sein, also wird auch der Schwerpunkt S eine willkürliche Lage auf der unendlich fernen Geraden einnehmen können. Diese sondert sich dann aus dem Orte des Schwerpunkts von P_1 und P_2 ab. Wenn dagegen die unendlich fernen Punkte P_1 und P_2 im Berührungspunkte einer Asymptote einer gegebenen Kurve c_m zusammenfallen, wird ihr Schwerpunkt S ein willkürlicher Punkt der Asymptote werden, oder mit P_1 und P_2 zusammenfallen, je nachdem das Verhältnis $\frac{P_1 U}{U P_2}$ für den Fall, daß P_1 und P_2 ins Unendliche rücken, den Grenzwert 1 hat oder nicht. Man erkennt dies am leichtesten, wenn man durch eine projektive Abänderung die unendlich ferne Gerade mit einer anderen Geraden vertauscht. — Ist ein Punkt einer Gruppe oder der Schwerpunkt mehrerer ihrer Punkte unendlich fern, ihre anderen Punkte nicht, so wird der unendlich ferne Punkt beziehungsweise Schwerpunkt der Schwerpunkt der ganzen Gruppe sein.

Seien z. B. die Punkte $P_1, P_2 \cdots$ die Schnittpunkte einer festen Kurve c_m mit den Kurven eines Büschels (k_n). Der Ort der Schwerpunkte ist dann im allgemeinen eine neue Kurve m^{ter} Ordnung, deren Asymptoten mit den Asymptoten von c_m parallel sind. Wenn eine Kurve k_n durch r verschiedene unendlich ferne Punkte von c_m geht, wird die entsprechende Grenzlage des Schwerpunkts ein bestimmter unendlich ferner Punkt sein. Da dieser r Schnittpunkte des allgemeinen Ortes mit der unendlich fernen Geraden ersetzt, so wird in diesem Falle der Ort — abgesehen von $r - 1$ mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallenden Geraden, die lediglich einer einzigen Punktgruppe entsprechen — nur von der Ordnung $m - r + 1$ sein.

Wenn eine Kurve k_n des Büschels eine unendlich ferne Berührung (eine gemeinschaftliche Asymptote) mit c_m hat, so tritt eben der Fall ein, daß der Schwerpunkt der ins Unendliche rückenden Punkte P_1 und P_2 ein willkürlicher Punkt der Asymptote wird. Der Schwerpunkt der ganzen Gruppe wird dann ein beliebiger Punkt einer mit der Asymptote parallelen Geraden sein. Diese sondert sich also, als den Schnittpunkten einer einzigen Kurve k_n entsprechend, aus dem Orte ab, und der Ort des Schwerpunktes der Schnittpunkte der beweglichen Kurven ist dann von der Ordnung $m - 1$.

Setzen wir nun voraus, daß alle Kurven des Büschels, die durch die m unendlich fernen Punkte der Kurve c_m gehen, diese daselbst berühren. Dann wird sich je eine Parallele mit jeder der m Asymptoten der Kurve c_m aus dem gesuchten Orte absondern, und der Ort der Schwerpunkte der wirklich beweglichen Punktgruppe wird also von der

Ordnung 0 sein, d. h.: dieser Schwerpunkt ist ein fester Punkt. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die c_m in ihren unendlich fernen Punkten berührenden Kurven k_n unter sich verschieden sind oder nicht. So werden z. B. die Kegelschnitte eines Büschels, der einen Kreis enthält, einen mit diesem konzentrischen Kreis in Punktgruppen mit einem festen Schwerpunkte schneiden. Wären die Kreise nicht konzentrisch, so würde der Ort eine Gerade sein. — Auf ähnliche Weise findet man, daß eine Schar (ein Büschel) von konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten eine beliebige Kurve in Punktgruppen mit einem festen Schwerpunkte schneidet.

Auch der Satz, daß der Ort des Schwerpunkts der m Schnittpunkte einer Kurve c_m mit einem Büschel paralleler Geraden eine Gerade ist, folgt aus den hier angestellten Betrachtungen. Dieser Satz ist übrigens nur ein Spezialfall des Satzes über die $(m-1)^{\text{te}}$ Polare eines gegebenen Punktes.

[59] Übungen. — 1. Der Ort der Fußpunkte der von einem festen Punkte P aus auf die Tangenten einer Kurve $c_{n,n'}$ von der Ordnung n und der Klasse n' gefällten Senkrechten ist eine Kurve von der Ordnung $2n'$ mit n'-fachen Punkten in P und den zwei Kreispunkten (Fußpunktkurven von P in Beziehung auf $c_{n,n'}$). Ihre genauere Bestimmung wird man später durch den Geschlechtsatz [76] erhalten können.

Ist die Kurve ein Kegelschnitt und P ein Brennpunkt, so zerfällt der Ort in einen Kreis und die zwei Geraden, die P mit den Kreispunkten verbinden.

Die Fußpunktkurven der Punkte P einer Geraden g in Beziehung auf einen Kegelschnitt bilden ein System mit der ersten Charakteristik $\mu = 2$. Die Einhüllende dieser Kurven ist der Kegelschnitt. Wo liegen die dieser Einhüllenden nicht angehörenden Schnittpunkte konsekutiver Kurven [24]?

2. Wie viele Gerade kann man durch einen Punkt P ziehen, die eine Kurve $c_{n,n'}$ so schneiden, daß sie einen — auch in Beziehung auf die Umlaufsrichtuug — gegebenen Winkel mit der Tangente im Schnittpunkt bilden? (Die Anzahl läßt sich dadurch finden, daß man P ins Unendliche rücken läßt; sie wird $n + n'$ sein.)

3. Wie viele Normale kann man von einem gegebenen Punkt P aus auf eine Fläche φ von der Ordnung m, dem Range m' und der Klasse m'' fällen? (Diese Aufgabe ist anders gelöst in [29].) Denken wir uns, der Punkt P sei unendlich fern. Dann sind die Normalen teils jene Geraden, die durch die m'' Punkte der Fläche φ gehen, in denen die Tangentialebene senkrecht auf Geraden, die durch P gehen, steht, teils solche, die selbst unendlich fern sind. Letztere werden Punkte der unendlich fernen Kurve von φ_m mit den Polen der Tangenten in diesen Punkten in Beziehung auf den Kugelkreis verbinden. Die Anzahl solcher durch P gehender Geraden kann man durch Betrachtung des Grenzfalles

finden, in welchem der Kugelkreis durch einen abgeplatteten Kegelschnitt mit zwei Scheiteln ersetzt wird. Dann ist die Aufgabe, projektivisch aufgefaßt, dieselbe wie die Bestimmung der Normalen von einem Punkt P aus an eine ebene Kurve $c_{m,\,m'}$. Sie hat also $m + m'$ Auflösungen. Die gesamte Anzahl der durch P, also auch durch einen willkürlichen Punkt gehenden Normalen der Fläche ist somit $m + m' + m''$.

4. Zu beweisen, daß das Verhältnis der Potenzen der Punkte eines Kreises in Beziehung auf zwei andere Kreise, die ihn in denselben Punkten schneiden, konstant ist.

e) Indirekte Abzählung zusammenfallender Lösungen.

[60] Bestimmung der Anzahl zusammenfallender Lösungen durch Betrachtung eines Spezialfalles. In den meisten der hier behandelten Fälle waren die Abzählungen zusammenfallender Lösungen, wo solche vorkamen, zu einfach, um direkte analytische Herleitung oder die Anwendung solcher allgemeiner Regeln, wie der in Kap. I aufgestellten, zu erfordern. Bisweilen haben wir jedoch bei diesen Abzählungen einen indirekten Weg eingeschlagen, indem wir sie an einen Spezialfall anknüpften. Dies ist an und für sich ebenso erlaubt, wie jede im vorausgehenden behandelte Verwendung von Spezialfällen, wenn man diese nur auf dieselbe Weise sicherstellt: man muß erstens wissen, daß es eine zusammenhängende Menge von Fällen gibt, die dieselbe Abzählung erlauben, und zweitens den benutzten Spezialfall als Grenzfall behandeln.

Als Beispiel nennen wir hier noch den bereits mehrmals (besonders in [12]) behandelten Einfluß eines Doppelpunkts D auf die Klasse einer Kurve von gegebener Ordnung. Diesen könnte man dadurch feststellen, daß man den Fall benutzt, in welchem der Doppelpunkt von zwei sich schneidenden Geraden gebildet wird. Soll dies gestattet sein, so muß man einen Doppelpunkt betrachten, der von zwei sich ändernden, einfachen Kurvenelementen gebildet wird; die Änderung, die dabei besonders in Betracht kommen könnte, würde sich auf die Krümmung der zwei Elemente beziehen. So lange keine der beiden Krümmungen unendlich wird, was beim Übergang des Doppelpunktes in eine Spitze eintritt, und was immer mit dem Auftreten höherer Sigularitäten verbunden sein muß, wird keine weitere Tangente, welche von einem Punkt A, der auf keiner der Tangenten der den Doppelpunkt D bildenden Elemente liegt, ausgeht, mit AD zusammenfallen. Dies ist auch nicht der Fall, wenn der Doppelpunkt von zwei Geraden gebildet wird. Da in diesem Spezialfall zwei von A ausgehende Tangenten an einen in die zwei Geraden ausartenden Kegelschnitt mit AD zusammenfallen, so wird dasselbe im allgemeinen bei der Bildung eines Doppelpunktes der Fall sein. (Vgl. [26], wo wir einem ähnlichen Schluß eine andere Gestalt gegeben haben.)

Daß solche Betrachtungen nicht überflüssig sind — wenn es auch in Fällen, die sich ebenso einfach wie der hier behandelte gestalten, nicht notwendig sein wird, sie ausdrücklich anzustellen — kann man an dem folgenden Beispiel sehen, in welchem es eben nicht erlaubt ist, denselben Spezialfall zu benutzen. Die Tangenten an die zwei Elemente, die einen gewöhnlichen Doppelpunkt D einer Kurve n^{ter} Ordnung bilden, schneiden die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten; sie müssen also Grenzlagen von Wendetangenten einer sich dieser Kurve nähernden Kurve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkt sein, was man übrigens auch aus einer Figur (Fig. 3) ersehen kann, wenn die Elemente der Grenzkurve und die sich ihr nähernde Kurve reell sind. Hier erhebt sich aber die Frage: wie viele Wendetangenten fallen in diesem Grenzfalle mit einer der Tangenten d des Doppelpunktes zusammen? Da einige von ihnen auch in dem in der Figur betrachteten Falle imaginär sein können, darf man aus dieser Figur nur schließen, daß diese Zahl ungerade ist (vgl. [47]). Übrigens sieht man, daß keine andere Wendetangente mit d zusammenfällt, so lange die Krümmung des d berührenden Kurvenelements weder null noch unendlich wird. Die gesuchte Zahl hat also wirklich einen Wert, der z. B. unabhängig von der Ordnung n der Kurve ist. Den Fall, in welchem der d berührende Zweig in eine Gerade ausartet, darf man aber nicht benutzen, und dies gibt sich eben kund auf die für die abzählenden Methoden charakteristische Weise, nämlich dadurch, daß in diesem Falle die Bestimmung der Wendepunkte unendlich viele Lösungen ergibt, indem die Krümmung in jedem Punkte einer Geraden null ist. Dies zeigt eben, daß die Abzählungen, die für andere Doppelpunkte und Annäherungen an diese gelten, nicht für diesen Spezialfall gelten. Hier können wir aber einen anderen Spezialfall benutzen, in welchem ein solches Hindernis nicht eintritt. Aus [20] folgt nämlich, daß eine Kurve vierter Ordnung 24 Wendetangenten hat. Durch Betrachtung einer aus zwei Kegelschnitten bestehenden Kurve findet man dann, daß bei der Bildung eines neuen Doppelpunktes auf einer Kurve n^{ter} Ordnung drei Wendetangenten mit jeder der Tangenten im Doppelpunkte zusammenfallen. Hat die Kurve also d Doppelpunkte, so wird sie $3n(n-2)-6d$ eigentliche Wendetangenten haben. Dieses Ergebnis ist übrigens in allgemeineren einbegriffen, die wir im folgenden Kapitel ganz anders beweisen werden.

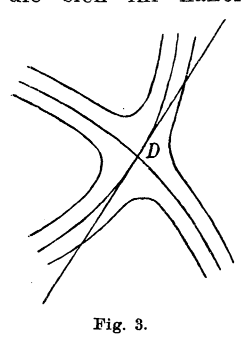


Fig. 3.

[61] Anwendung auf einhüllende Kurven und Flächen. In einem System von ∞^1 Kurven in einer Ebene wollen wir die Anzahl der Berührungspunkte einer Kurve des Systems mit seiner Einhüllenden suchen. Sind die Kurven allgemeine Kurven n^{ter} Ordnung c_n, so gibt es n^2 solche Berührungspunkte, nämlich die Schnittpunkte der

Kurve c_n mit der konsekutiven Kurve. Haben aber alle Kurven des Systems gewisse mehrfache Punkte, so werden mehrere der Schnittpunkte in diese fallen, die Örter dieser Punkte also Teile der eigentlichen Einhüllenden ersetzen. Wir fragen, wie viele der Schnittpunkte in die verschiedenen vielfachen Punkte fallen, oder wie vielfach die Örter dieser vielfachen Punkte als Teile des gesamten Ortes der Schnittpunkte konsekutiver Kurven des Systems zu rechnen sind. Die aufgestellte Frage läßt sich durch Betrachtung des einfachen Falles beantworten, in welchem die Kurve c_n einer Parallelverschiebung, die nur nicht die Richtung einer Tangente in einem mehrfachen Punkt haben darf[1]), unterworfen wird. Die eigentliche Einhüllende besteht dann aus den n' Tangenten, die die Richtung der Parallelverschiebung haben; gleichzeitig bleiben die n Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden fest. Übrig bleiben $n^2 - n' - n$ Schnittpunkte einer Kurve c_n mit der konsekutiven Kurve, welche in die verschiedenen mehrfachen Punkte, die man der Kurve beilegt, fallen müssen. Diese Zahl $n^2 - n - n'$ gibt aber eben die von diesen mehrfachen Punkten herrührende Erniedrigung der Klasse an [12]. Man sieht also, daß in diesem Falle, und daher auch in einem willkürlichen System von ∞^1 Kurven, die alle einen gewissen beweglichen, mehrfachen Punkt haben, die Anzahl der in diesen fallenden Schnittpunkte einer Kurve des Systems mit der konsekutiven Kurve gleich der von diesem Punkt herrührenden Erniedrigung der Klasse ist. Der Ort dieses Punktes ist ebenso vielmal zum vollständigen Ort der Schnittpunkte konsekutiver Kurven mitzuzählen. Der Ort eines Doppelpunktes ist also zweimal, der Ort einer Spitze dreimal, der Ort einer Knotenspitze fünfmal mitzuzählen usw. (Vgl. im folgenden [71].)

Da also in allen Systemen dieselbe Anzahl von Schnittpunkten konsekutiver Kurven in die vielfachen Punkte fallen, bleiben immer $n + n'$ Punkte übrig, die die Berührungspunkte mit der eigentlichen Einhüllenden sein müssen. In der hier gefundenen Zahl $n + n'$ sind jedoch auch die festen Punkte aller Kurven des Systems inbegriffen (z. B. die schon betrachteten unendlich fernen Punkte der parallel verschobenen Kurven).

Da wir hier nur Schnittpunkte zweier konsekutiver Kurven abzählen, müssen zwar die Kurven algebraisch sein, das ∞^1-fache System darf aber wohl durch Transzendente bestimmt werden. Unterwerfen wir z. B. eine algebraische Kurve einer solchen Änderung, daß sie sich selbst beständig ähnlich bleibt, während ihre Punkte unter sich kongruente logarithmische Spiralen mit demselben Pol durchlaufen, so erhält man auf diese Weise eine neue Begründung des in [59], 2 gefundenen Resultats.

1) Wie gewöhnlich brauchen wir in dieser allgemeinen Untersuchung (siehe [9]) den Grenzfall nicht zu beachten, in welchem die Kurven des Systems den Ort eines mehrfachen Punktes berühren. Wir wählen also auch den zur Untersuchung benutzten Spezialfall so, daß wir nicht durch solche Berührung die Anzahl zusammenfallender Schnittpunkte vergrößern.

In ähnlicher Weise kann man die Anzahl der Berührungspunkte einer Fläche eines ∞^2-fachen Systems von Flächen m^{ter} Ordnung φ_m mit der Umhüllungsfläche suchen. Sind diese Flächen allgemeine Flächen m^{ter} Ordnung, so wird eine Fläche des Systems die Umhüllungsfläche in den m^3 Schnittpunkten mit zwei konsekutiven Flächen, die man je durch Änderung eines der zwei Parameter des Systems erhält, berühren. Haben aber alle Flächen des Systems gewisse mehrfache Kurven oder Punkte, so werden die beiden konsekutiven Flächen die gegebene in den letzteren und in Punkten der ersteren schneiden. Wie viele der m^3 Schnittpunkte auf diese Weise absorbiert werden, das hängt von der Beschaffenheit der mehrfachen Kurven und Punkte ab, und läßt sich also durch Betrachtung eines Spezialfalles ermitteln. Dazu könnte man den Fall benutzen, in welchem die Fläche φ_m Parallelverschiebungen in Richtungen unterworfen wird, von denen nur verlangt wird, daß sie zu einer gegebenen Ebene parallel sind. Kennt man aber bereits die auf doppelte Weise (in [29] und [59] 3) gefundene Anzahl $m + m' + m''$ der von einem festen Punkt ausgehenden Normalen von φ_m, so kann man den Spezialfall benutzen, in welchem das System aus ∞^2 um einen festen Punkt P gedrehten Flächen φ_m besteht. Dann sind die Berührungspunkte mit der eigentlichen, aus konzentrischen Kugeln bestehenden Umhüllungsfläche eben die $m + m' + m''$ Fußpunkte der von P ausgehenden Normalen. Diese Zahl, die die nicht von mehrfachen Kurven oder Punkten der Fläche absorbierten Schnittpunkte mit konsekutiven Flächen angibt, wird dann auch in anderen ∞^2-fachen Systemen die Anzahl der Berührungspunkte einer Fläche mit der eigentlichen Umhüllungsfläche angeben.

[62] Andere indirekte Abzählungen zusammenfallender Lösungen. Wenn man keine direkte Abzählung der von gewissen Arten von Singularitäten herrührenden, zusammenfallenden Lösungen einer Aufgabe besitzt, für deren Gesamtzahl von Lösungen man schon einen allgemeinen Ausdruck gefunden hat, so kann man diese Gesamtzahl einem mehrgliedrigen Ausdruck gleichsetzen, dessen verschiedene Glieder teils aus den Anzahlen der unmittelbar vorliegenden (oft „eigentlich“ genannten) Lösungen, teils aus den Anzahlen der betreffenden Singularitäten, mit vorläufig unbestimmten Koeffizienten — den Multiplizitäten der von ihnen herrührenden Lösungen — multipliziert, gebildet sind. Dadurch kann man zunächst eine Erweiterung der in [61] besprochenen Benützung eines Spezialfalles erhalten. Kennt man nämlich in einem solchen die Anzahl sowohl der Lösungen mit bekannten Multiplizitäten als auch derjenigen, deren Multiplizitäten durch die unbekannten Koeffizienten ausgedrückt werden, so gibt die Einsetzung jener Werte eine Gleichung zur Bestimmung dieser Koeffizienten. Hat der Spezialfall einen solchen allgemeineren Charakter, daß die hier als bekannt betrachteten Anzahlen nicht numerisch gegeben sind, sondern

von willkürlich zu wählenden Anzahlen (z. B. Ordnung einer Kurve und Anzahlen solcher Singularitäten, die man ihr willkürlich beilegen kann) abhängen, so wird die Gleichung in Beziehung auf diese Anzahlen eine Identität sein, deren Erfüllung von mehreren, die gesuchten Koeffizienten enthaltenden Gleichungen abhängt. Solche Identitäten kann man auch dadurch erhalten, daß man verschiedene abzählende Methoden benutzt, um dieselbe Anzahl auszudrücken, und nach Identifizierung der verschiedenen so gefundenen Ausdrücke die so erhaltene Gleichung so weit reduziert, daß man den zurückbleibenden Anzahlen unendlich viele (oder wenigstens hinreichend viele), unter sich unabhängige Werte beilegen kann.

Um aus den so erhaltenen Gleichungen die unbekannten Koeffizienten zu finden, ist es nicht notwendig, ebensoviele Gleichungen als Unbekannte zu haben. Die gesuchten Koeffizienten müssen nämlich ihrer Natur nach ganze und positive Zahlen sein. Null kann jedoch ein solcher Koeffizient werden, wenn nicht im voraus feststeht, daß die entsprechende Singularität überhaupt zu Lösungen Anlaß gibt. Dann wird eben diese Frage durch die Bestimmung des Koeffizienten, der die Multiplizität dieser Lösungen angibt, beantwortet: wird der Koeffizient 0, so gibt es keine solche Auflösung.

Um auf diesem Wege eine vollständige mathematische Sicherung der gewonnenen Resultate zu erhalten, muß man sich natürlich versichern, daß die gesuchten Koeffizienten wirklich unabhängig von den geometrischen Anzahlen sind, denen wir verschiedene Werte beilegen. Jedoch ist es befriedigender, wenn man eine direkte Begründung hat, die nicht nur eine solche empirische Bestimmung der Multiplizitäten liefert, sondern auch den Einfluß der Singularitäten erklärt. Eine solche Erklärung läßt sich übrigens gewöhnlich nachher an die empirische Bestimmung anknüpfen.

Um gleich hier durch ein einfaches Beispiel zu zeigen, wie die Anwendung dieser später oft benutzten Methode sich gestaltet, werden wir sie auf eine schon in [29] gelöste Aufgabe anwenden, nämlich auf die Abzählung der von einem Punkt P ausgehenden Normalen einer Kurve von der Ordnung n, der wir d Doppelpunkte und e Spitzen beilegen. Die hier anzustellenden Betrachtungen sind hauptsächlich solche, von welchen wir in [59] 2 und [61] Gebrauch gemacht haben; die Ergebnisse dieser Artikel werden wir daher hier nicht als bekannt betrachten.

Die Klasse der Kurve ist in [12] zu

(1) $$n' = n(n-1) - 2d - 3e$$

bestimmt worden. Als erste Bestimmung werden wir, wie in [59] 2, die von einem unendlich fernen Punkt ausgehenden Normalen abzählen. Daß es deren n' gibt, die nicht auch ins Unendliche rücken, ist evident,

ebenso, daß die unendlich ferne Gerade als Normale den n ins Unendliche gehenden Zweigen entspricht. Deren gibt es also $A \cdot n$, wo A eine unbekannte, ganze, positive Zahl ist. In [59] 2 bemerkten wir, daß es nicht schwierig ist, direkt zu zeigen, daß $A = 1$ ist; hier machen wir aber diese Voraussetzung nicht. Die gesuchte Anzahl drückt sich also durch $n' + An$ aus.

Einen anderen Ausdruck findet man durch Drehung der Kurve in ihrer Ebene um einen nicht unendlich fernen Punkt. Die Kurve schneidet dann die konsekutive in n^2 Punkten, von welchen eine gewisse (wie wir hier annehmen werden, unbekannte) Anzahl B in jeden der d Doppelpunkte, eine andere Anzahl C in jede der e Spitzen fällt. Die übrigen werden die Fußpunkte der gesuchten Normalen sein. Man bekommt also einen neuen Ausdruck für die Anzahl dieser Normalen, nämlich $n^2 - Bd - Ce$. Also ist

$$n' + An = n^2 - Bd - Ce, \tag{2}$$

oder wegen (1)

$$(A - 1)n + (B - 2)d + (C - 3)e = 0. \tag{3}$$

Da man n, d und e Werte beilegen kann, die linear unabhängig sind, muß diese Gleichung identisch sein. Man hat also $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$. Die gesuchte Anzahl ist also $n + n'$.

Andere Beispiele solcher Bestimmungen werden wir später antreffen, wenn uns mehrere, voneinander verschiedene Methoden zu Gebote stehen (siehe z. B. [85], [114]).

f) Umgekehrte Anwendung der Erhaltung der Anzahl.

[63] Anwendung unendlich kleiner Verschiebungen. Die gewöhnliche Anwendung der Methode der Erhaltung der Anzahl beruht auf der Bemerkung, daß die Lösung einer spezielleren Aufgabe oft leichter ist als die einer vorgelegten allgemeineren. Doch kann auch das Entgegengesetzte zutreffen. Dabei ist in erster Linie zu beachten, daß die Lösung der allgemeineren Aufgabe, wenn man sie einmal kennt, wenigstens durch einen Grenzübergang auf einen Spezialfall anwendbar sein muß; daran haben wir schon in [9] gedacht. Es gibt nun solche Klassen von Aufgaben, die an und für sich Schwierigkeiten darbieten, welche wegfallen, wenn man der Aufgabe eine allgemeinere Fassung gibt. Dies wird namentlich eintreten, wenn ein Gebilde gesucht wird, das mehrmals dieselben oder verschiedene Beziehungen zu einem gegebenen Gebilde haben soll. Diese Aufgabe wird erleichtert, wenn das gegebene Gebilde durch zwei verschiedene Gebilde ersetzt wird, auf welche sich die wiederholten oder verschiedenen Bedingungen verteilen. Da sich die ursprüngliche Aufgabe als der Grenzfall der verallgemeinerten darbietet, in dem die gegebenen Gebilde zusammenfallen, hat man nach der Auflösung der all-

gemeinen Aufgabe den Fall zu betrachten, in welchem sie einander unendlich nahe rücken, und muß dann beachten, welche Lösungen im Grenzfall als uneigentlich ausscheiden.

Die sich hier darbietende Methode haben wir eigentlich schon in [61] und [62] benutzt, nämlich bei Anwendung einer unendlich kleinen Drehung zur Bestimmung der Anzahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Normalen oder einer unendlich kleinen Parallelverschiebung zur Bestimmung der Klasse. Der vorhin genannte Zweck solcher unendlich kleiner Änderungen wird besser hervortreten, wenn man die Doppelpunkte oder Schnittpunkte der Kurven mit sich selbst als gesucht betrachtet. Ebenso wird man durch Abzählung der gemeinschaftlichen Tangenten einer Kurve und einer anderen, die durch unendlich kleine Verschiebung aus ihr hervorgeht, die Tangenten, die ihr selbst zweifach angehören, und dadurch die Formel

$$n'(n'-1) = n + 2d' + 3e'$$

finden, wo d' die Anzahl der Doppeltangenten, e' die Anzahl der Wendetangenten einer Kurve bedeutet, die keine anderen singulären Tangenten hat. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten ist nämlich n'^2. Von diesen sind n' jene, die in der Verschiebungsrichtung liegen, n berühren die Kurve in ihren unendlich fernen Punkten, die übrigen haben zu Grenzlagen die Doppeltangenten und die Wendetangenten. Da jedoch die Formel früher bewiesen wurde [13], werden wir hier nicht näher begründen, warum die Wendetangenten eben für drei gemeinschaftliche Tangenten der benachbarten Kurven zu zählen sind.

[64] Mehrfache Sekanten einer Raumkurve. Die hier beschriebene Methode kann zu exakten Abzählungen der mehrfachen Sekanten einer Raumkurve, die wir früher in [33] nur durch Aufstellung gewisser Voraussetzungen über die Natur der Resultate erhielten, benutzt werden[1]). Wie früher bezeichnen wir mit n die Ordnung, mit n' den Rang der Kurve c_n und mit h die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte und legen ihr keine besonderen singulären Punkte bei.

Durch unsere Methode könnten wir die auch schon früher exakt begründeten Formeln

$$n(n-1) = n' + 2h, \tag{1}$$

und

$$t_2 = h + \tfrac{1}{2}n(n-1) \tag{2}$$

wiederfinden, wo t_2 die Anzahl der Bisekanten ist, die zwei gegebene Gerade schneiden. Die Herleitung der ersten Formel würde jedoch nur

1) Diese Anwendungen hat neuerdings Herr *A. Beck* in der Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich, Jahrg. 52, 1907 gemacht, und eben dieser systematische Gebrauch einer Methode, von der man früher nur zerstreute Anwendungen hatte, (die übrigens teilweise von demselben Verfasser herrühren) hat mich veranlaßt, die Methode hier ausdrücklich aufzunehmen.



eine räumliche Umschreibung der in [61] angegebenen Herleitung der planimetrischen Formel sein, aus welcher sie unmittelbar hervorgeht.

Um nun weiter die Ordnung t_3 der Regelfläche zu finden, deren Erzeugende die Kurve c_n dreimal schneiden, fangen wir damit an, die Regelfläche φ von der Ordnung t_2 zu betrachten, deren Erzeugende c_2 zweimal und außerdem noch eine Gerade a schneiden. Verschieben[1]) wir c_n in die Lage c_n', so wird die Kurve c_n' die eben genannte Regelfläche φ in $n \cdot t_2$ Punkten schneiden. Wenn die Verschiebung unendlich klein ist und in der Richtung nach dem unendlich fernen Punkt B stattfindet, verteilen sich diese nt_2 Punkte folgendermaßen:

1. $n-1$ der Punkte fallen in jeden der n Schnittpunkte der Kurve c_n mit der unendlich fernen Ebene; diese, die auf der $(n-1)$-fachen Kurve der Fläche φ liegen, bleiben nämlich bei der Verschiebung ungeändert.

2. Ein Schnittpunkt fällt in jeden der $3t_3$ Schnittpunkte der die Gerade a schneidenden t_3 Trisekanten der Kurve c_n.

3. Ein Schnittpunkt fällt in jeden der u Punkte P der Kurve c_n, in welchen die durch den unendlich fernen Punkt B gehende Gerade PB die Regelfläche φ berührt. Also ist

$$nt_2 = n(n-1) + 3t_3 + u. \tag{3}$$

Die Anzahl u findet man leicht durch Betrachtung des Spezialfalles, in welchem die Gerade a selbst durch den unendlich fernen Punkt B geht. Dann muß entweder die betreffende, durch den Punkt P gehende Bisekante auch durch B gehen, was für $2h$ Punkte P der Fall ist, oder die durch P gehende Tangentialebene der Fläche φ muß auch a enthalten, also eine der n' durch a gehenden Tangentialebenen an c_n sein. Durch den Berührungspunkt einer solchen gehen außer der Tangente $n-2$ Bisekanten, die a schneiden. Also ist

$$u = 2h + n'(n-2). \tag{4}$$

Setzt man die Ausdrücke (2), (4) und (1) für die Größen t_2, u und n' in (3) ein, so erhält man

$$t_3 = (n-2)\left(h - \tfrac{1}{6}n(n-1)\right). \tag{5}$$

Die Anzahl u könnte auch durch die soeben behandelte Methode gefunden werden. Da wir aber u anders bestimmt haben, ziehen wir es vor, die Anwendung der Methode noch durch ein anderes Beispiel zu erläutern.

Suchen wir die Anzahl v der Tangenten einer Raumkurve c_n, die diese Kurve noch in einem weiteren Punkt schneiden. — Die Tangenten der Raumkurve bilden eine abwickelbare Fläche ψ von der Ordnung n'. Verschieben wir die Kurve c_n unendlich wenig gegen einen unendlich

1) Man kann natürlich der Abänderung leicht eine projektive Form geben; dies gilt auch für die vorigen Beispiele.



fernen Punkt B, so wird sie in ihrer neuen Lage ψ in nn' Punkten schneiden. Diese werden sich so verteilen:

1. In jeden der n unendlich fernen, also festliegenden Punkte der Kurve fallen zwei dieser Schnittpunkte, weil c_n Rückkehrkurve der Fläche ψ ist.

2. In jeden der v Schnittpunkte der gesuchten Tangenten mit c_n fällt einer.

3. In jeden der Berührungspunkte der n'' vom unendlich fernen Punkt B ausgehenden Schmiegungsebenen [7] fällt eine gewisse Anzahl, sagen wir A, der genannten Schnittpunkte.

Also ist

$$nn' = 2n + v + An''$$

oder

$$v = n(n' - 2) - An''.$$

Daß hier $A = 2$ ist, ersieht man daraus, daß die vom Punkt B ausgehenden Schmiegungsebenen an c_n auch die verschobene Kurve berühren. Leichter findet man dieses Resultat durch Betrachtung des Falles $n = 3$; denn auch auf diesen ist unsere Bestimmung anwendbar. Dann ist [25] $n' = 4$, $n'' = 3$, $v = 0$. Man findet also $A = 2$, und die allgemeine Formel wird

$$v = n(n' - 2) - 2n''.$$

Später [84] werden wir sehen, daß $n'' = 3(n' - n)$ ist. Also ist

$$v = nn' - 6n' + 4n. \tag{6}$$

Wollte nun weiter die Methode dazu benutzt werden, auch die Anzahl t_4 der Quadrisekanten zu bestimmen, so wären gewisse Zwischenresultate mittels derselben Methode zu finden. Übrigens ist ersichtlich, daß ein Nachweis der bloßen Möglichkeit, die Zahl t_4 durch sie als Funktion von n und n' oder n und h zu bestimmen, genügen würde. Denn nur dies setzten wir bei der früheren Bestimmung voraus.

Man kann übrigens dieselbe Methode benutzen, um die Anzahl der dreifachen Tangentialebenen der Kurven und die Anzahl der Schmiegungsebenen, die die Kurve noch in einem anderen Punkt berühren, zu bestimmen; weiter um dreifache Tangentialebenen einer Fläche usw. zu finden. Eine Schwierigkeit kann dabei, wie in der eben gelösten Aufgabe, die Bestimmung der Anzahl zusammenfallender Lösungen darbieten; aber eben wenn man diese Anzahlen durch unbestimmte Koeffizienten ersetzt, kann diese Methode oft dazu benutzt werden, andere Bestimmungen, die an derselben Schwierigkeit leiden, zu vervollständigen. Übrigens werden wir auch andere Mittel zur Lösung der verschiedenen hier genannten Aufgaben kennen lernen.

Drittes Kapitel.

Geschlechtsätze und Anwendungen.

a) Geschlecht einer Kurve.

[65] Herleitung des allgemeinen Geschlechtsatzes. Zu den für Abzählungen wertvollsten Sätzen gehören sowohl der *Riemann*sche Satz über die Erhaltung des sogenannten Geschlechts einer algebraischen Kurve bei Transformationen, die in beiden Richtungen eindeutig sind ((1, 1)-Transformationen), als auch eine Erweiterung dieses Satzes, die auch mehrdeutige Transformationen umfaßt. Letztere bietet sich zwar gewissermaßen als eine Anwendung des später herzuleitenden *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes dar [126]. So bewiesen wird aber dieser allgemeine Geschlechtsatz seine volle Tragweite nicht erhalten; es wird dann namentlich nicht hervortreten, wie bei den Anwendungen des allgemeinen Geschlechtsatzes die Abzählungen zusammenfallender Lösungen ohne Untersuchung der Ordnung unendlich kleiner Größen ausgeführt werden; und auf den *Riemann*schen Geschlechtsatz kommt man dann gar nicht. Aus diesen Gründen lohnt sich eine selbständige Herleitung des allgemeinen Geschlechtsatzes, die unmittelbar den einfachen umfaßt und den genannten vorteilhaften Umstand hervortreten läßt.

Zwei algebraische Kurven c_1 und c_2 von den Ordnungen n_1 und n_2 sollen sich so auf algebraisch ausdrückbare Weise entsprechen, daß jedem Punkt P_1 von c_1 α_2 Punkte P_2 von c_2 und jedem Punkt P_2 von c_2 α_1 Punkte P_1 von c_1 entsprechen. Den mit einem mehrfachen Punkt der einen Kurve, z. B. c_1, zusammenfallenden und verschiedenen Elementen angehörigen Punkten werden im allgemeinen verschiedene Gruppen von α_2 Punkten entsprechen, was man z. B. aus dem (1, 1)-deutigen Entsprechen zweier ebener reziproker Polarkurven ersieht (vgl. [69]): den in einen Doppelpunkt fallenden zwei Punkten der einen Kurve werden z. B. auf der reziproken Polarkurve die getrennten Berührungspunkte einer Doppeltangente entsprechen. Dagegen werden immer konsekutiven, d. h. zu demselben Elemente gehörenden [10] Punkten P_1 und Q_1 der Kurve c_1 auch α_2 Paare konsekutiver Punkte P_2 und Q_2 entsprechen; denn sonst würden, wenn Q_1 nicht eben der Mittelpunkt des Elements ist und man P_1 mit Q_1 zusammenfallen läßt, nicht alle α_2 dem Punkte P_1 entsprechenden Punkte P_2 mit den α_2 Punkten Q_2 zusammenfallen können, die Q_1 entsprechen. Für einzelne Punkte A_1 der Kurve c_1 kann es aber sehr wohl geschehen, daß durch das Zusammenfallen des beweglichen Punktes P_1 mit A_1 etwa β_2 der entsprechenden α_2 Punkte P_2 auf demselben Elemente der Kurve c_2 zusammenfallen.

Nur ein solches Zusammenfallen konsekutiver Punkte, nicht das zweier Punkte, die verschiedenen Elementen angehören, werden wir, hier und im folgenden, als Koinzidenz von Punkten einer Kurve bezeichnen. — Diese Bemerkungen gelten natürlich auch dann, wenn man c_1 mit c_2 vertauscht.

Wir legen nun die beiden Kurven, die wir vorläufig als eben voraussetzen, in dieselbe Ebene, und wählen in dieser Ebene (Fig. 4) zwei feste Punkte A_1 und A_2 so, daß die Gerade $A_1 A_2$ weder eine der Kurven berührt, noch durch mehrfache Punkte von c_1 oder c_2 oder durch solche Punkte geht, denen koinzidierende Punkte der anderen Kurve entsprechen, oder in denen mehrere einem Punkt der anderen Kurve entsprechende Punkte koinzidieren. Wir verbinden A_1 mit dem beweglichen Punkt P_1 der Kurve c_1 und A_2 mit den entsprechenden Punkten P_2 von c_2 und werden uns mit dem Orte c_3 des Schnittpunktes P_3 der Geraden $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$ beschäftigen.

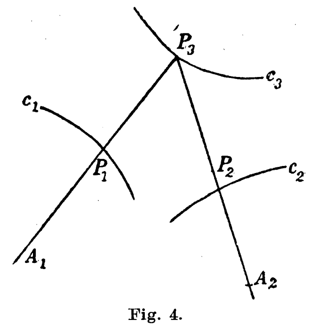


Fig. 4.

Durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer durch A_1 oder A_2 gehenden Geraden [18] findet man, daß dieser Ort von der Ordnung $n_3 = n_1 \alpha_2 + n_2 \alpha_1$ ist und einen $n_2 \alpha_1$-fachen Punkt in A_1 und einen $n_1 \alpha_2$-fachen Punkt in A_2 hat. Die $n_2 \alpha_1$ Tangenten in A_1 gehen durch die n_2 Gruppen von α_1 Punkten P_1, die den Schnittpunkten von c_2 mit $A_1 A_2$ entsprechen, und ebenso sind die Tangenten in A_2 bestimmt. Daß die durch A_1 und A_2 gehenden Elemente, als Punktörter betrachtet, einfach sind, folgt daraus, daß jedes Element die Gerade $A_1 A_2$ nur in einem Punkt schneidet. Daß dieselben Elemente auch als Tangentenörter betrachtet einfach sind, folgt aus *Halphens* Satz [13], denn ihre Tangenten in A_1 (oder A_2) schneiden c_3 nur in $n_2 \alpha_1 + 1$ (oder $n_1 \alpha_2 + 1$) Punkten, die mit $A_1 (A_2)$ zusammenfallen (vgl. [18]).

Statt der Klasse n_3' der Kurve c_3 werden wir die Summen $n_3' + \sum(\nu_3 - 1)$ aufsuchen, wo ν_3 die Punktmultiplizität eines beliebigen Elementes dieser Kurve ist, und wo sich die Summe $\sum$ über alle mehrfachen Elemente zu erstrecken hat. Ob man dabei auch einfache Elemente mitnimmt, ist gleichgültig, weil für ein solches $\nu_3 = 1$ ist. Die entsprechende Bedeutung soll $\sum(\nu - 1)$ auch für andere Kurven haben.

Nach *Halphens* Satz ist für eine beliebige Kurve

$$(1) \qquad n' + \sum(\nu - 1) = \sum(\varrho - 1),$$

wo ϱ die Anzahl konsekutiver Schnittpunkte einer durch einen beliebigen Punkt B der Ebene gehenden Geraden bezeichnet, und wo $\sum$ über alle Elemente aller Schnittpunkte aller durch B gehenden Geraden

genommen werden darf, weil jene, für welche $\varrho = 1$ ist, nur den Beitrag 0 ergeben.[1])

Um die der Kurve c_3 zugehörige Summe $\sum(\varrho - 1)$ zu finden, können wir den Punkt B nach A_1 verlegen. Dann werden wegen der einfachen Berührung mit den $n_2\alpha_1$ durch A_1 gehenden Elementen die $n_2\alpha_1$ Tangenten in A_1 je zweimal unter n_3' und also auch unter $\sum(\varrho_3 - 1)$ mitzuzählen sein. Betrachten wir weiter einen Punkt P_1 von c_1, in welchem ϱ_1 konsekutive Schnittpunkte von c_1 mit $A_1 P_1$ zusammenfallen, und nehmen wir an, daß β_2 der entsprechenden Punkte P_2 konsekutive Punkte von c_2 werden, so wird wegen des Entsprechens dieser Punkte dieselbe Gerade $A_1 P_1$ die den beiden Kurven c_1 und c_2 entsprechende Kurve c_3 in $\varrho_1\beta_2$ konsekutiven Punkten P_3 schneiden, also den Beitrag $\varrho_1\beta_2 - 1$ zu der Summe $\sum(\varrho_3 - 1)$ liefern. Also ist

$$\sum(\varrho_3 - 1) = 2n_2\alpha_1 + \sum(\varrho_1\beta_2 - 1). \tag{2}$$

Ganz ebenso findet man, wenn eine willkürliche Gerade durch A_2 die Kurve c_2 in ϱ_2 konsekutiven, mit dem Punkt P_2 zusammenfallenden Punkten schneidet und β_1 der P_2 entsprechenden Punkte zu P_1 konsekutiv sind,

$$\sum(\varrho_3 - 1) = 2n_1\alpha_2 + \sum(\varrho_2\beta_1 - 1). \tag{3}$$

Durch Gleichsetzen dieser Ausdrücke findet man

$$2n_2\alpha_1 + \sum(\varrho_1\beta_2 - 1) = 2n_1\alpha_2 + \sum(\varrho_2\beta_1 - 1). \tag{4}$$

Die beiden Summen, die über alle Paare entsprechender Punkte P_1 und P_2, für welche $\varrho_1\beta_2 - 1$, beziehungsweise $\varrho_2\beta_1 - 1$, von 0 verschieden ist, zu erstrecken sind, lassen sich über alle entsprechenden Punktepaare erstrecken. Dadurch erhält man die folgenden Umschreibungen

$$\sum(\varrho_1\beta_2 - 1) = \sum\beta_2(\varrho_1 - 1) + \sum(\beta_2 - 1) = \alpha_2\sum(\varrho_1 - 1) + \sum(\beta_2 - 1), \tag{5}$$

$$\sum(\varrho_2\beta_1 - 1) = \sum\beta_1(\varrho_2 - 1) + \sum(\beta_1 - 1) = \alpha_1\sum(\varrho_2 - 1) + \sum(\beta_1 - 1); \tag{6}$$

denn die Summe aller einem Punkt P_1 entsprechenden, in Gruppen von β_2 Punkten zusammenfallenden Punkte P_2 ist α_2, und ebenso ist α_1 die Gesamtzahl der P_1 entsprechenden Punkte P_2.

Durch Einsetzen in (4) findet man

$$\sum(\beta_2 - \beta_1) = \alpha_1\left(\sum(\varrho_2 - 1) - 2n_2\right) - \alpha_2\left(\sum(\varrho_1 - 1) - 2n_1\right). \tag{7}$$

---

1) Projiziert man die Kurve von dem Punkt P aus auf eine Gerade und benutzt man die Projektion zur Darstellung der Kurve durch eine *Riemann*sche Fläche, so werden die dem Wert $\varrho = 2$ entsprechenden Punkte dieser Fläche ihre einfachen Verzweigungspunkte sein. Man nennt $\sum(\varrho - 1)$ die Anzahl der Verzweigungspunkte und drückt dadurch aus, daß ein einem willkürlichen Wert von ϱ entsprechender Punkt für $\varrho - 1$ Verzweigungspunkte zu zählen ist.

Die Faktoren von α_1 und α_2 hängen hier beziehungsweise nur von den Kurven c_2 und c_1 ab, sind also zwei den Kurven zugehörige Zahlen. Man setzt für eine willkürliche Kurve c_n

$$(8) \qquad \sum(\varrho - 1) - 2n = 2(p-1),$$

und nennt den dadurch bestimmten Wert von p das Geschlecht der Kurve, die man dann oft durch c_n^p bezeichnet. Wenn man durch Benutzung von (1) zwischen den Verzweigungspunkten unterscheidet, die den durch das Projektionszentrum B gehenden Tangenten und den mehrfachen Elementen entsprechen, wird das Geschlecht durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$(9) \qquad 2(p-1) = n' + \sum(\nu - 1) - 2n.$$

Durch Einführung des Geschlechts p_1 und p_2 der Kurven c_1 und c_2 gibt die Formel (7)

$$(10) \qquad \sum(\beta_2 - \beta_1) = 2\alpha_1(p_2 - 1) - 2\alpha_2(p_1 - 1).$$

Der durch diese Formel ausgedrückte Satz ist der allgemeine Geschlechtsatz.

Den sich einfach entsprechenden Punkten P_1 und P_2 der einander (α_1, α_2)-deutig entsprechenden Kurven c_1 und c_2 gehören die Werte $\beta_1 = \beta_2 = 1$ zu. Sie werden also im Ausdrucke $\sum(\beta_2 - \beta_1)$ gar nicht mitgezählt. Wenn dagegen zwei der α_2 einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte in P_2 zusammenfallen, während nur einer der P_2 entsprechenden Punkte in P_1 fällt, gehören einem solchen Punktepaare die Werte $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$ zu; es wird also zu $\sum(\beta_2 - \beta_1)$ den Beitrag 1 liefern. Umgekehrt wird ein Punktepaar P_1 und P_2 den Beitrag -1 liefern, wenn einer der P_1 entsprechenden Punkte in P_2 fällt, zwei der P_2 entsprechenden in P_1. Setzt man nun voraus, daß das Zusammenfallen mehrerer der P_1 (oder P_2) entsprechenden Punkte P_2 (oder P_1) nur auf eine dieser Arten geschehen kann, und bezeichnet man die Anzahl der Koïnzidenzen zweier einem Punkt P_1 entsprechender Punkte P_2 mit η_2 und die Anzahl der Koinzidenzen zweier einem Punkt P_2 entsprechender Punkte P_1 mit η_1, so erhält man aus (10)

$$(11) \qquad \eta_2 - \eta_1 = 2\alpha_1(p_2 - 1) - 2\alpha_2(p_1 - 1).$$

Da im allgemeinen, d. h., wenn nicht besondere Bedingungen erfüllt sind, das Zusammenfallen nur auf die letztgenannten zwei Arten stattfindet, kann man (11) als die allgemeine Formel betrachten, die auch auf andere Fälle anwendbar ist, wenn man diese als Grenzfälle betrachtet [9]. Die Formel (10), die man auch in solchen Fällen unmittelbar anwenden kann, macht jedoch einen solchen Grenzübergang überflüssig: ein Punktepaar P_1, P_2, dem die Werte β_1 und β_2 entsprechen, liefert für $\beta_2 > \beta_1$, den Beitrag $(\beta_2 - \beta_1)$ zu η_2 und für $\beta_1 > \beta_2$ den Beitrag $(\beta_1 - \beta_2)$ zu η_1 und ist für $\beta_1 = \beta_2$ gar nicht mitzuzählen.

[66] Der *Riemann*sche Geschlechtsatz, Kurven vom Geschlechte 0. Wenn die Punkte der Kurven c_1 und c_2 sich gegenseitig eindeutig entsprechen, ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, und, da hier keine der genannten Arten von Zusammenfallen möglich ist, $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Die Formel (11) gibt also $p_1 = p_2$, d. h. die beiden Kurven sind von demselben Geschlecht. (Der *Riemann*sche Geschlechtsatz).

Eine Gerade ist vom Geschlecht $p = 0$ (denn $\sum(\varrho - 1) = 0$, $n = 1$, also $2p - 2 = -2$). Eine notwendige Bedingung dafür, daß die Punkte einer Kurve c_n gegenseitig eindeutig denjenigen einer Geraden entsprechen, besteht also darin, daß ihr Geschlecht 0 ist. Daß diese Bedingung für eine nicht zusammengesetzte Kurve auch hinreichend ist, werden wir hier vorläufig für den Fall beweisen, in welchem die Kurve keine anderen mehrfachen Punkte als d Doppelpunkte und e Spitzen hat. Dann ist [12]

(1) $$n' = n(n-1) - 2d - 3e$$

und da eine Spitze ein durch die Zahlen $\nu = 2$, $\nu' = 1$ charakterisiertes Element ist, gibt die Gleichung [65] (9)

(2) $$2(p-1) = n' + e - 2n.$$

Daraus folgt

(3) $$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - e,$$

und, wenn $p = 0$ ist,

$$d + e = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Durch diese $(d + e)$ und $(n - 3)$ andere Punkte der Kurve c_n kann man also einen Büschel von Kurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, die c_n in

$$(n-1)(n-2) + n - 3 = n(n-2) - 1$$

festen und noch in einem beweglichen Punkt schneiden. Dieser wird den Kurven des Büschels, also auch den Schnittpunkten einer festen Geraden mit den Tangenten dieser Kurven in einem der festen Punkte des Büschels, gegenseitig eindeutig entsprechen.

Durch die Voraussetzung, daß c_n nicht zusammengesetzt ist, wird die Möglichkeit ausgeschlossen, daß die Kurven des Büschels mit c_n teilweise zusammenfallen. (Vergleiche übrigens [48] 1).

In [71] werden wir sehen, daß jeder singuläre Punkt einer algebraischen Kurve als ein Grenzfall betrachtet werden kann, in welchem gewöhnliche Doppelpunkte und Spitzen zusammengefallen sind und dadurch die vorgelegte Singularität gebildet haben. Dadurch wird es möglich werden, die allgemeine Gültigkeit des aufgestellten Satzes nachzuweisen.

[67] Geschlecht einer zusammengesetzten Kurve. Da eine nicht zusammengesetzte Kurve n^{ter} Ordnung höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte und Spitzen (die in dieser Beziehung nur als entartete

Doppelpunkte zu betrachten sind) haben kann [37], zeigt der Ausdruck [66] (3) (und die Schlußbemerkung in [66]), daß das Geschlecht einer nicht zusammengesetzten Kurve niemals negativ werden kann. Was das Geschlecht einer zusammengesetzten Kurve betrifft, so folgt aus [65] 9, daß, wenn man mit $p_1, p_2, \ldots p_k$ das Geschlecht gewisser Kurven bezeichnet, das Geschlecht p der aus ihnen zusammengesetzten Kurve durch

$$2(p-1) = 2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1) + \cdots + 2(p_k - 1)$$

oder

$$p = p_1 + p_2 + \cdots p_k - k + 1$$

bestimmt sein wird.

[68] Umkehrung des *Riemann*schen Geschlechtsatzes für $p > 1$; Satz über Kurven vom Geschlechte $p = 1$. — Wir werden die allgemeinen Gleichungen [65] (10) und (11) auf den Fall anwenden, in welchem die Kurven von demselben Geschlecht ($p_1 = p_2 = p$) sind, und $\alpha_1 = 1$, also auch in (10) $\beta_1 = 1$ und in (11) $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = \sum(\beta_2 - 1)$ ist. Da letztere Zahl jedenfalls positiv oder 0 ist, so folgt aus der genannten Geschlechtsformel:

$$2(p-1)(1-\alpha_2) \geqq 0.$$

Für $p > 1$ wird dies nur dann möglich sein, wenn $\alpha_2 = 1$ ist, d. h., das Entsprechen der Punkte muß gegenseitig eindeutig sein, was eine begrenzte Umkehrung des *Riemann*schen Geschlechtsatzes ist. In diesem Falle wird η_2 von selbst 0. Für $p = 1$ wird, unabhängig von α_2, der Wert $\eta_2 = 0$. Also: in einer ∞^1-fachen Schar von Punktgruppen (P_2) auf einer Kurve vom Geschlecht 1, die einer Schar einzelner Punkte (P_1) derselben Kurve oder einer anderen Kurve vom Geschlecht 1 gegenseitig eindeutig entsprechen, gibt es keine Gruppe, in welcher zwei Punkte zusammenfallen[1]). Dieser Umstand leuchtet von selbst in dem Fall ein, in dem die Gruppen P_2 aus den vier Punkten einer Kurve dritter Ordnung bestehen, deren Tangenten sich im beweglichen Punkt P_1 derselben Kurve schneiden. Er konnte daher schon in [51] zum Beweis dafür benutzt werden, daß das Doppelverhältnis der vier Tangenten konstant bleibt.

[69] Singuläre Tangenten einer als Punktort gegebenen Kurve. Wir haben früher bemerkt, daß eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung ein allgemeiner Begriff ist, und daß man von diesem ausgehend die Kurve näher dadurch charakterisieren kann, daß man ihr gewisse singuläre Punkte auferlegt [5]. Ein solcher wird aus den durch ihn gehenden Elementen gebildet, und das erste Mittel zur Charakterisierung eines

---

1) Die Korrespondenz wird daher in α_2 (1, 1)-Korrespondenzen zerfallen. (Vgl. [127]).



Elements ist seine Punktmultiplizität. Dadurch haben wir bereits in [65] (9) das Geschlecht p der Kurve bestimmt. Betrachten wir nun die einer gegebenen Kurve c_n dualistisch entsprechende Kurve $c_{n'}$, d. h. jene Kurve, die in einem gewöhnlichen (linearen) Linienkoordinatensystem durch die Gleichung dargestellt wird, die in einem Punktkoordinatsystem die gegebene c_n darstellt, so entsprechen sich die Punkte dieser Kurven gegenseitig eindeutig, jedoch so, daß den verschiedenen Elementen, die einen mehrfachen Punkt der einen Kurve bilden, wenn sich die Elemente nicht berühren, verschiedene Punkte der anderen entsprechen werden. Einem Element von c_n mit der Punktmultiplizität ν und der Tangentenmultiplizität ν' wird auf $c_{n'}$ ein Element mit der Punktmultiplizität ν' und der Tangentenmultiplizität ν entsprechen. Man hat also, da die Klasse n' der Kurve c_n die Ordnung der Kurve $c_{n'}$ ist,

$$2(p-1) = n' + \sum(\nu - 1) - 2n = n + \sum(\nu' - 1) - 2n',$$

oder

$$\sum(\nu' - 1) - \sum(\nu - 1) = 3(n' - n). \tag{1}$$

Wir haben früher [12] gesehen, wie man die Klasse n' einer als Punktort gegebenen Kurve finden kann. Die Formel (1) wird nun solche Elemente bestimmen, deren Tangentenmultiplizität $\nu' > 1$ ist. Diese Formel zeigt bereits, daß die Kurve c_n im allgemeinen, nämlich schon dann, wenn man ihr keine singulären Punkte beilegt, singuläre Tangenten haben muß. In diesem Fall ist nämlich $n' = n(n-1)$ und für alle Elemente $\nu = 1$, also $\sum(\nu' - 1) = 3n(n-2)$. Es ist auch offenbar, daß ein Punktort im allgemeinen Elemente haben muß mit der Tangentenmultiplizität $\nu' = 2$. Die Tangente in einem solchen, eine Wendetangente, schneidet nämlich die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten, und diese zweifache Bedingung wird von einer endlichen Anzahl unter den ∞^2 Geraden der Ebene erfüllt. Dagegen hat die Kurve im allgemeinen kein Element mit höheren Tangentenmultiplizitäten. Gibt es jedoch solche, für welche $\nu' > 2$ ist, so kann man sie bei der Abzählung als Komplexe von Wendetangenten auffassen und, $\sum(\nu' - 1) = e'$ setzend, e' die Anzahl der Wendetangenten nennen. Ebenso setzen wir $\sum(\nu - 1) = e$ und nennen e die Anzahl der Spitzen (für die $\nu = 2, \nu' = 1$ ist. Vgl. [13]). Die Formel (1) gibt dann

$$e' - e = 3(n' - n). \tag{2}$$

Außer Wendetangenten hat eine als Punktort gegebene Kurve im allgemeinen auch Doppeltangenten, denn es ist eine zweifache Bedingung, daß zweimal zwei der Schnittpunkte mit einer Geraden zusammenfallen; sonst hat sie im allgemeinen keine anderen singulären Tangenten. Die Anzahl d' der Doppeltangenten läßt sich, da wir schon n, n' und e' kennen, im allgemeinen, d. h., wenn man der als Punktort

gegebenen Kurve keine anderen mehrfachen Tangenten beilegt, durch die Formel

$$n = n'(n' - 1) - 2d' - 3e'$$

bestimmen (siehe [13](4) für $f = 0$), wobei zwar einige der d' Doppeltangenten, wie einige der e' Wendetangenten von Tangenten in den singulären Punkten, die wir der Kurve beigelegt haben, absorbiert werden können. Für e' haben wir hierfür bereits den Ausdruck $e' = \sum(\nu' - 1)$ kennen gelernt; daß weiter eine k-fache Tangente für $\frac{1}{2}k(k - 1)$ der d' Doppeltangenten zu zählen sein wird, ist offenbar; in [74] werden wir ein allgemeines Mittel kennen lernen, um den Beitrag einer Tangente in einem vollständig gegebenen singulären Punkt der als Punktort gegebenen Kurve zu d' zu finden, ohne direkt die in [13] gegebene infinitesimale Regel zu benutzen.

[70] *Plücker*sche Gleichungen. In [69] haben wir die Kurve als Punktort vorausgesetzt. Alle ihre verschiedenen singulären Punkte mußten ihr dann ausdrücklich beigelegt werden und dienten dazu, erstens ihre Klasse, wie in [12], und sodann die Anzahlen der allgemein vorkommenden Wendetangenten und Doppeltangenten zu finden. In ähnlicher Weise könnte man von der Bestimmung der Kurve als Tangentenort (Einhüllende) ausgehen. Dann kennt man ihre Klasse n' und muß ihr im übrigen etwaige singuläre Tangenten ausdrücklich beilegen; durch die den obigen dualistisch entsprechenden Formeln kann man sodann ihre Ordnung n und die Anzahlen e und d der nun — wie das Dualitätsprinzip zeigt — allgemein vorkommenden Spitzen und Doppelpunkte finden.

Diese beiden Betrachtungsweisen bieten den für abzählende Untersuchungen wichtigen Vorteil dar, daß sie sichere Anhaltspunkte dafür geben, was man in jeder Aufgabe als allgemein und als speziell betrachten muß [5]. Dieser Vorteil läßt sich nicht unmittelbar durch die *Plücker*schen Formeln, die wir jetzt entwickeln werden, erzielen; diese umfassen aber auf eine übersichtliche Weise die beiden im vorigen dargelegten Gesichtspunkte. Dies wird dadurch erreicht, daß man der Kurve gleichzeitig die allgemeinen Singularitäten eines Punktorts, nämlich d' Doppeltangenten und e' Wendetangenten, sowie die allgemeinen Singularitäten eines Tangentenorts, nämlich d Doppelpunkte und e Spitzen beilegt. Dann bekommt man die drei Formeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} n' = n(n-1) - 2d - 3e, \\ n = n'(n'-1) - 2d' - 3e', \\ e' - e = 3(n' - n), \end{cases}$$

und außerdem zur Bestimmung des Geschlechts

$$(2) \qquad 2(p-1) = n' + e - 2n = n + e' - 2n',$$



wo die zwei Ausdrücke wegen der letzten Gleichung (1) identisch sind. Statt dieser Ausdrücke wendet man oft die folgenden, aus (1) und (2) abzuleitenden ([66], 3) an

(3) $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = d - e = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - d' - e'.$

In dem ersten dieser Ausdrücke hat eine Spitze, die, punktgeometrisch betrachtet, nur eine Spezialform eines Doppelpunktes ist, denselben Einfluß auf das Geschlecht wie ein gewöhnlicher Doppelpunkt, in dem letzteren eine Wendetangente denselben Einfluß wie eine Doppeltangente. Die hier genannten Formeln dienen dazu, wenn drei der Zahlen n, n', d, d', e, e', p, gegeben sind, die übrigen zu finden.

Die *Plücker*schen Gleichungen gelten ebensowohl von zusammengesetzten als auch von nicht zusammengesetzten Kurven. Nur darf kein Teil der Kurve eine Gerade oder ein Punkt sein; bei der Herleitung hat man nämlich die Kurve bald als Punktort, bald als Tangentenort betrachtet, und die erste Auffassung kann nicht auf einen Punkt, die zweite nicht auf eine Gerade angewandt werden. Von den Ausdrücken (3) für das Geschlecht ist nur der erste auf Gerade, nur der zweite auf Punkte anwendbar.

[71] *Plücker*sche Äquivalente. Eben weil man bei der Wahl der *Plücker*schen Zahlen einen doppelten Ausgangspunkt gewählt hat, ist eine Kurve mit gegebenen *Plücker*schen Zahlen kein allgemeiner Begriff, der auch die Kurven mit zusammengesetzten Singularitäten so als Spezialfälle umfaßte, daß die Eigenschaften dieser Kurven aus denjenigen der Kurven, die nur *Plücker*sche Singularitäten besitzen, unmittelbar als Grenzfälle hervorgehen würden. Die Grenzübergänge werden sich verschiedentlich gestalten, je nachdem man die Kurven mit den *Plücker*schen Zahlen n, d, e, n', d', e' als Punktörter durch die Ordnung n und die Anzahlen d und e der Doppelpunkte und Spitzen, die man ihnen beilegt, oder als Tangentenörter durch n', d', e' charakterisiert. (Siehe [5]).

Wenn man sich aber auf die *Plücker*schen Gleichungen [70] (1) selbst und auf die dazu gehörige Bestimmung des Geschlechts p [70] (2) begrenzt, so kann man jede mögliche Singularität einer algebraischen ebenen Kurve durch Zahlen $\delta, \varepsilon, \delta', \varepsilon'$ charakterisieren, die angeben, wie vielmal die betreffende Singularität beziehungsweise in den Zahlen d, e, d', e' mitzuzählen ist. Wie diese „*Plücker*schen Äquivalente" zu bestimmen sind, geht aus unserer Herleitung der Gleichungen hervor. Ein Element mit der Punktmultiplizität ν und der Tangentenmultiplizität ν' wird [69] die Äquivalente $\varepsilon = \nu - 1$, $\varepsilon' = \nu' - 1$ haben. Um sodann das Äquivalent δ eines mehrfachen Punkts A, der aus mehreren sich schneidenden oder berührenden Elementen gebildet werden kann, zu finden, sucht man mittels der in [12] angegebenen infinitesimalen Methode die von diesem Punkt bewirkte Erniedrigung der Klasse. Diese wird $2\delta + 3\varepsilon$ sein, wo jetzt ε die Summe der Äquivalente ε

der verschiedenen durch den Punkt gehenden Elemente ist. Daß der so bestimmte Wert von δ ganzzahlig wird, beruht darauf, daß die durch den Punkt A verursachte Erniedrigung der Klasse ungerade oder gerade ist, je nachdem ε ungerade oder gerade ist. Dies gilt zunächst für ein Element, das wir, wie in [10], durch die Ausdrücke

$$(1) \qquad x = t^{\nu}, \; y = b_1 t^{\mu_1} + b_2 t^{\mu_2} + \cdots$$

darstellen, wo $\nu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ keinen allen diesen Zahlen gemeinschaftlichen Teiler haben. Setzen wir hier voraus, daß die Koeffizienten $b_1, b_2 \ldots$ reell sind, so wird, wenn ν eine gerade Zahl ist, die Gerade BA, die einen beliebigen Punkt B (z. B. den unendlich fernen Punkt der y-Achse) mit A verbindet, den Übergang bilden von Geraden, die (für $x < 0$) das Element nicht in reellen Punkten schneiden, zu solchen, die (für $x > 0$) es in zwei reellen Punkten schneiden; das ist aber nicht der Fall für ungerade ν. Im ersten Fall, in welchem ε ungerade ist, muß die Anzahl der mit BA zusammenfallenden Tangenten (unter den $n(n-1)$ einer allgemeinen Kurve n^{ter} Ordnung) ungerade sein, und umgekehrt im zweiten Fall. Dieses für reelle Werte von $b_1, b_2 \ldots$ gefundene Ergebnis muß auch für den Fall gelten, wo diese Zahlen nicht alle reell sind [47]. Es gilt also für jedes der die Singularität in A bildenden Elemente, und daß die Schnittpunkte der verschiedenen Elemente unter sich ganz denselben Einfluß auf die Klasse ausüben, wie gewöhnliche Doppelpunkte, ist schon im Schlusse von [12] bemerkt worden. Der gefundene Wert von 2δ wird also immer eine gerade, δ eine ganze Zahl sein.

Ganz ebenso kann man das Äquivalent δ' einer mehrfachen Tangente finden. In [74] werden wir jedoch eine Relation zwischen δ, δ', ν und ν' beweisen, die eine direkte Herleitung von δ' überflüssig macht.

Weitere Anwendungen der *Plücker*schen Äquivalente wird man in der abzählenden Geometrie machen können, wenn man beweist, daß eine Singularität mit den Äquivalenten $\delta, \varepsilon, \delta', \varepsilon'$ als ein Grenzfall betrachtet werden kann, in welchem δ Doppelpunkte, ε Spitzen, δ' Doppeltangenten und ε' Wendetangenten einer Kurve von derselben Ordnung, derselben Klasse und demselben Geschlecht zusammengefallen sind. Die Schnittpunkte und die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Elemente scheiden sich sogleich durch eine kleine Verlegung des eines Elementes als Doppelpunkte und Doppeltangenten aus. Daher brauchen wir uns nur mit der Auflösung eines Elementes zu beschäftigen.

Setzen wir erstens voraus, daß die eine Multiplizität ν oder ν' des zu betrachtenden Elementes 1 ist. Ist $\nu' = 1$, so wird $\varepsilon' = 0$, $\varepsilon = \nu - 1$, und da in diesem Falle μ_1 in der Gleichung (1) nach *Halphen*s Satz $\nu + 1$ ist [13], so sind, wenn x unendlich klein erster Ordnung ist, die Differenzen der ν Werte von y unter sich von der Ordnung $\frac{\nu+1}{\nu}$. Also ist [12]

$$2\delta + 3\varepsilon = \nu(\nu - 1)\frac{\nu+1}{\nu} = \nu^2 - 1$$

und somit $\delta = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2)$. Ebenso wird die durch die Multiplizitäten 1 und ν' charakterisierte Singularität die Äquivalente $\varepsilon' = \nu' - 1$ und $\delta' = \frac{1}{2}(\nu' - 1)(\nu' - 2)$ haben. Letztere Singularität besteht darin, daß die Mitteltangente den einfachen Zug in $\nu' + 1$ zusammenfallenden Punkten schneidet. Ist die Singularität reell, was wir in dem Beweise voraussetzen dürfen [47], so kann man den Fall als Grenzfall desjenigen betrachten, in welchem ein Zweig der Kurve eine Gerade in $\nu' + 1$ getrennten Punkten schneidet. Dieser Kurvenzug (Fig. 5) wird dann ν' Wellen bilden, die abwechselnd auf der einen und der anderen Seite der Geraden liegen. Die Konvexitätsrichtungen dieser Wellen sind durch $\nu' - 1$ Wendepunkte voneinander getrennt, und zwei nicht benachbarte Wellen haben eine gemeinschaftliche Tangente, die Doppeltangente der Kurve ist, was im ganzen $\frac{1}{2}(\nu' - 1)(\nu' - 2)$ Doppeltangenten ergibt. Daß die geänderte Kurve außer diesen reellen Wendetangenten und Doppeltangenten keine imaginären singulären Tangenten bekommt, folgt schon daraus, daß die vorgenommene Abänderung weder die Anzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden noch die der von einem Punkt ausgehenden Tangenten, also weder n noch n' ändert.

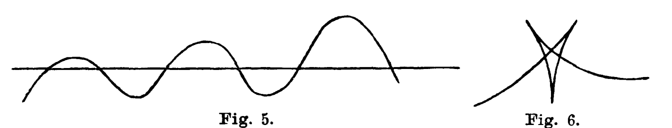


Fig. 5. Fig. 6.

Daraus, daß hier die die gegebene Singularität ersetzenden singulären Tangenten reell sind, folgt, daß man dasselbe für die Doppelpunkte und Spitzen, die ein Element mit den Multiplizitäten ν und 1 ersetzen, erreichen kann. Auch das läßt sich durch eine Figur leicht veranschaulichen (Fig. 6).

Betrachten wir nun ein Element, für welches keine der Multiplizitäten 1 ist, und stellt man dieses wie in (1) dar, so ist $\mu_1 = \nu + \nu' > \nu + 1$. Die Darstellung ist jedoch immer in der folgenden:

$$x = t^{\nu}, \quad y = b_1 t^{\nu+1} + b_2 t^{\nu+2} + b_3 t^{\nu+3} \cdots \tag{2}$$

inbegriffen; hier tritt der Grenzfall ein, in welchem b_1 und vielleicht mehrere der Koeffizienten 0 geworden sind. Die Erhöhung des entsprechenden Wertes von $2\delta + 3\varepsilon$ rührt eben, wegen der Bestimmung in [12], vom Verschwinden einzelner Koeffizienten der Reihe her. Der zu untersuchende Fall ist also Grenzfall desjenigen, in welchem diese Koeffizienten unendlich klein sind. Da die ν Partialzweige, die man durch Einsetzen der ν verschiedenen Werte von t in die verallgemeinerte Reihe erhält, und die sich kontinuierlich durch den ganzen Konvergenzbereich fortsetzen, von keiner mit der y-Achse parallelen Geraden berührt werden, so hat sich die Klasse ebensowenig wie die Ordnung bei dieser Verallgemeinerung geändert. Die zu δ noch fehlenden Doppelpunkte müssen also Schnittpunkte der ν Zweige unter sich geworden sein. Da n, n'

und e unverändert geblieben sind, muß dasselbe mit p der Fall sein; die δ' Doppeltangenten und ε' Wendetangenten, die früher mit $y = 0$ zusammenfielen, sind also noch erhalten und müssen die ν Zweige berühren. Damit ist der Satz bewiesen.

Durch ihn wird der Beweis in [66] für den Satz, daß die Punkte einer Kurve vom Geschlecht 0 und einer Geraden sich gegenseitig eindeutig entsprechen, vervollständigt. Es genügt, wenn die gegebene Kurve eine höhere Singularität hat, die Hilfskurven von der Ordnung $n - 2$ den Grenzbedingungen zu unterwerfen, die entstehen, wenn $\delta + \varepsilon$ der Punkte, durch die sie gehen sollen, in solcher Weise zusammenfallen, daß sie eben die höhere Singularität der vorgelegten Kurve bilden.

[72] Verschiedene Grenzformen von Kurven mit gegebenen *Plücker*schen Zahlen. Der hier betrachtete Grenzübergang ließ die Ordnung, die Klasse und das Geschlecht der algebraischen Kurve unverändert und mußte daher eine Singularität mit den Äquivalenten δ, ε, δ', ε' durch eben diese Anzahlen von *Plücker*schen Singularitäten ersetzen. Gewöhnlich hält man jedoch bei Grenzübergängen nur die Ordnung n oder die Klasse n' fest, je nachdem man die Kurve als Ort ihrer Punkte oder als Einhüllende ihrer Tangenten betrachtet; dann können sich n' beziehungsweise n sowohl als auch das Geschlecht und die Anzahlen der *Plücker*schen Singularitäten bei dem Übergang ändern.

Dafür wollen wir hier einige einfache und daher wichtige Beispiele anführen. Zu einem System mit den *Plücker*schen Zahlen n, d, e, n', d', e' und von dem Geschlecht p kann erstens ohne Abänderung der Ordnung n durch die Neubildung eines Doppelpunkts (siehe [35], 1.) eine Kurve mit den Zahlen

$$(1) \quad n, \quad d+1, \quad e, \quad n'-2, \quad d'-2(n'-6), \quad e'-6, \quad p-1$$

gehören. Doch ist dabei zu bemerken, daß diese Kurve nur als Punktort betrachtet eine vollständige Kurve des Systems ist. Als Tangentenort betrachtet ist die Grenzkurve des Systems aus der genannten Kurve und dem neuen Doppelpunkt, zweimal gezählt, zusammengesetzt. Die verlorenen Wendetangenten sind die zwei Tangenten im Doppelpunkt, je dreimal gezählt. Die Wendetangenten müssen nämlich in der Grenzlage die Grenzkurve in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Die verlorenen Doppeltangenten sind die vom neuen Doppelpunkt ausgehenden Tangenten an die Grenzkurve, je zweimal gezählt.

Demselben System kann zweitens eine Kurve mit den Zahlen

$$(2) \quad n, \quad d-1, \quad e+1, \quad n'-1, \quad d'-(n'-4), \quad e'-2, \quad p$$

angehören. Wenn man die Grenzkurve als Tangentenort betrachtet, besteht sie jedoch aus der hier genannten Kurve und dem in eine Spitze verwandelten Doppelpunkt. Die Lage der verlorenen Doppeltangenten und Wendetangenten ist leicht zu erklären (siehe im folgenden [75]).

Demselben System kann noch drittens eine Kurve mit den Zahlen

(3) $n, \quad d+2, \quad e-1, \quad n'-1, \quad d'-(n'-7), \quad e'-4, \quad p-1$

angehören; als Tangentenort betrachtet muß diese jedoch durch die in einen Selbstberührungspunkt verwandelte Spitze ergänzt werden; dieser Punkt zählt jetzt als zwei neue Doppelpunkte und zwei der $d'-n'+7$ Doppeltangenten fallen mit der Tangente in diesem Punkt zusammen.

Wir nennen noch einige Fälle, in denen (wie in [71]) sowohl die *Plücker*schen Zahlen als auch das Geschlecht unverändert bleibt, nämlich die, in welchen zwei zusammenfallende Doppelpunkte einen Selbstberührungspunkt bilden, ein mit einer Spitze zusammenfallender Doppelpunkt eine Knotenspitze bildet, oder drei zusammenfallende Doppelpunkte, zwei mit einer Spitze zusammenfallende Doppelpunkte oder ein mit zwei Spitzen zusammenfallender Doppelpunkt einen dreifachen Punkt beziehungsweise mit drei einfachen Elementen, mit einem einfachen und einem zweifachen Element oder mit einem dreifachen Element bilden.

Das Geschlecht wird sich dagegen viertens in dem Fall ändern, in welchem zwei Spitzen zusammenfallen und zwei einfache Zweige bilden, die miteinander Berührung zweiter Ordnung haben. Da die drei dadurch entstehenden Doppelpunkte auf die Klasse der Kurve denselben Einfluß ausüben wie zwei Spitzen, bleibt in diesem Fall die Klasse n' ungeändert. Dagegen wird das Geschlecht um eins vermindert. Die zu einer beliebigen Kurve des Systems gehörenden Zahlen werden also durch

(4) $n, \quad d+3, \quad e-2, \quad n', \quad d'+3, \quad e'-2, \quad p-1$

ersetzt. Offenbar sind im neuen Berührungspunkt auch zwei Wendetangenten zusammengefallen und durch drei zusammenfallende Doppeltangenten ersetzt.

Diese Fälle, die auch als Beispiele für weitere Bildung anderer Spezialfälle dienen können, treten bei der Untersuchung der verschiedenen ebenen Schnitte einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Doppelkurve von der Ordnung d und einer Rückkehrkurve von der Ordnung e auf. Ein willkürlicher, ebener Schnitt hat dann die Zahlen n, d, e, n', d', e', p. Dann ist n' der Rang der Fläche. Der Fall (1) trifft für eine Tangentialebene zu; der Fall (2) für eine Ebene, die durch einen der sog. „Pinchpunkte“ der Doppelkurve geht, d. h. durch einen solchen Punkt dieser Kurve, in dem die zwei Tangentialebenen zusammenfallen, und in dem die Doppelkurve alle umbeschriebenen Kegel schneidet; der Fall (3) für die sog. „Closepunkte“ der Rückkehrkurve, in welchen diese alle umbeschriebenen Kegel schneidet; der Fall (4) für die Ebenen, die die Rückkehrkurve berühren. Die weiterhin genannten Fälle, in welchen die Zahlen n, n', p ungeändert bleiben, treten auf, wenn die Ebene die Doppelkurve berührt oder durch einen Doppelpunkt der Doppelkurve oder durch einen Schnittpunkt der Doppelkurve mit der Rückkehrkurve, der nur Doppelpunkt der Fläche ist, oder durch einen dreifachen Punkt der Fläche geht. Ein singulärer

Punkt letzterer Art kann von drei Mänteln der Fläche gebildet werden und ist dann auch ein dreifacher Punkt der Doppelkurve; oder er kann dadurch entstehen, daß ein einfacher Mantel die Rückkehrkurve schneidet, und ist dann eine Spitze der Doppelkurve, oder dadurch, daß die Rückkehrkurve eine Spitze hat, durch welche auch die Doppelkurve gehen und daselbst die Rückkehrkurve berühren muß.

Hier haben wir uns jedoch an solche Schnitte gehalten, deren Ebenen nur einer einfachen Bedingung unterworfen sind (siehe [92] 1). Auch haben wir etwaige isolierte Doppelpunkte der Fläche nicht berücksichtigt [38]. —

Offenbar gibt es dualistisch entsprechende Grenzübergänge, bei welchen n' ungeändert bleibt.

[73] Differenz der Anzahlen zusammenfallender Schnittpunkte und zusammenfallender gemeinschaftlicher Tangenten zweier ebener Kurven. Wir haben früher sowohl die Anzahl der in einen Punkt zusammenfallenden Schnittpunkte zweier Kurven als auch die Anzahl ihrer mit einer Geraden zusammenfallenden gemeinsamen Tangenten je für sich durch infinitesimale Betrachtungen bestimmt ([11] und [13]). Erstere Abzählung beruht auf der Darstellung der Kurve in Punktkoordinaten und läßt sich vollständig ausführen, wenn die Kurven als Punktörter gegeben sind. Die letztere wird in ähnlicher Weise aus der Darstellung der Kurve als Tangentenort hervorgehen. Die eine dieser Anzahlen läßt sich aber ohne neue infinitesimale Untersuchungen aus der anderen herleiten, indem man durch den Geschlechtsatz ihre Differenz bestimmt.

Um dies zu erreichen, lassen wir den Punkten P_1 der einen Kurve c_1 die Punkte P_2 entsprechen, in welchen die Tangenten in P_1 die Kurve c_2 schneiden. Dann ist mit den Bezeichnungen in [65]

$$\alpha_1 = n_1', \quad \alpha_2 = n_2,$$

also wegen [65] (10)

$$\sum(\beta_2 - \beta_1) = 2n_1'(p_2 - 1) - 2n_2(p_1 - 1),$$

oder da nach [65] (9) und dem dualistisch entsprechenden Ausdruck

$$2(p_1 - 1) = n_1 + \sum(\nu_1' - 1) - 2n_1',$$

$$2(p_2 - 1) = n_2' + \sum(\nu_2 - 1) - 2n_2,$$

ist, folgt

$$(1) \qquad n_1'n_2' - n_1 n_2 = \sum(\beta_2 - \beta_1) - n_1'\sum(\nu_2 - 1) + n_2\sum(\nu_1' - 1).$$

Die linke Seite gibt nach den früheren Bestimmungen (*Bézouts* Satz [11]) die Differenz der Anzahlen der gemeinschaftlichen Tangenten und der Schnittpunkte der zwei Kurven. Es ist auch offenbar, daß jeder einfache Schnittpunkt und jede gewöhnliche gemeinsame Tangente zur rechten Seite beziehungsweise die Beiträge -1 und $+1$ liefert. Man



kann übrigens alle Fälle des singulären Entsprechens durch die Aufstellung der folgenden allgemeinen Voraussetzung erledigen: P_2 fällt in den Mittelpunkt A eines Elements von c_2, dessen Punktmultiplizität ν_2 ist, und die durch A gehende Gerade a berührt in P_1 ein Element von c_1, dessen Tangentenmultiplizität ν_1' ist. Durch ν_1 bezeichnen wir hier die Punktmultiplizität desselben Elements, wenn dieser Berührungspunkt P_1 auch mit A zusammenfällt; sonst werden wir $\nu_1 = 0$ setzen. Durch ν_2' bezeichnen wir ebenso hier die Tangentenmultiplizität in A des Elements von c_2, dem P_2 angehört, wenn a auch dieses Element berührt, sonst werden wir $\nu_2' = 0$ setzen. Wenn weder $\nu_1 = 0$ noch $\nu_2' = 0$ ist, so werden sich die Elemente, denen P_1 und P_2 angehören, in A berühren, und ν_1 und ν_2' haben dann ihre gewöhnliche Bedeutung.

Der Satz von *Halphen* [13] gibt in allen Fällen des hier beschriebenen Entsprechens

$$\beta_1 = \nu_1 + \nu_1', \quad \beta_2 = \nu_2 + \nu_2'.$$

Zum Gliede $-n_1'(\nu_2 - 1)$ der rechten Seite der Gleichung (1) werden dieselben einander entsprechenden Punkte P_1 und P_2 den Beitrag $-(\nu_1 + \nu_1')(\nu_2 - 1)$ liefern; denn die übrigen $n_1' - \nu_1 - \nu_1'$ der von A ausgehenden Tangenten werden c_1 in anderen Punkten P_1, die dem in den Punkt A fallenden Punkt P_2 entsprechen, berühren, gehören also anderen korrespondierenden Punktepaaren an. Ebenso werden unsere entsprechenden Punkte P_1 und P_2 zum Glied $n_2(\nu_1' - 1)$ den Beitrag $(\nu_2 + \nu_2')(\nu_1' - 1)$ liefern. Der gesamte Beitrag zur rechten Seite ist daher

$$\nu_2 + \nu_2' - \nu_1 - \nu_1' - (\nu_1 + \nu_1')(\nu_2 - 1) + (\nu_2 + \nu_2')(\nu_1' - 1)$$

oder

$$\nu_1'\nu_2' - \nu_1\nu_2. \tag{2}$$

Dadurch wird also die Differenz der in a zusammenfallenden gemeinschaftlichen Tangenten und der in A zusammenfallenden Schnittpunkte ausgedrückt.

Für $\nu_2' = 0$, $\nu_1 > 0$, d. h., wenn die Elemente sich in A schneiden ohne sich zu berühren, findet man $\nu_1\nu_2$ Schnittpunkte; für $\nu_1 = 0$, $\nu_2' > 0$, d. h., wenn die Elemente a in verschiedenen Punkten berühren, findet man $\nu_1'\nu_2'$ gemeinschaftliche Tangenten. Für $\nu_1 = \nu_2' = 0$, d. h., wenn sie sich weder schneiden noch eine gemeinsame Tangente haben, findet man den Beitrag 0.

[74] Differenz der *Plücker*schen Äquivalente δ und δ' eines singulären Elements einer Kurve. Das *Plücker*sche Äquivalent δ oder δ' eines Elements einer Kurve läßt sich auf die in [71] angegebene Weise aus der analytischen Darstellung der Kurve beziehungsweise in Punkt- oder in Linienkoordinaten herleiten und darf also als bekannt betrachtet werden, wenn die Kurve beziehungsweise als Punktort oder als Tangentenort vollständig gegeben ist. Nun kann man das andere Äquivalent aus dem jetzt zu bestimmenden Ausdruck für die Differenz $\delta' - \delta$ herleiten.

Wir lassen hier die Punkte P_1 und P_2 derselben Kurve c mit den Zahlen $n, n', p \ldots$ einander so entsprechen, daß die Punkte P_2 die Schnittpunkte der Tangente im Punkte P_1 sind. Dann wird in der Gleichung [65] (10)

$$\alpha_1 = n' - 2, \quad \alpha_2 = n - 2;$$

man hat also, wenn wir in den Gliedern der rechten Seite dieser Gleichung verschiedene Ausdrücke für $2(p-1)$ benutzen,

$$\sum(\beta_2 - \beta_1) = (n'-2)(n' + \sum(\nu - 1) - 2n) - (n-2)(n + \sum(\nu' - 1) - 2n')$$

oder

$$(1) \qquad n'^2 - 6n' - n^2 + 6n = \sum(\beta_2 - \beta_1) - (n'-2)\sum(\nu - 1) + (n-2)\sum(\nu' - 1).$$

Hier wird die rechte Seite, wie im vorigen Fall, zunächst die Differenz der Anzahlen der gemeinschaftlichen Tangenten und der Schnittpunkte verschiedener Elemente enthalten, und zwar doppelt, weil bei jeder Kombination die Punkte P_1 und P_2, die jetzt beide derselben Kurve angehören, vertauscht werden können. Übrigens ist ihre Abzählung dieselbe wie in [73]. Dadurch erhält man zum Ersatz der rechten Seite der Gleichung (1) erstens die zwei folgenden Glieder

$$2\sum{}'(\nu_1'\nu_2') - 2\sum(\nu_1\nu_2),$$

wo die letzte Summe $\sum$ über alle Fälle zu erstrecken ist, in denen zwei Elemente denselben Mittelpunkt haben, die erste $\sum'$ über alle, in denen sie dieselbe Mitteltangente haben.

Sodann hat man den Beitrag zu untersuchen, den ein einziges Element mit den Multiplizitäten ν und ν' zur rechten Seite von (1) liefert.

Wenn P_1 und P_2 beide in den Mittelpunkt eines solchen Elements fallen, findet man nach dem *Halphen*schen Satz für diese Korrespondenz

$$\beta_1 = \beta_2 = \nu + \nu' - 2.$$

Um den von dieser Korrespondenz herrührenden Beitrag der übrigen Glieder auf der rechten Seite der gefundenen Gleichung zu erhalten, muß man darin n und n' durch $\nu + \nu'$ ersetzen. Der ganze Beitrag wird also

$$(\nu' - \nu)(\nu + \nu' - 2)$$

sein.

Wir können demnach die Formel (1) so schreiben:

$$(2) \quad (n'-n)(n'+n-6) = 2\sum{}'(\nu_1'\nu_2') - 2\sum(\nu_1\nu_2) + \sum{}''(\nu'-\nu)(\nu'+\nu-2),$$

wo nun die Summe $\sum''$ über alle Elemente der Kurve zu erstrecken ist wenn man will, auch auf die einfachen, die, weil $\nu = \nu' = 1$ ist, den Betrag 0 liefern. Um hierbei die Punktmultiplizitäten von den Tangentenmultiplizitäten trennen zu können und so Glieder zu bekommen,

die beziehungsweise für $\nu = 1$ und $\nu' = 1$ verschwinden, addieren wir [70] (1)

(3) $$3(n' - n) = \sum''(\nu' - \nu)$$

und erhalten also

(4) $$(n' - n)(n' + n - 3) = 2\sum'(\nu_1'\nu_2') - 2\sum(\nu_1\nu_2) - \sum''(\nu^2 - \nu) + \sum''(\nu'^2 - \nu').$$

Hat die Kurve nur *Plücker*sche Singularitäten, nämlich d Doppelpunkte, d' Doppeltangenten, e Spitzen, e' Wendetangenten, so erhält man

(5) $$(n' - n)(n' + n - 3) = 2(d' - d + e' - e),$$

was auch aus den *Plücker*schen Formeln hervorgeht.

Der Beitrag eines Elementes (ν, ν') zur rechten Seite von (4) ist $\nu'^2 - \nu^2 - \nu' + \nu$. Wenn man die *Plücker*schen Äquivalente dieses Elements einführen will, so fordert die Übereinstimmung mit (5), daß

$$2(\delta' - \delta + \varepsilon' - \varepsilon) = (\nu' - \nu)(\nu' + \nu - 1),$$

und da nach [71]

(6) $$\varepsilon = \nu - 1, \quad \varepsilon' = \nu' - 1$$

gesetzt werden kann, daß

(7) $$2(\delta' - \delta) = (\nu' - \nu)(\nu' + \nu - 3) = (\varepsilon' - \varepsilon)(\varepsilon' + \varepsilon - 1)$$

ist.

Für $\nu = \nu'$ wird $\delta = \delta'$ (vgl. [13] Note).

[75] Über die Abzählung der in einem Grenzfall zusammenfallenden Doppelpunkte, Spitzen, Doppeltangenten und Wendetangenten. Wir haben in [71] gesehen, daß ein singuläres Element einer algebraischen ebenen Kurve c durch das Zusammenfallen von δ, δ', ε, ε' *Plücker*schen Singularitäten gebildet werden kann, und zwar so, daß die Ordnung n, die Klasse n' und das Geschlecht p unverändert bleiben. In [72] haben wir jedoch auch Beispiele für andere Grenzübergänge angegeben, die eine Änderung einer oder zweier der Zahlen n, n', p zur Folge hatten. Wir werden nun annehmen, daß die veränderliche Kurve c in einem Grenzfalle aus einer Kurve k von der Ordnung $n - N$, der Klasse $n' - N'$ und dem Geschlecht $p - P$ und, als Punktort betrachtet, noch aus N mit einer Geraden a zusammenfallenden Geraden, als Erzeugnis ihrer Tangenten betrachtet, noch aus N' mit einem Punkt A der Geraden a zusammenfallenden Punkten (Scheiteln) besteht; weiter, daß die neugebildete Singularität der Kurve k von σ Elementen gebildet wird, die den Mittelpunkt A und die Mitteltangente a haben, und daß die Summe ihrer Punktmultiplizitäten μ, die Summe ihrer Tangentenmultiplizitäten μ' ist; endlich daß im Grenzfalle D Doppelpunkte und E Spitzen der veränderlichen Kurve c mit A und D' ihrer Doppeltangenten und E' ihrer Wendetangenten mit a zusammenfallen. Außerdem

werden $N(n - N - \mu - \mu')$ Doppelpunkte in die nicht in A liegenden Schnittpunkte der Kurve k mit a, und $N'(n' - N' - \mu - \mu')$ Doppeltangenten in die nicht mit a zusammenfallenden Tangenten, die von A aus an die Kurve k gehen, fallen; ferner nehmen wir an, daß außer den hier genannten keine anderen der d Doppelpunkte und e Spitzen in a liegen und keine anderen der noch übrigen d' Doppeltangenten und e' Wendetangenten durch A gehen.

Die Summen der *Plücker*schen Äquivalente ε und ε' der σ durch A gehenden Elemente von k werden $\mu - \sigma$ und $\mu' - \sigma$ sein. Durch Einführung der zur Kurve k gehörenden Zahlen in die das Geschlecht p bestimmenden Gleichungen

$$(1) \qquad 2(p-1) = n' + \sum(\nu - 1) - 2n = n + \sum(\nu' - 1) - 2n'$$

findet man also

$$(2) \qquad \begin{cases} 2(p - P - 1) = n' - N' + e - E + \mu - \sigma - 2n + 2N \\ \qquad\qquad\qquad = n - N + e' - E' + \mu' - \sigma - 2n' + 2N' \end{cases}$$

und durch Subtraktion von den zur veränderlichen Kurve c gehörenden Gleichungen (1)

$$(3) \qquad 2P = N' + E - 2N - \mu + \sigma = N + E' - 2N' - \mu' + \sigma,$$

woraus sich

$$(4) \qquad E' - E = 3(N' - N) + \mu' - \mu$$

ergibt.

In der Gleichung [74] (5)

$$(5) \qquad (n' - n)(n' + n - 3) = 2(d' - d + e' - e)$$

wird der Beitrag der durch A gehenden Elemente der Kurve k zu der rechten Seite (siehe [74] (4))

$$2\sum(\nu_1'\nu_2') - 2\sum(\nu_1\nu_2) - \sum(\nu^2 - \nu) + \sum(\nu'^2 - \nu')$$

betragen, wo die Summen $\sum$ über diese Elemente und ihre Kombinationen zu erstrecken sind, zusammen also $\mu'^2 - \mu' - \mu^2 + \mu$ ergeben. Für die Kurve k muß man somit in der Gleichung (5) statt n und n' die Werte $n - N$ und $n' - N'$ und statt ihrer rechten Seite

$$2(d' - D' - N'(n' - N' - \mu - \mu') - d + D + N(n - N - \mu - \mu') + e' - E' - e + E) \\ + \mu'^2 - \mu' - \mu^2 + \mu$$

setzen. Subtrahiert man die so gebildete Gleichung von (5) und setzt den in (4) gefundenen Ausdruck für $E' - E$ ein, so findet man

$$(6) \quad 2(D' - D) = (N' - N)(N' + N + 2(\mu + \mu') - 9) + (\mu' - \mu)(\mu' + \mu - 3).$$

Sind die Kurven c als Örter ihrer Punkte gegeben, so läßt sich gewöhnlich an diese Bestimmung auch die der Zahlen N, D und E anknüpfen, sowie die von μ und μ', indem man die zusammenfallenden

Schnittpunkte der Grenzkurve k mit einer willkürlichen, durch A gehenden Geraden und mit a abzählt. Hat man noch auf irgendeine Weise die Klasse $n' - N'$ dieser Grenzkurve, also N' gefunden, so werden die Formeln (4) und (6) die Werte von D' und E' ergeben. Um P und σ zu finden, wird aber außer (3) noch eine weitere Bestimmung nötig. Einfache Beispiele dieser Bestimmungen gewähren die in [72] (2)—(4) behandelten Grenzübergänge.

In [72] (2) ist $N = 0$, $N' = 1$, $D = 1$, $E = 0$, $\mu = 2$, $\mu' = 1$, also $E' = 2$, $D' = 0$. Im übrigen ist hier $\sigma = 1$, $P = 0$.

In [72] (3) ist $N = 0$, $N' = 1$, $D = 0$, $E = 1$, $\mu = 2$, $\mu' = 2$, also $E' = 4$, $D' = 0$. Im übrigen ist hier $\sigma = 2$, $P = 1$.

In [72] (4) ist $N = N' = 0$, $D = 0$, $E = 2$, $\mu = 2$, $\mu' = 2$, also auch $E' = 2$, $D' = 0$. Im übrigen ist $\sigma = 2$, $P = 1$. Dieselbe Singularität entsteht für $N = N' = 0$, $D = D' = 3$, $E = E' = 0$.

Als neues Beispiel können wir den Schnitt einer Fläche mit ihrer Tangentialebene in einem Punkt A ihrer Rückkehrkurve betrachten. Da der Schnitt einer beliebigen, nicht durch die Tangente a dieser Kurve gehenden Ebene in A eine Spitze hat, so wird der gesuchte Schnitt in A einen dreifachen Punkt haben, dessen einzige Tangente a die Fläche und somit auch den Schnitt in vier zusammenfallenden Punkten trifft. Also ist $\mu = 3$, $\mu' = 1$, was nur für $\sigma = 1$ möglich ist. Hier ist $N = 0$. Da die Ebene eine Tangentialebene ist, wird $N' = 2$, und da die Ebene in A die Rückkehrkurve berührt und die Doppelkurve nicht in demselben Punkt trifft, ist $D = 0$, $E = 2$. Man findet nun $E' = 6$, $D' = 0$, $P = 1$. Also werden für diesen Schnitt sechs der in einer beliebigen Ebene enthaltenen e' Haupttangenten, aber keine der Doppeltangenten mit der Tangente der Rückkehrkurve zusammenfallen.

Andere Beispiele für die Anwendung derselben Formeln werden wir in [77] und [88] antreffen. Übrigens umfassen diese Formeln keineswegs alle möglichen Grenzfälle, da z. B. wie in [72] (1) die neue Singularität der Grenzkurve von Elementen, die sich schneiden, gebildet werden kann. In anderen Fällen kann man aber wesentlich ebenso verfahren, wie bei der Bildung dieser Formeln, nachdem man hier gesehen hat, wie die Formeln in [74] benutzt werden können, wenn die Grenzkurve einen mehrfachen Punkt mit einer mehrfachen Tangente hat.

[76] Abzählende Untersuchung einer ebenen durch ihre Punkte oder Tangenten erzeugten Kurve. Sucht man in der Ebene den Ort eines Punktes, der eine gegebene Bedingung erfüllt, so geschieht dies in der analytischen Geometrie durch Aufstellung seiner Gleichung. Dadurch ist die Ordnung gegeben, und die Gleichung kann weiter zur Auffindung und Untersuchung seiner singulären Punkte benutzt werden. Die abzählende Geometrie gibt andere Mittel an die Hand zur Bestimmung sowohl der Ordnung und der Anzahlen der

singulären Punkte selbst, als auch jener Zahlen, die diese Punkte genauer charakterisieren.

Wie die Methode der Erhaltung der Anzahl zur Bestimmung der Ordnung benutzt werden kann, haben wir schon im zweiten Kapitel gezeigt. Andere Mittel zu derselben Bestimmung wird später das sogenannte Korrespondenzprinzip (viertes Kapitel) darbieten. Da sich der Punktort gewöhnlich als durch die Bewegung eines Punktes erzeugt darbietet, kann man gewöhnlich an diese Bewegung auch eine Bestimmung der Punkte, in welchen eine Stockung dieser Bewegung eintritt, anschließen, sowohl was die Beschaffenheit als auch was die Anzahl dieser Punkte anlangt. Da wird nun gewöhnlich eine Spitze entstehen, die man eben in Anbetracht dieser Stockung auch einen stationären Punkt nennt. Wenn die Bewegung in einer in jeder Beziehung kontinuierlichen Weise vor sich geht, so wird sich der bewegliche Punkt jedenfalls auch in solchen Punkten auf demselben Element fortbewegen, dessen Punktmultiplizität ν (und dadurch seinen Beitrag $\nu - 1$ zur Zahl e) man oft durch Abzählung seiner Schnittpunkte mit einer das Element schneidenden Geraden oder Kurve bestimmen kann. Dazu wird die Erzeugung der Kurve als Punktort gewöhnlich ebensowohl Gelegenheit geben, wie zur Bestimmung der Ordnung.

Man kann auch bisweilen, was wir z. B. in [18] getan haben, bemerken, daß der bewegliche Punkt mehrmals bestimmte Punkte passiert, die also Schnittpunkte verschiedener Elemente sein müssen. Die im voraus unbekannten Punkte, die mehrmals (gewöhnlich zweimal) vom beweglichen Punkt passiert werden, entziehen sich aber gewöhnlich einer solchen allgemeinen Betrachtung der Bewegung. Ihre Anzahl kann man aber nach der bereits ausgeführten Bestimmung der Ordnung und der — punktgeometrisch aufgefaßt — mehrfachen Elemente finden, wenn es gelingt, das Geschlecht der Kurve zu bestimmen. Dies erreicht man unmittelbar, wenn die Erzeugung des Ortes ihre Punkte in gegenseitig eindeutiger Weise den Punkten einer Kurve von gegebenem Geschlecht zuordnet. Ein nicht eindeutiges Entsprechen kann mittels des allgemeinen Geschlechtsatzes [65] ebenfalls benutzt werden, wenn man die Fälle kennt, in welchen Punkte, die ein und demselben Punkt entsprechen, unter sich zusammenfallen.

Das dualistisch entsprechende Verfahren kann man anwenden, um die Einhüllende der Geraden, die eine gegebene Bedingung erfüllen, näher zu bestimmen. Wir wollen hier einige Beispiele für diese Untersuchung eines Punktortes oder eines Tangentenortes angeben.

[77] Evolute einer gegebenen Kurve. Es sei gegeben eine algebraische, ebene Kurve c von der Ordnung n, der Klasse n' und dem Geschlecht p, der wir nur getrennte *Plücker*sche Singularitäten beilegen, deren Anzahlen wir d, e, d', e' nennen. Wir setzen weiter voraus, daß die unendlich ferne Gerade weder diese Kurve berührt, noch durch

einen ihrer mehrfachen Punkte geht, und daß die Kurve auch nicht durch die unendlich fernen Kreispunkte geht. Die der Evolute dieser Kurve zugehörigen Zahlen werden wir mit N, N', P, D, E, D', E' bezeichnen.

Die Klasse N' der Evolute dieser Kurve ist die Anzahl der Normalen, die man durch einen beliebigen Punkt an sie ziehen kann. Aus [29] folgt:

(1) $$N' = n + n'.$$

Diese Zahl werden wir jedoch hier, wie in [59] 2 und [62], durch Abzählung der von einem unendlich fernen Punkt B ausgehenden Normalen bestimmen, um daran die Bestimmung der etwaigen Wendetangenten der Evolute oder überhaupt ihrer Elemente mit höherer Tangentenmultiplizität anzuknüpfen. Die n dieser $n + n'$ Normalen, die selbst unendlich fern sind, können, wie wir schon wissen [62], nur einfache Tangenten der Evolute sein. Sollen zwei der n' durch B gehenden, nicht unendlich fernen Tangenten koinzidieren, so müssen auch die zwei Tangenten der gegebenen Kurve c, die auf der durch den unendlich fernen Punkt B bestimmten Richtung senkrecht stehen, koinzidieren. Dies geschieht nur, wenn die Tangente an c entweder diese Kurve in einem unendlich fernen Punkt berührt oder eine Wendetangente ist.[1]) Im ersten Fall ist die so bestimmte Tangente der Evolute nur eine ihrer n unendlich fernen Tangenten, die, wie wir eben sahen, einfach sind; im zweiten Fall ist sie Normale von c in einem Wendepunkt. Eine solche zählt nur für eine der Normalen von c, die durch einen nicht unendlich fernen Punkt der Kurve gehen. Sie ist also nur einfache Tangente an die Evolute, die sie im unendlich fernen Punkt berührt. Die Evolute hat also keine Wendetangente, geschweige denn Elemente mit höheren Tangentenmultiplizitäten, und wir haben also

(2) $$E' = 0.$$

Aus dem gegenseitig eindeutigen Entsprechen der Kurve c und ihrer Evolute folgt weiter, daß

(3) $$P = p$$

ist. Die übrigen *Plücker*schen Zahlen der Evolute können sodann mittels der *Plücker*schen Gleichungen und der Formel für das Geschlecht durch die Zahlen der gegebenen Kurve ausgedrückt werden. Man findet

$$N = 3n + e' = 3n' + e,$$
$$E = 3(2n - n' + e') = 3(2n' - n + e),$$
$$D' = \tfrac{1}{2}(n + n')^2 - \tfrac{1}{2}(4n + n' + e') = \tfrac{1}{2}(n + n')^2 - \tfrac{1}{2}(4n' + n + e),$$
$$D = \tfrac{1}{2}(3n + e')^2 - 11n + 4n' - 5e' = \tfrac{1}{2}(3n' + e)^2 - 11n' + 4n - 5e.$$

1) Die zwei in einer Doppeltangente zusammenfallenden Tangenten sind ja nicht koinzident [65] und geben auch verschiedene Normalen.



Von den $3n + e'$ Schnittpunkten der Evolute mit der unendlich fernen Geraden sind die e' die Krümmungsmittelpunkte der Wendepunkte der gegebenen Kurve. Die übrigen $3n$ müssen zu je drei den Elementen angehören, die den n unendlich fernen Elementen der gegebenen Kurve entsprechen. Da diese Elemente, wie schon bemerkt, die Tangentenmultiplizität 1 haben und die unendlich ferne Gerade je in drei Punkten schneiden, so ist ihre Punktmultiplizität 2. Sie sind also Spitzen. Die Anzahl der nicht unendlich fernen Spitzen ist demnach nur $E - n$ oder

$$5n - 3n' + 3e' = 6n' - 4n + 3e.$$

Diese Punkte werden Mittelpunkte der Kreise sein, die Berührung dritter Ordnung mit der Kurve e haben.

Da die unendlich ferne Gerade die Evolute in ihren n unendlich fernen Spitzen berührt, wird sie als $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten zu zählen sein. Die übrigen $D' - \frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten sind die Geraden, die zu der gegebenen Kurve je in zwei Punkten normal sind. — Die D Doppelpunkte der Evolute sind Krümmungsmittelpunkte je für zwei Punkte der gegebenen Kurve.

Die Fälle, die wir durch unsere Voraussetzungen über die Kurve c aus unserer allgemeinen Untersuchung ausgeschlossen haben, lassen sich, wie wir in [9] bemerkt haben, als Grenzfälle behandeln. Um die Evolute einer Parabel, die ja die unendlich ferne Gerade berührt, zu finden, kann man z. B. von der Evolute eines beliebigen Kegelschnittes ausgehen. Für diese geben unsere Formeln, da $n = n' = 2$, $d = e = d' = e' = p = 0$ ist, $N = 6$, $N' = 4$, $E' = 0$, $E = 6$, $D = 4$, $D' = 3$, $P = 0$, woraus folgt, daß es vier Kreise gibt, die mit der Kurve Berührung dritter Ordnung haben (in den Scheiteln) und zwei Doppelnormalen (die Achsen). Wird der Kegelschnitt eine Parabel, so geht eine der von einem beliebigen Punkt ausgehenden vier Normalen durch den unendlich fernen Punkt der Achse (den Berührungspunkt der Parabel mit der unendlich fernen Geraden, deren Normale unbestimmt ist). Außer diesem Punkt wird die Evolute, als Tangentenort betrachtet, aus einer Kurve dritter Klasse bestehen, die eine unendlich ferne Wendetangente haben muß, da zwei der durch einen unendlich fernen Punkt gehenden drei Normalen unendlich fern sind und demselben Element angehören. Diese Kurve, die die eigentliche Evolute der Parabel ist, muß also [70] auch dritter Ordnung sein und eine Spitze haben. Als Punktort betrachtet, besteht die Grenzkurve der Evolute des allgemeinen Kegelschnittes aus dieser Kurve und der dreimal zu zählenden unendlich fernen Geraden. Von nicht unendlich fernen Singularitäten erhält man hier nur eine Spitze, den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels.

Mit den in [75] benutzten Bezeichnungen (die eine andere Bedeutung als sonst hier in [77] haben) wird der hier auf die Evolute

eines allgemeinen Kegelschnittes angewandte Grenzübergang durch die Zahlen $N = 3$, $N' = 1$, $E' = 0$, $E = 5$, $D = 4$, $D' = 3$, $\mu = 1$, $\mu' = 2$, $\sigma = 1$, $P = 0$ charakterisiert, und diese befriedigen die Gleichungen in [75]. —

Auch den Fall, in welchem ein Doppelpunkt und eine Spitze der gegebenen Kurve zusammenfallen und eine Knotenspitze bilden, kann man natürlich als einen Grenzfall behandeln. Dann wird die Evolute eine Wendetangente haben, die eine Doppeltangente ersetzt. Gleichzeitig wird die Evolute, als Punktort betrachtet, im Grenzfall aus derselben Geraden und einer Kurve bestehen, deren Ordnung $(3n + e' - 1)$ um 1 erniedrigt ist. Diese Entartung zeigt eben an, daß die *Plücker*schen Zahlen mit den damit verbundenen *Plücker*schen Äquivalenten der höheren Singularitäten nicht allen abzählenden Fragen gegenüber dazu geeignet sind, eine gegebene Kurve zu definieren. Um daher die Evolute einer Kurve, die beliebige Singularitäten besitzt und der unendlich fernen Geraden gegenüber eine beliebige Lage einnimmt, zu studieren, ist es vorzuziehen, solche Fälle nicht als Grenzfälle eines solchen, in welchem nur die *Plücker*schen Zahlen gegeben sind, zu betrachten, sondern direkt durch die bereits angewandte Methode zu behandeln. Es wird sich dann zeigen, daß der Einfluß eines singulären Elements durch seine Punktmultiplizität ν und seine Tangentenmultiplizität ν', sowie durch seine Lage in Beziehung zu der unendlich fernen Geraden, wenn nicht besondere Krümmungsverhältnisse eintreten, bestimmt wird. Der Fall der *Plücker*schen Singularitäten wird in dieser Untersuchung inbegriffen sein.

Ist das Kurvenelement mit dem Mittelpunkt A und der Normalen b nicht unendlich fern, so bleibt die Bestimmung der Klasse $N' = n + n'$ ganz unverändert. Es gilt dann nur, die Singularität des von der Normale b berührten Elementes der Evolute zu finden. Diese Normale b ist, wie aus unserer Bestimmung von N' hervorgeht, ν'-mal unter die von ihrem unendlich fernen Punkt C ausgehenden Tangenten an die Evolute mitzuzählen. Unter die von A selbst ausgehenden Normalen ist sie ν-mal mitzuzählen, weil es den ν Partialzweigen entsprechend ν zu A benachbarte Punkte gibt, von denen aus man eine Normale ziehen kann. Das gesuchte Element der Evolute wird also [13], wenn $\nu' > \nu$ ist, die Tangentenmultiplizität ν, die Punktmultiplizität $\nu' - \nu$ und als Mittelpunkt (Berührungspunkt von b) den Punkt C haben; wenn $\nu > \nu'$ ist, werden die Multiplizitäten ν' und $\nu - \nu'$ sein, und der Mittelpunkt wird in den Punkt A fallen; ist $\nu = \nu'$, so gibt diese Zahl auch die Tangentenmultiplizität an, die Punktmultiplizität ist im allgemeinen eins und der Mittelpunkt des Elements fällt weder in A noch in C. Hat die Kurve c ein solches Element, so muß man also die Gleichung (2) beziehungsweise durch $E' = \nu - 1$ oder durch $E' = \nu' - 1$ ersetzen. — Besonders wird die Normale in einer gewöhnlichen Knoten-

spitze ($\nu = \nu' = 2$) Wendetangente der Evolute sein, und die Evolute geht durch die Spitzen ($\nu = 2$, $\nu' = 1$) der Grundkurve.

Wenn der Punkt A unendlich fern ist, ohne daß die Mitteltangente des singulären Elementes der gegebenen Kurve selbst ins Unendliche rückt, so wird auch die Normale b unendlich fern sein, und der Krümmungsmittelpunkt B wird in den unendlich fernen Punkt fallen, der durch die Geraden bestimmt wird, die auf der durch A gehenden Geraden senkrecht stehen. Die Gerade b wird dann $(2\nu + \nu')$-mal unter die durch B gehenden Normalen des singulären Elements und wie vorher ν-mal unter die durch einen anderen unendlich fernen Punkt gehenden Normalen zu zählen sein. B wird Mittelpunkt und b Mitteltangente eines Elements der Evolute mit den Multiplizitäten $\nu + \nu'$ und ν sein. Die Gleichung (2) wird also durch $E' = \nu - 1$ zu ersetzen sein.

In diesen Fällen blieb die Gleichung (1), die N' ausdrückt, ungeändert. Auch diese Zahl wird sich aber ändern, wenn die unendlich ferne Gerade selbst die Mitteltangente des singulären Zweiges mit den Multiplizitäten ν und ν' ist. Dann wird die Anzahl der durch einen willkürlichen Punkt Q der unendlich fernen Geraden gehenden Normalen der gegebenen Kurve, die nicht selbst unendlich fern sind, $n' - \nu'$ sein. Die Anzahl der durch einen Punkt Q gehenden Normalen, die zusammen mit Q ins Unendliche rücken, ist dagegen n, und die Grenzlagen der Schnittpunkte dieser Normalen mit der unendlich fernen Geraden sind in Beziehung auf die Kreispunkte mit den Punkten, in denen die unendlich ferne Gerade die gegebene Kurve c schneidet, harmonisch verbunden. Also ist (1) in diesem Fall durch $N' = n + n' - \nu'$ zu ersetzen, und da $\nu + \nu'$ der genannten Schnittpunkte dem singulären Element der Kurve c angehören, so wird das entsprechende Element der Evolute die Tangentenmultiplizität $\nu + \nu'$ haben. Der Mittelpunkt dieses Elements ist in Beziehung auf die Kreispunkte mit dem Mittelpunkt des betrachteten Elements von c harmonisch verbunden. Von ihm gehen nur $n' - \nu' - \nu$ Normalen an c aus, die nicht unendlich fern sind, also $n + \nu$, die unendlich fern sind; im ganzen werden somit $2\nu + \nu'$ der von ihm ausgehenden Tangenten an die Evolute ihrem singulären Element angehören. Seine Punktmultiplizität ist also ν. Aus dem gefundenen Werte für die Tangentenmultiplizität folgt, daß (2) durch $E' = \nu + \nu' - 1$ zu ersetzen ist. (Wie in dem vorhin betrachteten Fall einer Parabel wird also für $\nu = \nu' = 1$ $E' = 1$ sein).

In allen den genannten Fällen ist (3) das Geschlecht P dem Geschlecht p der gegebenen Kurve gleich; darnach kann man die übrigen *Plücker* schen Zahlen bestimmen. Bei der Anwendung dieser Zahlen muß man jedoch noch Rücksicht auf die Spitzen, Doppelpunkte und Doppeltangenten nehmen, wozu das gefundene singuläre Element der Evolute selbst Anlaß gibt.

Hat die gegebene Kurve mehrere singuläre Elemente, so kann man alle diese auf ähnliche Weise berücksichtigen.

Wir haben jedoch hier den Fall nicht berücksichtigt, wo die gegebene Kurve durch einen unendlich fernen Kreispunkt geht. Dann ist jede durch diesen Punkt gehende Gerade eine Normale, und der Punkt selbst also ein Teil der Evolute, diese als Tangentenort betrachtet. Die durch Ausscheidung dieses Punktes erhaltene eigentliche Evolute läßt sich aber durch die gewöhnlichen Methoden untersuchen. Als Übungsbeispiel schlagen wir die Untersuchung der Evolute einer Kurve vierter Ordnung vor, die in den Kreispunkten Spitzen hat, oder in den Kreispunkten die unendlich ferne Gerade berührt.

[78] Andere Anwendung. Um auch ein Beispiel zu haben, bei dem der allgemeine Geschlechtsatz zur Bestimmung eines Ortes nötig ist, werden wir eine gegebene Kurve c von der Ordnung n und der Klasse n' durch die Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel A schneiden und den Ort der Schnittpunkte der Tangenten untersuchen, die in den Schnittpunkten der Kurve c mit den Strahlen des Büschels an diese gelegt werden können. Wir wollen dabei voraussetzen, daß die Kurve c zwar Doppelpunkte, aber sonst keine (punktgeometrisch) mehrfachen Elemente (auch keine Spitzen) habe, und daß der Punkt A eine ganz willkürliche Lage in Beziehung auf die Kurve c einnehme.

Die Ordnung N dieses Ortes bestimmen wir jedoch hier noch nicht, da diese Bestimmung am leichtesten durch das Korrespondenzprinzip geschieht; in [103] werden wir mittels dieses Prinzips finden, daß

$$N = \tfrac{1}{2}(2n - 3)n'$$

ist. Da unter den gemachten Voraussetzungen wenigstens die eine der Tangenten, die sich in einem Punkt des gesuchten Ortes schneiden, hier diesen Ort nur in einem Punkt schneidet, hat der Ort keine (punktgeometrisch) mehrfachen Elemente. Also ist, wenn E die *Plücker*sche Zahl der Spitzen dieses Ortes ist,

$$E = 0.$$

Um das Geschlecht P des Ortes zu bestimmen, sehen wir zu, in welcher Weise sich die Strahlen des Büschels und die Gruppe der zu einer solchen gehörigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte des Ortes entsprechen. Man kann dann in die Formel [65] (11) die folgenden Werte einsetzen

$$p_1 = 0, \quad p_2 = P, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}n(n-1), \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = n'(n-2)$$

und findet so

$$2(P-1) = n'(n-2) - n(n-1).$$

Sodann kann man die übrigen *Plücker*schen Zahlen bestimmen. Die Doppelpunkte werden jedoch von doppelter Art sein, nämlich erstens eigentliche Doppelpunkte, von zwei Elementen gebildet, die verschie-



denen Geraden des Büschels entsprechen, und zweitens solche, die zu dreien in dreifachen Punkten zusammenfallen, nämlich die Schnittpunkte dreier Tangenten, die an die Kurve c in Schnittpunkten mit ein und derselben Geraden des Büschels gelegt werden. Auch die letztere dieser Zahlen werden wir mittels des Korrespondenzprinzips bestimmen [103]. Nachher kann man dann auch die Anzahl der eigentlichen Doppelpunkte finden. — Übrigens wird die gesuchte Kurve auch eine besondere Art von Wendetangenten haben, nämlich die $n'(n-2)$ Tangenten, die an die Kurve c in ihren Schnittpunkten mit den n' durch A gehenden Tangenten an dieselbe Kurve (vgl. [103]) gelegt werden können. Diese Anzahl muß man von der *Plücker*schen Zahl der Wendetangenten der gesuchten Kurve abziehen, um ihre übrigen Wendetangenten zu finden.

Die Fälle, in welchen entweder die Kurve c mehrfache Elemente besitzt, oder der Punkt A besondere Lagen, z. B. auf der Verbindungsgeraden zweier Wendepunkte, einnimmt, können entweder durch Untersuchung von Grenzübergängen, bei denen sich gewisse Teilkurven ausscheiden können, oder direkt durch dieselbe Methode behandelt werden. Im letzteren Fall muß man statt [65] (11) die Formel [65] (10) benutzen.[1])

[79] Geschlecht eines ∞^1-fachen Systems ebener Kurven. Alle hier behandelten numerischen Bestimmungen einer Kurve lassen sich unmittelbar auf die diese projizierenden Kegel übertragen. Für das Geschlecht kann man noch weitergehen. Den Kurven (c) eines algebraisch bestimmten ∞^1-fachen Systems ebener Kurven werden nämlich die Punkte einer ebenen Kurve k gegenseitig eindeutig entsprechen. Diese kann z. B. die Einhüllende der Polarachsen [19] eines festen Punktes A in Beziehung auf die Kurven des Systems sein. Diese entsprechen den Kurven eindeutig. Daß die Kurven auch den Punkten P der Kurve k oder ihren Tangenten eindeutig entsprechen, kann man wenigstens durch geeignete Wahl des Punktes A erreichen. Es sei nämlich die Gerade a die Polarachse eines Punktes A in Beziehung auf eine bestimmte Kurve des Systems. Dann ist es eine doppelte Bedingung, daß sie auch seine Polarachse in Beziehung auf eine andere bestimmte Kurve, eine einfache Bedingung, daß sie seine Polarachse in Beziehung auf irgendeine andere Kurve des Systems sei. Die Punkte A, die letztere Bedingung erfüllen, liegen auf einer Kurve. Es genügt uns also jedenfalls, A außerhalb dieser Kurve anzunehmen.

---

1) Dabei muß beachtet werden, daß die Punkte, denen die Zahl β_2 entspricht, wirklich demselben Element des gesuchten Ortes angehören. Da ich dies in einer Abhandlung im Bulletin des Sciences Mathématiques, 2 ser. t. XI, p. 82—86, wo ich dieselbe von *Steiner* gestellte Frage behandle, versäumt habe, wird das S. 84 (in der Mitte) angegebene Resultat ungenau. Überhaupt genügt es nicht, die Punktmultiplizität eines Elementes der gegebenen Kurve zu kennen, um seinen Einfluß auf das Geschlecht des Ortes zu bestimmen.

Das Geschlecht π einer Kurve, deren Punkte P gegenseitig eindeutig den Kurven (c) eines ∞^1-fachen Systems entsprechen, werden wir das Geschlecht des Systems nennen. Löst sich diese Kurve in mehrere auf, so wird sich das System entsprechend in mehrere auflösen.

Wir werden nun die allgemeine Geschlechtsformel [65] (10) auf das Entsprechen der Punkte P der Kurve k mit den Punkten P_1, in denen die den Punkten P entsprechenden Kurven c eine andere Kurve c_1 treffen, anwenden. Diese sei von der Ordnung n_1, der Klasse n_1', dem Geschlecht p_1; wir legen ihr singuläre Elemente mit den Multiplizitäten ν_1 und ν_1' bei. Die Kurven des Systems seien von der Ordnung n, der Klasse n'. Die Einhüllende der Kurven des Systems sei von der Ordnung r und der Klasse r'. Weiter bezeichnen wir, wie in [17], mit μ und μ' die Charakteristiken des Systems, d. h. die Anzahlen der diesem angehörenden Kurven, die beziehungsweise durch einen gegebenen Punkt gehen oder eine gegebene Gerade berühren, und mit ϱ die Anzahl derjenigen, die die Kurve c_1 berühren. Wir nehmen an, daß c_1 ganz unabhängig von dem System gewählt sei. Noch müssen wir beachten, daß das System stationäre und vielfache Kurven enthalten kann, d. h. solche Kurven, die beziehungsweise für mehrere der durch einen willkürlichen ihrer Punkte gehenden μ Kurven zu zählen sind oder jede Gerade in mehreren zusammenfallenden Punkten schneiden. Da es oft nur ein Teil einer Systemkurve ist, der diese Eigenschaften hat, nennen wir die Ordnung einer solchen Teilkurve $t(\overline{\gtrless} n)$, ihre Klasse $t'(\overline{\gtrless} n')$, und nehmen an, daß η der μ durch einen ihrer Punkte gehenden Systemkurven zusammenfallen, und daß sie jede Gerade (t-mal) in ϑ zusammenfallenden Punkten schneidet. Für jede dieser Kurven haben η und ϑ auch die dualistisch entsprechende Bedeutung. Doch ist zu beachten, daß, weil die Ordnung eines Punktes und die Klasse einer Geraden null ist, ein Punkt allein als Tangentenort, eine Gerade allein als Punktort auftritt.

In die Formel [65] (10) sind also die folgenden Werte einzusetzen:

$$p_1 = \pi, \quad p_2 = p_1, \quad \alpha_1 = \mu, \quad \alpha_2 = n n_1,$$

und in den folgenden Fällen wird $\beta_1 - \beta$ (das $\beta_2 - \beta_1$ in [65] (10) ersetzt) von 0 verschieden sein:

1. Wenn P der Kurve c entspricht, die die Einhüllende in einem ihrer rn_1 Schnittpunkte P_1 mit c_1 berührt, ist $\beta = 2$, $\beta_1 = 1$.

2. Wenn P einer der ϱ Kurven c entspricht, die c_1 (in einem Punkt P_1) berührt, ist $\beta = 1$, $\beta_1 = 2$.

3. Dem Mittelpunkt P_1 eines singulären Elements von c_1 entsprechen μ Punkte P; für ein solches Paar P, P_1 ist $\beta = 1$, $\beta_1 = \nu_1$.

4. Wenn P einer Kurve c entspricht, von welcher eine Teilkurve die Kurve c_1 in $n_1 t$ Punkten P_1 schneidet, ist für ein solches Punktepaar P, P_1, $\beta = \eta$, $\beta_1 = \vartheta$.

Dagegen üben etwaige mehrfache Punkte, die auf allen Kurven



des Systems vorkommen, keinen Einfluß aus. Ist nämlich P_1 ein Schnittpunkt des Ortes eines solchen σ-fachen Punktes mit c_1, P der Punkt, der der Kurve c entspricht, die in P_1 einen σ-fachen Punkt hat, so gehören zu dem Punktepaar P, P_1 die Werte $\beta = \beta_1 = \sigma$, also $\beta_1 - \beta = 0$.

Durch Einsetzen der ermittelten Zahlen findet man:

$$(1) \quad -rn_1 + \varrho + \mu \sum(\nu_1 - 1) + n_1 \sum t(\vartheta - \eta) = 2\mu(p_1 - 1) - 2nn_1(\pi - 1).$$

Ist die Kurve c_1 eine Gerade, so wird $n_1 = 1$, $p_1 = 0$, $\varrho = \mu'$, $\sum(\nu_1 - 1) = 0$. Man findet also

$$(2) \qquad 2n(\pi - 1) = r - \sum t(\vartheta - \eta) - \mu' - 2\mu,$$

und sodann durch Einsetzen in (1)

$$(3) \qquad \varrho = n_1\mu' + \mu(2(p_1 - 1) - \sum(\nu_1 - 1) + 2n_1) = n_1\mu' + n_1'\mu,$$

ein Resultat, das wir schon in [29] auf andere Weise gefunden haben.[1])

Die Gleichung (2) gibt uns einen Ausdruck für das Geschlecht des Systems. Sind die Kurven des Systems Gerade, die Umhüllungskurve also ein gewöhnlicher Tangentenort, so muß man, um die einem solchen entsprechenden Bezeichnungen von [65] zu erhalten, in (2) $n = 1$, $\mu = n'$, $\mu' = 0$, $r = n$, $t = 1$, $\vartheta = 1$, $\eta = \nu'$, $\pi = p$ setzen und findet dann wieder für das Geschlecht des Tangentenortes den Ausdruck

$$2(p - 1) = n + \sum(\nu' - 1) - 2n'.$$

Das dualistisch entsprechende Verfahren ergibt zur Bestimmung des Geschlechts eines Systems die Formel

$$(4) \qquad 2n'(\pi - 1) = r' - \sum t'(\vartheta - \eta) - \mu - 2\mu'.$$

Wendet man dieses Verfahren auf ein System von Punkten $\mu = 0$ an, so gilt dieser Ausdruck auch für einen Punktort [65] (9).

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (2) und (4) für das Geschlecht eines Systems findet man

$$(5) \quad n'(r - \sum t(\vartheta - \eta) - \mu' - 2\mu) = n(r' - \sum t'(\vartheta - \eta) - \mu - 2\mu').$$

[80] Anwendung auf das System von Kegelschnitten, die durch drei feste Punkte gehen und eine Kurve berühren. Da es beziehungsweise ein, zwei, vier Kegelschnitte gibt, die durch vier Punkte gehen, oder durch drei Punkte gehen und eine Gerade berühren, oder durch zwei Punkte gehen und zwei Gerade berühren, so hat [79] (3) das System von Kegelschnitten, die durch drei Punkte gehen und eine Kurve c_{n_1} berühren, die Charakteristiken $\mu = n_1' + 2n_1$, $\mu' = 2n_1' + 4n_1$.

---

1) Als Übungsbeispiel empfiehlt es sich, ohne das Geschlecht des Systems zu benutzen, den Ausdruck (3) durch Anwendung des allgemeinen Geschlechtsatzes auf das Entsprechen zwischen den Schnittpunkten der Kurven des Systems mit der Kurve c_1 und mit einer Geraden zu beweisen.

Da die Kegelschnitte des Systems den Punkten der Kurve c_{n_1} (1, 1)-deutig entsprechen, so ist das Geschlecht π des Systems dem Geschlecht p_1 der Kurve gleich. Diese Kurve ist zusammen mit den drei festen Punkten Einhüllende der Kegelschnitte; also ist $r = n_1$. Außerdem ist $n = 2$. Die stationären Kurven des Systems sind doppelter Art, nämlich 1. die Kegelschnitte, die mit c_{n_1} Berührung 2ter Ordnung haben, und deren Anzahl wir x nennen wollen, und 2. Teile gewisser, aus zwei Geraden bestehender Kegelschnitte. Sind nämlich A, B, C die drei gegebenen Punkte, so werden die durch einen Punkt P der Geraden AB gehenden Kegelschnitte des Systems aus dieser Geraden und einer durch C gehenden geraden Linie bestehen, die entweder durch einen der n_1 Schnittpunkte der Geraden AB mit c_1 gehen oder eine der n_1' Tangenten von C aus an c_1 sein muß. Da nun $\mu = 2n_1 + n_1'$ ist, sind die n_1 ersten dieser zusammengesetzten Kegelschnitte je doppelt zu zählen. AB ist also n_1-mal als stationärer Zweig einer Kurve des Systems zu zählen, ebenso BC und CA. Für alle diese stationären Kurven oder Teilkurven hat man $\vartheta = 1$, $\eta = 2$; also $\sum t(\vartheta - \eta) = -\sum(t) = -2x - 3n_1$. Durch Einsetzen dieser Werte in [79] (2) findet man

$$x = 2(p_1 - 1) + 2n_1 + 2n_1' = 3n_1' + e_1 = 3n_1 + e_1',$$

wo e_1 und e_1' die *Plücker*schen Zahlen $\sum(\nu_1 - 1)$ und $\sum(\nu_1' - 1)$ der Spitzen und Wendetangenten der Kurve c_{n_1} sind.[1])

[81] Anwendung auf Kurvenbüschel. Die Kurven c_n eines Büschels n^{ter} Ordnung entsprechen auf gegenseitig eindeutige Weise den Punkten einer Geraden. Ihr System ist also vom Geschlecht $\pi = 0$. Es hat die Charakteristik $\mu = 1$. Die Einhüllende, die aus den n^2 festen Punkten des Büschels besteht, ist von der Ordnung $r = 0$ und von der Klasse $r' = n^2$. Der Büschel enthält, wenn man seine Kurven als Punktörter betrachtet, im allgemeinen keine Kurve mit mehrfachen und, da $\mu = 1$ ist, auch keine mit stationären Teilkurven. Also ist $t = 0$ und $\sum t(\vartheta - \eta) = 0$. Die Formel [79] (2) ergibt also $\mu' = 2(n - 1)$. Dieses Resultat haben wir zwar bereits auf andere Weise gefunden [34], und es wird sich auch als eine unmittelbare Folge des Korrespondenzprinzips ergeben. Aus der gegenwärtigen Beweisführung geht aber hervor, daß eine Kurve, die eine Gerade in γ zusammenfallenden Punkten trifft, $(\gamma - 1)$-mal unter die μ' diese Gerade berührenden Kurven des Büschels mitzuzählen ist; auf ähnliche Weise läßt sich der vorliegende Beweis des Ausdrucks [79] (3) für ϱ benutzen (vgl. übrigens [15]).

---

1) Wenn es sich nur darum handelt, die Anzahl x zu finden, so könnte man sich damit begnügen, ohne vom Geschlecht des Systems zu sprechen, den allgemeinen Geschlechtsatz auf die Berührungspunkte der Kegelschnitte des Systems mit c_1 und ihre Schnittpunkte mit einer willkürlichen Geraden anzuwenden.



In der Formel [79] (4) ist, wenn der Büschel allgemein ist, noch $n' = n(n-1)$ und $r' = n^2$ zu setzen. Man findet dann

$$\sum t'(\vartheta - \eta) = 3(n-1)^2.$$

Diese Anzahl wird, wie wir auch früher [35] 1 bewiesen haben, im allgemeinen den Kurven mit einem Doppelpunkt entsprechen, denn im allgemeinen kommen nur solche vor und für diese ist $\vartheta = 2$, $\eta = 1$. Die hier bewiesene Formel zeigt aber, daß eine etwa im Büschel vorkommende Kurve mit einem δ-fachen Punkt, der die Klasse um σ erniedrigt, $(\sigma - \delta + 1)$-mal mitzuzählen ist. Für einen solchen Punkt ($t' = 1$) ist nämlich $\vartheta = \sigma$, $\eta = \delta - 1$; denn wir sahen eben, daß sie $(\delta - 1)$-mal unter die μ' Kurven, die eine willkürliche durch diesen Punkt gehende Gerade berühren, mitzuzählen ist. Für einen Doppelpunkt ist $\sigma = \delta = 2$, für eine Spitze $\sigma = 3$, $\delta = 2$, für einen gewöhnlichen dreifachen Punkt $\sigma = 6$, $\delta = 3$.

Auf ähnliche Weise kann man durch Benutzung der Formeln (2) und (4) auch andere Singularitäten des Büschels berücksichtigen. Ist dieser z. B. durch eine n-fache Gerade g und eine beliebige Kurve n^{ter} Ordnung bestimmt, d. h., haben die Kurven des Büschels in n Punkten B einer Geraden Berührung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung miteinander, so hat man $\pi = 0$, $\mu = 1$, $r = 0$, $\sum t(\vartheta - \eta) = n - 1$, und man findet sodann aus [79] (2) $\mu' = n - 1$.

Die Teilkurven, die zu beachten sind, wenn die Kurven des hier zu untersuchenden Büschels als Tangentenörter betrachtet werden, sind jetzt neben den x Kurven mit Doppelpunkten, die immer je einmal in $\sum t'(\vartheta - \eta)$ mitzuzählen sind, die n festen Punkte B der Geraden g. Da die $n(n-1)$ Tangenten, die von einem willkürlichen Punkt C aus an die mit g zusammenfallende n-fache Kurve des Systems gehen, zu je $n - 1$ mit den n Geraden CB zusammenfallen, hat jede dieser Teilkurven die Multiplizität $\vartheta = n - 1$. Die Anzahl η mit der n-fachen Geraden zusammenfallender Kurven des Büschels, die eine willkürliche, durch B gehende Gerade berühren, ist 1; denn durch eine einfache Anwendung des allgemeinen Geschlechtsatzes findet man, daß $n - 2$, also $\mu' - 1$ andere Kurven des Büschels dieselbe Gerade berühren. Also wird $\sum t'(\vartheta - \eta) = x + n(n-2)$. Da es keine andere Einhüllende gibt, muß man ferner $r' = 0$ in die Formel [79] (4) einsetzen. Diese Formel gibt dann, da $n' = n(n-1)$ ist, $x = (n-1)^2$. Dies ist also die Anzahl der eigentlichen Kurven mit Doppelpunkten in diesem speziellen System.

Wenden wir dieses Resultat auf den Büschel der Kurven dritter Ordnung an, die drei auf einer Geraden g liegende Wendepunkte A, B, C und in diesen dieselben Wendetangenten a, b, c haben. Der Büschel muß vier Kurven mit Doppelpunkten enthalten. Von diesen fallen drei mit der aus den Geraden a, b, c gebildeten Kurve zusammen, da diese selbst drei Doppelpunkte hat. Es wird also noch eine Kurve übrig sein

mit den Wendetangenten a, b, c und den Wendepunkten A, B, C und mit einem Doppelpunkt. Diese eindeutige Bestimmung drückt aus, daß sich dieser Doppelpunkt linear konstruieren läßt, wenn die Geraden a, b, c und g gegeben sind. Da die Konstruktion auch in Beziehung auf a, b, c symmetrisch sein muß, ist dies nur dann möglich, wenn der Doppelpunkt der Schnittpunkt der Polaren der Punkte A, B und C in Beziehung auf die Geradenpaare bc, ca und ab ist. Daß diese Konstruktion richtig ist, folgt auch aus bekannten Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung; wir sehen aber hier, daß die abzählenden Methoden genügen, um sie zu entdecken und beweisen. Gehen a, b und c durch einen Punkt, so haben wir hier auch ein Beispiel für ein soeben bewiesenes Resultat, nämlich dafür, daß, wenn eine Kurve eines Büschels einen dreifachen Punkt hat, vier der $3(n-1)^2$ Doppelpunkte der Kurven des Büschels in diesem Punkt zusammenfallen.

[82] Sytem von Kurven mit der Charakteristik $\mu = 2$. Auch die ebenen Kurvensysteme mit der Charakteristik $\mu = 2$, für welche wir schon in [24] die Ordnung $r = 2n$ der Einhüllenden gefunden haben, sind vom Geschlecht $\pi = 0$. Halten wir nämlich eine Kurve c_n des Systems fest, so wird durch einen Punkt P dieser Kurve nur noch eine weitere Kurve des Systems gehen, die mit c_n eine Gruppe von n^2 Schnittpunkten (P inbegriffen) bestimmt. Durch diese Gruppe und einen außer c_n liegenden, festen Punkt A ist eine neue Kurve n^{ter} Ordnung k_n bestimmt. Die Kurven k_n bilden ein System mit der Charakteristik $\mu = 1$; denn durch einen Punkt der Kurve c_n geht nur eine solche Kurve. Ein solches System ist ein Büschel [37]. Die Kurven des gegebenen Systems entsprechen gegenseitig eindeutig den Schnittpunktgruppen auf c_n, also den Kurven k_n eines Büschels.

Somit ist das Geschlecht $\pi = 0$. Das System wird, wenn die Kurven als Punktörter betrachtet werden, im allgemeinen weder mehrfache noch stationäre Teilkurven enthalten. Wir können also voraussetzen, daß $\sum t(\vartheta - \eta) = 0$ ist. Setzt man die hier genannten Werte in die Formel [79] (2) ein, so findet man $\mu' = 4(n-1)$. Dieses Resultat läßt sich auch leicht durch das Korrespondenzprinzip beweisen (Kap. IV).

In einem System mit willkürlicher Charakteristik μ fallen im allgemeinen zwei der μ durch einen beliebigen Punkt P der Umhüllungskurve gehenden Kurven zusammen. Ist P eine Spitze der Umhüllungskurve, so fallen im allgemeinen drei, und ist er ein Doppelpunkt, zweimal zwei zusammen [15], wenn nicht dieser Punkt entweder selbst ein fester Punkt der Kurven des Systems, also ein Teil der Einhüllenden, oder ein Doppelpunkt einer Systemkurve ist, die in dieser Weise als Berührungskurve beider Zweige der Einhüllenden betrachtet werden kann. Tritt keiner dieser Spezialfälle ein, so wird, wenn $\mu = 2$ ist, die Einhüllende keine Doppelpunkte haben, ebensowenig Spitzen oder andere

mehrfache Punkte. Im allgemeinen hat man also [12] für $\mu = 2$ die Beziehung $r' = r(r-1) = 2n(2n-1)$.

Setzt man die gefundenen Werte und $n' = n(n-1)$ in [79] (4) ein, so findet man

$$\sum t'(\vartheta - \eta) = 6(n-1)^2,$$

und diese Anzahl x wird, wie in [81], im allgemeinen den Kurven mit Doppelpunkten zugehören. Die Anzahl dieser Punkte, die in einen etwaigen komplizierteren singulären Punkt fallen mögen, wird nach der in [81] für einen Büschel gefundenen Regel bestimmt.

Die allgemeine Geschlechtsformel kann auch benutzt werden, um die Anzahl y der Kurven des Systems zu finden, die mit der Einhüllenden zwei zusammenfallende Berührungspunkte, also Berührung dritter Ordnung haben. Die Einhüllende ist [70] (3) vom Geschlecht $(2n-1)(n-1)$. In die Formel [65] (11) sind also folgende Werte einzusetzen:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = (2n-1)(n-1), \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = n^2, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = y.$$

Man findet dann

$$y = 6n(n-1).$$

[83] System von Kegelschnitten, die eine Kurve vierter Ordnung viermal berühren. Der in der Untersuchung von [82] inbegriffene Fall, in welchem $n = 2$ und daher die Ordnung der Einhüllenden vier ist, erhält dadurch besonderes Interesse, daß diese Einhüllende eine ganz beliebige Kurve vierter Ordnung k_4 sein kann. Eine solche Kurve hat nämlich jedenfalls unendlich viele, viermal berührende Kegelschnitte, da ein solcher nur vier Bedingungen unterworfen wird. Sei c_2 einer dieser Kegelschnitte. Der durch seine vier Berührungspunkte gehende Büschel von Kegelschnitten wird dann auf k_4 Gruppen von vier Punkten ausschneiden, in welchen k_4 von Kegelschnitten berührt wird (vgl. [37] und [48] 2). Diese Kegelschnitte bilden ein ∞^1-faches System mit der Charakteristik $\mu = 2$, denn durch jeden Punkt der Kurve k_4 gehen zwei (zusammenfallende) Kegelschnitte des Systems und nur diese. Der Kegelschnitt c_2 gehört diesem System an, und da c_2 unter den viermal berührenden Kegelschnitten willkürlich gewählt war, verteilen sich alle viermal berührenden Kegelschnitte auf solche ∞^1-fache Systeme mit der Charakteristik $\mu = 2$.

Für ein solches System werden die in [82] gefundenen Anzahlen $x = 6$, $y = 12$. Die sechs Kegelschnitte mit Doppelpunkten müssen je aus zwei Doppeltangenten gebildet sein. Solche hat die Kurve 28 [70]. Sie bilden im ganzen $\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 27$ Kegelschnitte mit Doppelpunkten, und da sechs dieser Kegelschnitte jedem System angehören, gibt es 63 Systeme. Zusammengenommen bilden diese Systeme ein ∞^1-faches System mit den Charakteristiken $\mu = 126$, $\mu' = 252$. Wir werden später [173] sehen, wie man diese Zahlen finden kann, ohne dabei die Spaltung in 63 Systeme



zu beachten.[1]) Wären μ und μ' so bestimmt worden, so könnte die Geschlechtsformel [79] (2) eben auf die Zerlegung des Systems führen. Man müßte dann, neben den genannten Werten von μ und μ', $r = 4 \cdot 63 = 252$ setzen, weil k_4 in jedem Punkt von 63 viermal berührenden Kegelschnitten berührt wird; da es unter den viermal berührenden Kegelschnitten weder stationäre oder mehrfache noch solche gibt, die stationäre oder mehrfache Teilkurven enthalten, ist $\sum t(\vartheta - \eta) = 0$. Man findet dann $\pi - 1 = -63$; also ist nach Artikel [67], der auch auf das Geschlecht eines Systems anwendbar sein muß, das System zusammengesetzt, und

$$\pi - 1 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots \pi_k - k = -63,$$

wo k die Anzahl, $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k$ das Geschlecht der einzelnen Systeme ist. Von diesen gibt es höchstens 63, weil wenigstens zwei zusammenfallende Kegelschnitte jedes Systems durch einen Punkt der Kurve gehen und $\mu = 126$ ist. Da weiter $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k$ alle $\geqq 0$ sind, muß sich $k = 63$ und $\pi_1 = \pi_2 = \cdots \pi_k = 0$ ergeben.

An diese allgemeine Behandlung der viermal berührenden Kegelschnitte einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung kann man durch Grenzübergänge jene Fälle anschließen, in welchen die Kurve singuläre Punkte hat oder gar aus Kurven niedrigerer Ordnung zusammengesetzt ist. In solchen Fällen werden mehrere der 63 Systeme unter sich zusammenfallen.

[84] Anwendung des Geschlechtsatzes und der *Plücker*schen Formeln auf Raumkurven. Die Geschlechtsätze lassen sich natürlich auch auf räumliche Aufgaben anwenden. Dies brauchen wir jedoch nicht an vielen Beispielen zu erläutern; denn teils sind die Anwendungen dieser Art mit den bereits betrachteten planimetrischen Anwendungen nahe verwandt, teils sind ihre Resultate unmittelbare Folgen der bereits gefundenen planimetrischen Ergebnisse.

So sind z. B. die Geschlechtsformeln, die *Plücker*schen Formeln und die Erweiterungen dieser Formeln, die man durch Berücksichtigung höherer Sigularitäten erhält ([69] — [71]), unmittelbar anwendbar erstens auf die Projektion einer Raumkurve auf eine Ebene, zweitens auf ebene Schnitte der von ihren Tangenten erzeugten abwickelbaren Fläche. Wir haben nämlich schon in [14] angegeben, welche Singularitäten dieser ebenen Kurven gegebenen Singularitären der Raumkurve entsprechen. Auch ist das Geschlecht der einen dieser Kurven wegen des gegenseitig eindeutigen Entsprechens dem der anderen gleich und kann das Geschlecht der Raumkurve genannt werden. Da wir uns öfters, wie schon früher [33], [64], mit Raumkurven von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten beschäftigen werden, die (wenn auch verschiedenen

1) Man kann die genannten Zahlen auch aus der Betrachtung des Falles finden, in welchem die Kurve vierter Ordnung aus vier Geraden besteht [26].

Gattungen angehörend) als punktgeometrisch allgemein [7] aufgefaßt werden können, so wollen wir hier besonders für diese das Formelsystem aufstellen, das man auf die genannte Weise erlangt. Wir nennen wie in [7] das Geschlecht p, den Rang n', die Klasse des abwickelbaren Orts der Tangenten n'', und bezeichnen weiter mit x die Ordnung der Doppelkurve dieser abwickelbaren Fläche, mit x'' die Klasse der durch die Doppeltangentialebenen der Kurve erzeugten abwickelbaren Fläche, mit h'' die Anzahl der Schnittlinien zweier Schmiegungsebenen, die in einer gegebenen Ebene liegen, und mit e'' die Anzahl der „stationären" Schmiegungsebenen der Kurve[1]), d. h. die Anzahl der Ebenen, die die Kurve in vier konsekutiven Punkten schneiden. (Die Singularität der letzteren Ebenen wird in [14] durch die Zahlen $v = 1$, $v' = 1$, $v'' = 2$ charakterisiert.) Die Anwendung der *Plücker*schen Formeln auf eine Projektion liefert nun

$$(1) \qquad \begin{cases} n(n-1) = n' + 2h, \\ n'(n'-1) = n + 2x'' + 3n'' \\ n'' = 3(n'-n). \end{cases}$$

Die Anwendung auf einen ebenen Schnitt der abwickelbaren Fläche ergibt:

$$(2) \qquad \begin{cases} n'(n'-1) = n'' + 2x + 3n \\ n''(n''-1) = n' + 2h'' + 3e'' \\ e'' - n = 3(n''-n') \end{cases}$$

Der Ausdruck für das Geschlecht liefert weiter:

$$(3) \qquad 2(p-1) = n' - 2n = n + n'' - 2n' = n' + e'' - 2n'',$$

(was jedoch keine neue Relation zwischen den übrigen Zahlen bedeutet). Unter den hieraus folgenden Gleichungen heben wir jedoch

$$(4) \qquad e'' = 2(n''-n)$$

hervor. Wir sehen, daß die hier genannten Zahlen durch n und h vollständig bestimmt sind. So wird z. B.

$$n' = n^2 - n - 2h$$
$$n'' = 3(n^2 - 2n - 2h).$$

Der allgemeine Geschlechtsatz [65] kann weiter benutzt werden, um andere zu der Kurve gehörige Zahlen zu bestimmen, z. B. die Anzahl v'' der Schmiegungsebenen, die die Kurve noch einmal berühren. Wir betrachten dann die Korrespondenz zwischen einem beliebigen Punkt P_1 der Kurve und den $n-3$ Punkten P_2, in denen die Schmiegungsebene in P_1 die Kurve außerdem noch schneidet. Da durch den Punkt P_2 außer der zu ihm selbst gehörigen Schmiegungsebene noch $n''-3$ weitere

1) Warum wir diese Benennung und die spätere v'' anwenden, wird in [85] erklärt werden.

Schmiegungsebenen gehen [14], und da P_1 und P_2 beide auf der gegebenen Kurve vom Geschlecht p liegen, hat man mit den Bezeichnungen von [65]

$$p_1 = p_2 = p, \quad \alpha_1 = n'' - 3, \quad \alpha_2 = n - 3.$$

Zwei der $n - 3$ einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 werden stets zusammenfallen, wenn die Schmiegungsebene in P_1 eine der v'' gesuchten Ebenen ist, und nur dann. Zwei der $n'' - 3$ einem Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_1 fallen zusammen, wenn P_2 entweder einer der $e''(n-4)$ Schnittpunkte einer stationären Schmiegungsebene oder ein Punkt ist, in dem die Kurve von der Tangente in einem anderen Punkt P_1 getroffen wird. Nun haben wir früher (in [64]) gesehen, daß es $v = n(n' - 2) - 2n''$ $(= n(n-2)(n-5) - 2h(n-6))$ Tangenten gibt, die die Kurve noch einmal schneiden. Also muß man in der Formel [65] (11)

$$\eta_1 = e''(n-4) + n(n'-2) - 2n'', \; \eta_2 = v''$$

setzen. Dadurch findet man

$$\begin{aligned} v'' &= 2(p-1)(n''-n) + e''(n-4) + n(n'-2) - 2n'' \\ &= 3[n(n^3 - 3n^2 - 8n + 22) - 2h(2n^2 - 3n - 10) + 4h^2]. \end{aligned}$$

[85] Die dualistischen Formeln von *Cayley*. Eben die Allgemeinheit des Ausgangspunkts erlaubt es, durch geeignete Grenzübergänge die in [84] aufgestellten Formeln auch auf solche Fälle anzuwenden, in welchen man der durch n und h charakterisierten Kurve andere Singularitäten beilegt als solche, die, wie die e'' stationären Ebenen, einer in der genannten Weise charakterisierten Kurve im allgemeinen angehören. Fügen wir zu den letzteren die den e'' stationären Ebenen dualistisch entsprechenden singulären Gebilde, nämlich e stationäre Punkte oder Spitzen hinzu, die durch die Zahlen $\nu = 2, \nu' = \nu'' = 1$ charakterisiert werden [14], so bekommt man die zuerst von *Cayley* aufgestellten Formeln, die, wie die *Plücker*schen für die Ebene, ein in Beziehung auf die Dualität im Raume symmetrisches System bilden. Da liegt es aber auch nahe, die punktgeometrisch einfacheren wirklichen Doppelpunkte, deren Anzahl wir d nennen wollen, sowie die dualistisch entsprechenden d'' Ebenen, die zweimal Schmiegungsebenen der Kurve sind, und dazu e' Wendetangenten, die durch $\nu = 1, \nu' = 2, \nu'' = 1$ charakterisiert werden, mit zu berücksichtigen. Nehmen wir nun besondere Rücksicht auf alle diese Singularitäten, so daß wir z. B. nicht jede Ebene durch einen eigentlichen Doppelpunkt oder eine eigentliche Spitze als zwei- oder dreimal zählende Tangentialebene, nicht jede Ebene durch eine Wendetangente als Schmiegungsebene betrachten — was der in den Formeln [84] eingenommene rein punktgeometrische Standpunkt erforderte —, so sind diese Formeln durch die folgenden zu ersetzen, die wir, um die Dualität hervortreten zu lassen, ein wenig umordnen:

$$(1') \qquad \begin{cases} n(n-1) = n' + 2h + 2d + 3e \\ n'(n'-1) = n + 2x'' + 3n'' + 3e' \\ n'' + e' - e = 3(n' - n) \end{cases}$$

$$(2') \qquad \begin{cases} n''(n''-1) = n' + 2h'' + 2d'' + 3e'' \\ n'(n'-1) = n'' + 2x + 3n + 3e' \\ n + e' - e'' = 3(n' - n''); \end{cases}$$

der Ausdruck für das Geschlecht erhält die Form:

$$(3') \quad 2(p-1) = n' + e - 2n = n + n'' + e' - 2n' = n' + e'' - 2n''.$$

Für (4) findet man sodann

$$(4') \qquad e'' - e = 2(n'' - n).$$

Wir haben zwar schon in [84] unsere Benennungen dieser dualistischen Betrachtung angepaßt; doch sind unsere ersten Formeln [84] (oder die ihnen dualistisch entsprechenden) dann vorzuziehen, wenn man einen bestimmten Ausgangspunkt dafür haben will, was als allgemein oder als speziell zu betrachten ist, und dies ist für Grenzübergänge notwendig.

Die Dualität, die in den *Cayley*schen Formeln hervortritt, kann aber zur Auffindung der unbestimmten Koeffizienten, über deren Verwendung wir in [62] gesprochen haben, benutzt werden, und dafür kann die Anpassung der in [84] ausgeführten Bestimmung der Zahlen, die wir v und v'' nannten, an einen solchen Fall, wo man der Kurve eine für punktgeometrisch bestimmte Kurven außergewöhnliche Singularität beilegt, als Beispiel dienen. Ihrer Bedeutung nach entsprechen sich die Zahlen v und v'' dualistisch. Dieses Entsprechen kann jedoch in den gefundenen Ausdrücken nicht hervortreten, weil wir zwar die e'' stationären Schmiegungsebenen, aber, dem punktgeometrischen Standpunkte gemäß, nicht etwa vorkommende stationäre Punkte oder Spitzen berücksichtigt haben. Jetzt werden wir der Fläche e Spitzen — vorläufig aber noch nicht die Singularitäten, deren Anzahl wir oben mit e', d und d'' bezeichnet haben, beilegen. Um diese Spitzen zu berücksichtigen, muß man die Formeln (1')—(4') anwenden, aber darin $e' = d = d'' = 0$ setzen.

Wenden wir nun zunächst den allgemeinen Geschlechtsatz auf dieselbe Weise, wie in [84], an, so wird hierbei die Einführung der den e'' stationären Schmiegungsebenen dualistisch entsprechenden e Spitzen keine Schwierigkeit verursachen. Man findet

$$(5) \qquad 2(p-1)(n''-n) = v'' + e(n''-4) - v - e''(n-4)$$

Die in [64] ausgeführte Bestimmung von v läßt aber, wenn man nicht auf schwierige infinitesimale Untersuchungen eingehen will, nur erkennen, daß die daselbst gefundene Formel im hier betrachteten Fall durch

$$(6) \qquad nn' = 2n + 2n'' + Be + v$$

zu ersetzen ist, wo B ein noch unbekannter, ganzzahliger Koeffizient ist. Wegen des dualistischen Entsprechens von v und v'' muß ebenso

$$n''n' = 2n'' + 2n + Be'' + v'' \tag{7}$$

sein. Setzt man die aus (6) und (7) erhaltenen Ausdrücke für v und v'' in (5) ein und wendet die Formel (4′) an, so findet man

$$(n'' - n)(2(p-1) - n' - 8 + 2B) + e''n - en'' = 0.$$

Aus den dritten Ausdrücken (1′) und (2′) folgt aber, daß

$$e''n - en'' = (n'' - n)(-n - n'' + 3n')$$

ist. Setzt man diesen Wert für $e''n - en''$ in die vorige Gleichung ein, so findet man mit Berücksichtigung des zweiten Ausdrucks (3′):

$$(-8 + 2B)(n'' - n) = 0;$$

da dies auch für $n'' \gtrless n$ gelten soll, muß $B = 4$ sein.

Eine ähnliche Bestimmung des Einflusses von etwa vorkommenden e' Wendetangenten ist deswegen unmöglich, weil diese Singularität sich selbst dualistisch entspricht. Betrachtet man aber bei der Bestimmung in [64] diesen Fall als einen Grenzfall, so wird man erkennen, daß in jeder Wendetangente zwei der v Tangenten, die die Kurve in einem weiteren Punkte schneiden, zusammenfallen[1]), und daß durch jede Wendetangente eine der von einem Punkt B ausgehenden Schmiegungsebenen geht. Scheidet man also in (6) diese Anzahlen aus den Gliedern $2n'' + v$ aus, so muß man sie durch $4e'$ ersetzen, also dieses Glied den übrigen hinzufügen. Der Einfluß etwa vorkommender d Doppelpunkte und d' doppelter Schmiegungsebenen ist leicht zu erkennen. Durch Berücksichtigung aller der hier eingeführten Singularitäten findet man sodann:

$$\begin{cases} v = nn' - 2n - 2n'' - 4e - 4e' - 4d \\ v'' = nn'' - 2n'' - 2n - 4e'' - 4e' - 4d''. \end{cases} \tag{8}$$

[86] Doppelkurve einer abwickelbaren Fläche. Wir haben schon in [84] und [85] Mittel zur Bestimmung der Ordnung x der Doppelkurve einer abwickelbaren Fläche angegeben. Bei der weiteren Untersuchung dieser Kurve wird es natürlich sein, dieselben Singularitäten, wie in [85], zu berücksichtigen. Ist nämlich die Rückkehrkurve der Fläche als Ort ihrer Punkte gegeben, so wird sie im allgemeinen e'' stationäre Schmiegungsebenen haben, und ist die Fläche als Umhüllungsfläche von ∞^1 Ebenen gegeben, so wird die Rückkehrkurve im allgemeinen e Spitzen haben. Diese beiden Singularitäten verdienen also jedenfalls berücksichtigt zu werden; dagegen setzen wir $d = d' = 0$

1) Da der gesuchte Koeffizient des Gliedes e', im Anschluß an eine andere Art der Bestimmung der Zahl v gefunden werden kann, wenn man auch den Korrespondenzsatz kennt und benutzen kann, gehen wir auf diesen Grenzübergang nicht näher ein. Er erklärt wenigstens die Entstehung des Koeffizienten 4.

voraus. Wir wenden auch dieselben Benennungen wie in [85] an und stützen uns auf die daselbst gefundenen Formeln.

Bei der weiteren Untersuchung werden wir die in [14] bewiesenen Eigenschaften eines Kurvenelements und besonders den folgenden Satz benutzen: Sind A, a und α der Mittelpunkt, die Mitteltangente und die Mittelschmiegungsebene eines Kurvenelements, so wird die Schnittkurve einer durch die Tangente a gehenden Ebene mit der abwickelbaren Tangentialfläche aus der ν'-mal zu zählenden Geraden a und aus einer Kurve von der Ordnung $n' - \nu'$ bestehen, die ein Element mit dem Mittelpunkt A und der Mitteltangente a mit der Punktmultiplizität ν und der Tangentenmultiplizität $\nu' + \nu''$ besitzt. Die Anzahl ihrer zusammenfallenden Schnittpunkte mit a ist $\nu + \nu' + \nu''$, sie wird also diese Gerade noch in $n' - \nu - 2\nu' - \nu''$ weiteren Punkten schneiden.

Wir wollen den Geschlechtsatz benutzen, um das Geschlecht π der Doppelkurve zu bestimmen. Wir betrachten das Entsprechen zwischen einem beliebigen Punkt P_1 der gegebenen Raumkurve (Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche) und den Schnittpunkten P_2 der Tangente t_1 in P_1 mit der gesuchten Doppelkurve. Da im allgemeinen $\nu = \nu' = \nu'' = 1$ ist, wird die Anzahl dieser Punkte $n' - 4$ sein. Umgekehrt ist jeder Punkt P_2 der Doppelkurve Schnittpunkt zweier Tangenten t_1. Ihm entsprechen also zwei Punkte P_1. Mit den Bezeichnungen [65] ist also

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = n' - 4.$$

Sollen zwei Punkte P_2 konsekutive Punkte der Doppelkurve sein, so muß — indem wir vorläufig von einem Zusammenfallen absehen, das in den singulären Punkten der Raumkurve stattfinden mag — die Tangente t_1 entweder die abwickelbare Fläche berühren, also in einer (von der zu P_1 gehörigen verschiedenen) Schmiegungsebene liegen, oder ihre Rückkehrkurve (d. h. die gegebene Raumkurve) schneiden. Die Anzahlen der diese Bedingungen erfüllenden Tangenten haben wir v'' und v genannt. Vorläufig haben wir also den Beitrag $v + v''$ zur Anzahl η_2.

Sollen die zwei demselben Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_1 konsekutiv sein, so müssen sich die Tangenten in diesen konsekutiven Punkten schneiden, also in einer Ebene liegen, die die Raumkurve in vier konsekutiven Punkten schneidet. Dies findet nur dann statt, wenn der Punkt P_1 einer der Punkte ist, deren Anzahl wir mit e, e', e'' bezeichnet haben.

Für den punktallgemeinen Fall, in welchem α eine der e'' stationären Tangentialebenen ist, haben wir $\nu = 1$, $\nu' = 1$, $\nu'' = 2$. Also wird, wenn P_1 in ihren Berührungspunkt A fällt, die Tangente a die Doppelkurve außer in A in $n' - 5$ anderen Punkten treffen; der $(n' - 4t)^{\text{te}}$ fällt in den Punkt A, die ihm entsprechenden zwei Punkte P_1 der Rückkehrkurve ebenfalls. Da diese konsekutiv sind, bekommt man den Beitrag e'' zur Anzahl η_1.



Dasselbe geschieht für die e Spitzen, für welche $\nu = 2, \nu' = 1, \nu'' = 1$ ist.

Sei nun a eine der e' Wendetangenten; für diese hat man $\nu = 1$, $\nu' = 2$, $\nu'' = 1$. a wird also die Doppelkurve außer in A in $n' - 6$ Punkten treffen. Fällt nun P_1 nach A, so müssen zwei der entsprechenden Punkte P_2 nach A fallen. Hier muß man aber noch untersuchen, ob diese zwei Punkte auf der Doppelkurve konsekutiv sind, oder ob sie verschiedenen Elementen dieser Kurve angehören. Wir können dazu den Schnitt der abwickelbaren Fläche mit einer beliebigen, durch A gehenden Ebene betrachten. Das singuläre Element dieses Schnittes hat die Punktmultiplizität 3 (nämlich [14] $\nu + \nu'$) und die Tangentenmultiplizität 1 (nämlich ν''). Diese Multiplizität entsteht [71] durch das Zusammenfallen zweier Spitzen mit einem Doppelpunkt. Die Spitzen sind die Schnittpunkte der Ebene mit der Rückkehrkurve und der Tangente a, die selbst Rückkehrecke ist; der Doppelpunkt ist der einzige nach A fallende Schnittpunkt mit der Doppelkurve, von welcher also nur ein Element mit der Punktmultiplizität 1 durch den Wendepunkt A geht.

Dem nach A fallenden Punkt P_1 entsprechen also zwei konsekutive, mit A zusammenfallende Punkte P_2, und ebenso umgekehrt. Die dieses Entsprechen charakterisierenden Zahlen sind daher $\beta_1 = \beta_2 = 2$, es ist also nach [65] (10) nicht mitzuzählen.

Wir erhalten so zur Bestimmung des gesuchten Geschlechtes π die folgende Gleichung

$$(1) \qquad 4(\pi - 1) - 2(n' - 4)(p - 1) = v + v'' - e - e'',$$

woraus man mittels der Formeln in [85] einen Ausdruck in den die Raumkurve oder abwickelbare Fläche bestimmenden Zahlen herleiten kann.

Die dualistische Symmetrie der Formel (1) war vorauszusehen; denn der Doppelkurve, in deren Punkten sich zwei Tangenten der gegebenen Kurve schneiden, entspricht dualistisch die Umhüllungsfläche der doppelten Tangentialebenen, die zwei Tangenten enthalten, und den Punkten jener Kurve entsprechen gegenseitig eindeutig die Tangentialebenen dieser abwickelbaren Fläche. Diese Gebilde sind also von demselben Geschlecht.

Die Doppelkurve wird [84] als Punktgebilde durch ihre Ordnung x, ihr Geschlecht π und die Anzahlen solcher Singularitäten charakterisiert, die nicht allgemein einer als Punktgebilde bestimmten Kurve angehören. Von solchen treffen wir v Spitzen, nämlich die v Punkte, in denen die Rückkehrkurve von einer Tangente in einem anderen Punkte und also auch von einem anderen Mantel der abwickelbaren Fläche getroffen wird.

Die Doppelkurve hat auch dreifache Punkte; solche sind die, von denen drei Tangenten der gegebenen Raumkurve ausgehen, in denen sich also drei Mäntel der abwickelbaren Fläche schneiden. In einem solchen Punkt fallen drei Doppelpunkte der Doppelkurve zusammen. Wir werden ihre Anzahl später in [110] bestimmen.

Wir können weiter beweisen, daß eine Wendetangente a der Rückkehrkurve auch Wendetangente der Doppelkurve ist. In diesem Fall wird nämlich eine durch a gehende Ebene die Fläche noch in einer Kurve von der Ordnung $n' - 2$ schneiden, die ein Element (A, a) mit der Punktmultiplizität 1 und der Tangentenmultiplizität 3 enthält, die also in A weder Doppelpunkte noch Spitzen hat. Diese Kurve muß wegen des eindeutigen Entsprechens von demselben Geschlecht p wie ein beliebiger ebener Schnitt der abwickelbaren Fläche sein, und p wird [85] durch

$$p = \tfrac{1}{2}(n' - 1)(n' - 2) - x - n - e'$$

bestimmt. Unsere Kurve von der Ordnung $n' - 2$ hat, durch das Ausscheiden der doppelt zu zählenden Geraden a, von den x Doppelpunkten $2(n' - 6)$, die in die vorhin genannten $n' - 6$ außerhalb A liegenden Schnittpunkte mit der doppelt zu zählenden Geraden a fallen, und außerdem die nach A fallenden Schnittpunkte der Ebene mit der Doppelkurve verloren. Nennen wir die gesuchte Anzahl dieser Punkte y, so hat sie also noch $x - 2(n' - 6) - y$ Doppelpunkte. Von Spitzen hat sie die nach A fallenden drei Schnittpunkte mit der Rückkehrkurve und den Schnittpunkt mit der Wendetangente a verloren. Sie hat also $n - 3 + e' - 1$ Spitzen. Somit ist

$$p = \tfrac{1}{2}(n' - 3)(n' - 4) - x + 2(n' - 6) + y - n - e' + 4.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von p einander gleich, so findet man $y = 3$.

Durch ähnliche Betrachtungen findet man, daß die Doppelkurve in den e'' Berührungspunkten der stationären Schmiegungsebenen die Tangente nur schneidet, und in in den e Spitzen die Tangente einfach berührt; man kann daher in allen drei Fällen die Schnittpunkte mit der Schmiegungsebene abzählen.

So findet man, daß man von (punktgeometrisch) außerordentlichen Singularitäten der Doppelkurve v Spitzen, e' Wendetangenten und die obengenannten dreifachen Punkte beilegen muß. Nun kann man mittels der Formeln in [84] nicht nur ihren Rang und die Klasse der zu ihr gehörigen abwickelbaren Fläche, sondern auch z. B. die Anzahl ihrer stationären Schmiegungsebenen bestimmen. Diese Anzahl enthält die v'' Schmiegungsebenen der gegebenen Kurve in Punkten, deren Tangenten auch noch in anderen Schmiegungsebenen liegen.

Dieselben Betrachtungen lassen sich zwar auch bei der Untersuchung des Einflusses eines Elementes der gegebenen Kurve mit den Multiplizitäten ν, ν', ν'' auf die Doppelkurve ihrer Tangentenfläche anwenden; sie reichen aber nicht allein aus, um diese allgemeine Untersuchung durchzuführen. Denn einerseits werden nicht immer alle die $\nu + 2\nu' + \nu'' - 4$ Punkte P_2, die zusammenfallen, wenn P_1 im Mittelpunkte eines solchen Elementes liegt, demselben Elemente der Doppel-



kurve angehören, andererseits genügen höhere Werte der Zahlen ν, ν', ν'', ebensowenig wie ν und ν' für ebene Kurven ([71] und [74]), um das Element in jeder Beziehung zu charakterisieren.[1])

[87] Windschiefe Regelflächen. Wir haben früher [8] bemerkt, daß die Ordnung m und die Klasse m'' einer windschiefen Regelfläche einander gleich sind; beide sind nämlich gleich der Anzahl der Erzeugenden, die eine willkürliche Gerade schneiden. Weiter sind, wie für alle Flächen, die Klasse eines ebenen Schnittes und die Ordnung eines umbeschriebenen Kegels beide gleich dem Rang m' der Fläche. Endlich werden die Punkte des ebenen Schnittes den Erzeugenden und diese den Tangentialebenen eines umbeschriebenen Kegels gegenseitig eindeutig entsprechen. Ein willkürlicher ebener Schnitt und ein willkürlicher umbeschriebener Kegel sind also von demselben Geschlecht p, das man das Geschlecht der Regelfläche nennen kann.

Da die *Plücker*schen Zahlen einer ebenen Kurve durch die Ordnung, die Klasse und das Geschlecht vollkommen bestimmt sind, wird ein ebener Schnitt und ein umbeschriebener Kegel dieselben *Plücker*schen Zahlen haben, wobei die Punkte und Tangenten des Schnittes beziehungsweise den Tangentialebenen und Erzeugenden des Kegels entsprechen.

Wir schließen hier solche Fälle aus, in welchen die Fläche mehrfach zählende Erzeugende hat. Daß ein solcher Fall wirklich ein Spezialfall ist, den man ausschließen kann, ersieht man z. B. daraus, daß man, wenn man eine Regelfläche durch Gerade erzeugt, welche entsprechende Punkte gegenseitig eindeutig aufeinander bezogener Kurven miteinander verbinden, es vermeiden kann, daß die gemeinsamen Bisekanten der Kurven entsprechende Punkte verbinden. Die gemachte Voraussetzung bringt es mit sich, daß alle Doppelpunkte eines ebenen Schnittes, dessen Ebene die Fläche nicht berührt, Schnittpunkte mit einer Doppelkurve sein werden, in deren Punkten zwei Erzeugende sich schneiden, und daß alle Doppeltangentialebenen eines umbeschriebenen Kegels, dessen Scheitel nicht auf der Fläche liegt, je zwei Erzeugende der gegebenen Fläche enthalten. Weiter wird ein ebener Schnitt im allgemeinen keine Spitze haben, ein umbeschriebener Kegel keine stationäre Tangentialebene.

Durch die Ordnung (Klasse) m, und das Geschlecht p der Regelfläche bestimmt man nun [70] folgendermaßen den Rang m' und die Ordnung der Doppelkurve (Klasse der Umhüllungsfläche der Doppeltangentialebenen) b:

$$m' = 2(p-1) + 2m, \tag{1}$$

$$b = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - p. \tag{2}$$

1) Die in [14] genannten Modelle von Fräulein *Lund* veranschaulichen in den Fällen, wo keine der Zahlen ν, ν', ν'' den Wert zwei übersteigt, den Verlauf der Doppelkurve.



Die Doppelkurve und die genannte Umhüllungsfläche (oder ihre Rückkehrkurve) sind außerdem von demselben Geschlecht π; denn zwei sich schneidende Erzeugende der Regelfläche bestimmen gleichzeitig einen Punkt der Doppelkurve und eine Tangentialebene der Umhüllungsfläche. Daraus können wir nach [84] für diese zwei Gebilde auf dasselbe dualistische Entsprechen der übrigen abzählenden Bestimmungen schließen, das wir schon für die Regelfläche selbst gefunden haben. Die Anzahlen der durch einen Punkt B gehenden Bisekanten der Doppelkurve, sowie der in einer Ebene β liegenden Schnittlinien zweier Doppeltangentialebenen werden z. B. beide gleich $\frac{1}{2}(b-1)(b-2)-\pi$ sein. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß diese Zahl auf der einen Seite außer den durch B gehenden und in verschiedenen Punkten schneidenden Bisekanten dreimal die durch die dreifachen Punkte der Fläche gehenden Geraden, und auf der anderen Seite außer den in β liegenden Schnittlinien von Doppeltangentialebenen dreimal die Spuren der dreifachen Tangentialebenen in der Ebene β enthält. Die Anzahlen dieser dreifachen Punkte und dreifachen Tangentialebenen werden wir erst später bestimmen [110]; wir werden dann finden, daß auch sie einander gleich sind.

Sowohl die Wendetangenten eines ebenen Schnittes, als auch die Rückkehrkanten eines umbeschriebenen Kegels (die die Spitzen der ebenen Schnitte des Kegels enthalten) sind Haupttangenten der Fläche, die sie in drei konsekutiven Punkten treffen. Letzteres ergibt sich aus *Halphens* Satz [13] durch Betrachtung der Kurven, die man erhält, wenn man die Fläche durch Ebenen, die die Rückkehrkante enthalten, schneidet. Dadurch findet man, daß die Klasse und die Ordnung der durch die Haupttangenten der Regelfläche gebildeten Kongruenz [8] je denselben Wert $\varkappa = 3(m'-m) = 3(2p-2+m)$ haben.

Ebenso findet man, daß die Klasse und die Ordnung der durch die Doppeltangenten gebildeten Kongruenz je denselben Wert

$$\delta = \tfrac{1}{2}(m'-1)(m'-2) - p - \varkappa$$

haben.

Der allgemeine Geschlechtsatz kann angewandt werden, um die Anzahl der Erzeugenden zu finden, die eine auf der Fläche liegende, einfache Kurve c berühren. Von dieser Kurve muß man das Geschlecht p_1 und die Anzahl l ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Erzeugenden kennen. Für die Korrespondenz des Schnittpunktes P einer Erzeugenden mit einem ebenen Schnitt und der Schnittpunkte P_1 mit der genannten Kurve hat man [65] die Zahlen

$$p_1 = p_1, \quad p_2 = p, \quad \alpha_1 = l, \quad \alpha_2 = 1, \quad \eta_2 = 0;$$

für die gesuchte Anzahl ergibt sich also

$$(1) \qquad \eta_1 = 2(p_1 - 1) - 2l(p-1).$$

Diese Bestimmung genügt jedoch nicht, wenn die Kurve die Doppelkurve der Fläche ist, weil dann jedem Punkt P_1 der Kurve zwei Punkte P eines ebenen Schnittes entsprechen. Die Doppelkurve schneidet jede Erzeugende g in $m-2$ Punkten P; denn eine Ebene durch g schneidet die Fläche in der Geraden g und in einer Kurve von der Ordnung $m-1$, die g im Berührungspunkt der Fläche und in $m-2$ anderen Punkten schneidet. In diesem Fall haben wir also, da wir das Geschlecht der Doppelkurve π genannt haben,

$$p_1 = \pi, \quad p_2 = p, \quad \alpha_1 = m-2, \quad \alpha_2 = 2,$$

also

(2) $$\eta_1 - \eta_2 = 4(\pi - 1) - 2(m-2)(p-1).$$

η_1 ist die Anzahl der Erzeugenden, die die Doppelkurve, also einen anderen Mantel der Fläche berühren. η_2 ist die Anzahl der „Pinchpunkte" der Doppelkurve, in welchen sich die zwei Mäntel, die sie bilden, so vereinigen, daß auch jeder umbeschriebene Kegel durch einen solchen Punkt geht [72]. Da ein solcher Punkt Schnittpunkt zweier konsekutiver Erzeugender ist, bilden diese Erzeugenden ein abwickelbares Element der Fläche, längs dessen sie von einer Ebene berührt wird. Wir werden später [125] η_2 bestimmen. Gleichung (2) kann sodann zur Bestimmung von η_1 benutzt werden.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Fläche nur eine einzige Doppelkurve besitzt, d. h. eine Kurve, von deren Punkten je zwei Erzeugende ausgehen. Die Doppelkurve kann aber auch aus mehreren mehrfachen Kurven bestehen; dies wird z. B. der Fall sein, wenn die Fläche durch Gerade gebildet wird, die gegebene Kurven schneiden sollen. Man kann aber in diesem Fall dieselbe Methode anwenden, wenn man auf jede dieser Teilkurven für sich Bezug nimmt. Wenn die Fläche eine k-fache Kurve vom Geschlecht π enthält, die von jeder Erzeugende l-mal geschnitten wird, so wird man statt (2) die Gleichung

(2') $$\eta_1' - \eta_2' = 2k(\pi - 1) - 2l(p-1)$$

erhalten, wo jetzt η_1' die Anzahl der Erzeugenden bezeichnet, die die k-fache Kurve berühren, η_2' die Anzahl der auf dieser befindlichen Pinchpunkte. Ist $k = 1$, woraus $\eta_2' = 0$ folgt, so bekommt man die Formel (1); für $k = 2$, $l = m-2$, die Formel (2).

[88] Anwendung der *Plücker*schen Formeln auf Flächen m^{ter} Ordnung. Die Anwendung der *Plücker*schen Formeln auf ebene Schnitte einer Fläche ergibt sich von selbst. Die Formeln lassen sich aber auch auf umbeschriebene Kegel anwenden. Die Ordnung eines solchen ist der Rang der Fläche, seine Klasse ist die Klasse der Fläche [6]. Eine doppelte Tangentialebene des Kegels wird auch die Fläche zweimal berühren; ihr Schnitt hat also, außer den Schnittpunkten mit einer etwaigen Doppelkurve der Fläche, zwei neue Doppelpunkte bekommen. Die Anzahl

der doppelten Tangentialebenen eines willkürlichen, umbeschriebenen Kegels wird die Klasse der Umhüllungsfläche der doppelten Tangentialebenen der Fläche sein. Eine stationäre Tangentialebene des Kegels enthält drei zusammenfallende, durch den Scheitel gehende Tangenten an die Fläche. Für einen beliebigen, in der Ebene liegenden Scheitel wird dies nur dann eintreffen, wenn der Schnitt mit der Ebene eine Spitze hat. Die Ebene wird dann eine stationäre Tangentialebene der Fläche genannt, und die Anzahl der stationären Tangentialebenen eines umbeschriebenen Kegels wird die Klasse der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen der Fläche sein. Daß die Doppelkanten und Rückkehrkanten des Kegels die durch seinen Scheitel gehenden Doppeltangenten und Haupttangenten der Fläche sind, haben wir schon bei den Regelflächen bemerkt [87].

Da die entsprechenden Zahlen die *Plückers*chen Formeln befriedigen müssen, so braucht man nur drei von ihnen direkt zu bestimmen. Wir werden uns in dieser Beziehung auf den Fall einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung beschränken. Wir haben früher mehrere der genannten Zahlen bei unseren Beispielen durch Anwendung verschiedener Methoden gefunden [27]. Außer dem Rang $m(m-1)$, der auch gleich der Klasse eines ebenen Schnittes ist, findet man am leichtesten die Anzahl $m(m-1)(m-2)$ der durch einen Punkt P gehenden Haupttangenten durch die Bemerkung, daß die Berührungspunkte dieser Tangenten die Schnittpunkte der Fläche mit den zwei ersten Polaren des Punkts P in Beziehung auf die Fläche sein müssen [19].

Weiter läßt sich die Klasse $m'' = m(m-1)^2$ oder die Anzahl der durch eine Gerade g gehenden Tangentialebenen bestimmen, da die Berührungspunkte die Schnittpunkte der Fläche mit den ersten Polaren zweier Punkte der Geraden g sein müssen.

Nun findet man mittels der *Plückers*chen Formeln die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Doppeltangenten:

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3);$$

weiter die Klasse der Einhüllenden der stationären Tangentialebenen:

$$4m(m-1)(m-2),$$

und die Klasse der Einhüllenden der Doppeltangentialebenen:

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12).$$

Wenn der Scheitel ein Punkt A der Fläche ist, so wird der umbeschriebene Kegel aus der zweimal zu zählenden Tangentialebene und einem Restkegel bestehen, dessen Ordnung um zwei erniedrigt ist, während die Klasse unverändert bleibt. Durch Anwendung des *Halphens*chen Satzes [13] zur Abzählung der Tangenten, die in verschiedenen ebenen Schnitten von A ausgehen, findet man, daß die Tangentialebene den Restkegel längs der beiden, durch A gehenden Haupttangenten berührt,

also doppelte Tangentialebene dieses Kegels ist. Dieser Grenzfall entspricht übrigens dualistisch jenem, der für einen ebenen Schnitt einer Fläche eintritt, wenn die Ebene die Fläche berührt (vgl. [72] 1).

Die für eine allgemeine Fläche m^{ter} Ordnung gefundenen Ergebnisse umfassen auch jene, die sich auf eine Fläche mit punktgeometrisch bestimmten Singularitäten beziehen. Hat z. B. eine Fläche m^{ter} Ordnung einen konischen Doppelpunkt A, so wird dadurch der umbeschriebene Kegel eine Doppelkante bekommen. Zwei der durch eine beliebige Gerade gehenden Tangentialebenen fallen mit der durch A gehenden Ebene zusammen, und jede Ebene, die den Tangentenkegel in A berührt, wird dreimal unter die durch einen beliebigen Punkt dieser Ebene gehenden stationären Tangentialebenen zu zählen sein [72] (1). Sieht man von den auf diese Weise entstehenden, eigentlichen Tangentialebenen ab, so wird durch den konischen Doppelpunkt die Klasse der Fläche um zwei, die Klasse der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen um sechs vermindert.

Betrachtet man eine Fläche m^{ter} Ordnung mit einer Doppelkurve von der Ordnung b und einer Rückkehrkurve von der Ordnung c als Grenzfall einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung, so muß man die Kegel, die diese Kurven von einem gegebenem Scheitel B aus projizieren, beziehungsweise als doppelten oder dreifachen Teil des umbeschriebenen Kegels mit demselben Scheitel betrachten; sieht man von diesen Teilen ab, so wird der Rang der Fläche $m(m-1)$ um $2b+3c$ vermindert. Bei der Bestimmung der Klasse und der Anzahl der durch B gehenden singulären Tangenten und Tangentialebenen muß man im letzteren Fall auch den Einfluß der zu jeder der genannten Kurven gehörigen Singularitäten, ihrer wirklichen und scheinbaren gegenseitigen Schnittpunkte und ihrer Schnittpunkte mit dem umbeschriebenen Kegel beachten. Die dazu erforderliche Abzählung der zusammenfallenden Singularitäten der umbeschriebenen Kegel (oder ihrer ebenen Schnitte) geschieht mittels der in [72]—[75] angegebenen Methoden. Ein darauf gegründetes System von allgemeinen Formeln wäre jedoch zu weitläufig, als daß wir hier weiter darauf eingehen könnten.[1])

Die genannten Methoden sind übrigens auch anwendbar auf die nähere Untersuchung der Singularitäten, die schon eine allgemeine Fläche darbietet: man betrachtet die Entartungen, die mit dem umbeschriebenen Kegel eintreten, wenn der Scheitel spezielle Lagen einnimmt. Wir werden hier einige ganz einfache Beispiele angeben, deren Ergebnisse uns später nützlich sein werden.

---

1) Eine solche allgemeine Theorie habe ich in einer Abhandlung: Révision et extension des formules numériques de la Théorie des surfaces réciproques (Mathematische Annalen X, 1876) gegeben, wobei mir jedoch damals die hier in [74]—[75] aufgestellten Formeln noch nicht zu Gebote standen.

1. Wir haben gesehen, daß eine Ebene α, deren Schnitt in einem einfachen Punkt A der gegebenen Fläche φ eine Spitze hat, eine stationäre Tangentialebene ist. Wir fragen nun, wievielmal diese unter die stationären Tangentialebenen, die durch einen Punkt B der Tangente a in der Spitze gehen, mitzuzählen ist. Legen wir von B aus Tangenten an die Schnitte der verschiedenen, durch a gehenden Ebenen, so fallen im allgemeinen zwei mit a zusammen, vier aber, wenn die Ebene die Tangentialebene α ist. Mit den in [75] benutzten Bezeichnungen hat also der umbeschriebene Kegel mit dem Scheitel B oder seine Spur in einer Ebene (die Kontur der Fläche) eine Singularität mit den Multiplizitäten $\mu = \mu' = 2$. N und N' sind offenbar null. Also wird [75] (4) $E' = E$. E' ist die gesuchte Anzahl der zusammenfallenden stationären Ebenen. E ist die Anzahl der durch B gehenden Haupttangenten, die mit a zusammenfallen.

Um E' zu finden, genügt es zu bemerken, daß α überhaupt nur dann für mehr als eine durch B gehende stationäre Tangentialebene zu zählen ist, wenn B auf a liegt. a ist also Erzeugende der Einhüllenden der genannten Ebenen, und wenn B nicht auf der Rückkehrkurve dieser Erzeugenden liegt, wird im allgemeinen $E' = 2$, also auch $E = 2$ sein. Da weder a Doppeltangente noch α doppelte Tangentialebene ist, wird $D = D' = 0$ sein. Wie in [72] (4) hat ein Schnitt des Kegels zwei Kurvenzüge, die miteinander Berührung zweiter Ordnung haben.

Wir wollen E aber auch direkt im Anschluß an die punktgeometrische Darstellung der Fläche bestimmen, um damit den Weg anzugeben, den man bei schwierigeren Untersuchungen ähnlicher Art, so auch in dem folgenden Beispiel, einschlagen muß, um E und D und erst dadurch E' und D' zu finden. Dabei benutzen wir den Umstand, daß die gesuchten Haupttangenten den Punkt B mit den Schnittpunkten der Fläche φ und der ersten und zweiten Polare des Punktes B in Beziehung auf φ verbinden.

Wenn A Ursprung eines Koordinatensystems ($x = y = z = 0$), a die x-Achse ($y = 0$, $z = 0$) und α die xy-Ebene ($z = 0$) ist, so kann man in der nächsten Umgebung von A die Fläche φ durch die folgende Gleichung darstellen:

$$z = y^2 + kx^3 + lx^2y + mxy^2 + ny^3 + \cdots;$$

die weiteren Glieder sind von höherem Grad in x und y. Der Punkt B kann durch $x = \infty$, $y = 0$, $z = 0$ bestimmt werden (was man durch Verwendung von projektiven Koordinaten erreichen kann, ohne den Punkt B ins Unendliche zu verlegen). Die Polaren werden dann durch Differentiation in Beziehung auf x bestimmt. Sie sind:

$$0 = 3kx^2 + 2lxy + my^2 + \cdots$$
$$0 = 6kx + 2ly + \cdots$$



Zwei Schnittpunkte dieser drei Flächen fallen in A zusammen. Daher ist $E = 2$, also auch $E' = 2$. Dies zeigt, daß in diesem Fall a Erzeugende der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen sein wird. Natürlich wird $E = 3$ und damit $E' = 3$, wenn $6kx + 2ly$ Faktor von $3kx^2 + 2lxy + my^2$ ist. Dann wird B auf der Rückkehrkurve der genannten Umhüllungsfläche liegen.

2. Betrachten wir weiter den Fall, in dem eine Ebene α die Fläche φ in einer Kurve schneidet, die in einem einfachen Punkt A der Fläche einen Selbstberührungspunkt hat. Liegt dann der Scheitel B eines umbeschriebenen Kegels in einem beliebigen Punkt von α, so werden vier Erzeugende, die einem einfachen Mantel dieses Kegels angehören, mit BA zusammenfallen; also fallen zwei der von B ausgehenden stationären Tangentialebenen zusammen, d. h. α ist eine stationäre Tangentialebene der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen der Fläche φ.

Liegt B auf der Tangente a im Selbstberührungspunkt A, so wird eine beliebige Ebene durch a den umbeschriebenen Kegel in drei, die Ebene α in sechs mit a zusammenfallenden Erzeugenden schneiden. Mit den Bezeichnungen in [75] hat der Kegel also eine Singularität mit den Multiplizitäten $\mu = \mu' = 3$. Außerdem ist $N = N' = 0$, daher nach den Gleichungen [75] (4) und (6), $E' = E$, $D' = D$. Die Bestimmung von E geschieht wie im vorhergehenden Fall. Durch dieselbe Wahl des Koordinatensystems bekommt man für die Fläche und die zwei ersten Polaren des Punktes B die Gleichungen:

$$z = iy^2 + jx^2y + kxy^2 + ly^3 + mx^4 + nx^3y + ox^2y^2 + pxy^3 + qy^4 + \cdots$$
$$0 = 2jxy + ky^2 + 4mx^3 + 3nx^2y + 2oxy^2 + py^3 + \cdots$$
$$0 = 2jy + 12mx^2 + 6nxy + 2oy^2 + \cdots$$

Die drei Flächen haben also im allgemeinen drei mit A zusammenfallende Schnittpunkte gemein. Also wird E und damit auch $E' = 3$. Die Gerade a ist also auch jetzt Erzeugende der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen der Fläche φ; sie gehört aber hier der stationären Tangentialebene α dieser Umhüllungsfläche an.

Die Berührungskurve des umbeschriebenen Kegels ist die Schnittkurve der Fläche und der ersten Polare. Sie wird zwei durch A gehende Elemente haben, die sich durch die Reihen

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{k}{2j}y + \cdots \\ z &= iy^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{-j}{2m}}\,y^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k}{4j} - \frac{3n}{8m}\right)y + \cdots \\ z &= \left(i - \frac{j^2}{4m}\right)y^2 \pm \sqrt{\frac{-j}{2m}}\left(k - \frac{nj}{2m}\right)y^{\frac{5}{2}} + \cdots \end{aligned}\right.$$

darstellen lassen, welche nur Potenzen mit ganzen Exponenten beziehungsweise von y und $y^{\frac{1}{2}}$ enthalten. Die Reihen für z werden eben die ge-

suchte Kontur (Spur des umbeschriebenen Kegels auf der Ebene $x=0$) darstellen. Durch A gehen also zwei Elemente dieser Kontur; das eine ist einfach, das andere bildet eine Knotenspitze; sie haben je einfache Berührung unter sich und mit der Ebene α. Zusammen bilden sie eine Spitze und fünf Doppelpunkte. Daraus schließt man, daß $2D+3E=2\cdot5+3\cdot1=13$, ist, und da $E=3$ ist, wie wir schon gefunden haben, wird D und damit auch $D'=2$, — ganz wie wenn die Ebene α die Fläche in zwei verschiedenen Punkten berührte und B auf der Verbindungslinie a der Berührungspunkte läge. Den vorliegenden Fall hätte man auch, durch Änderung der Fläche φ, als Grenzfall dieses letztgenannten Falles betrachten können. Bei diesem Grenzübergang wird nämlich keine neue, durch B gehende Doppeltangente mit a, und keine neue durch B gehende doppelte Tangentialebene mit α zusammenfallen.

Mit den Bezeichnungen von [75] ist im hier betrachteten Fall weiter $\sigma=2$, also $P=1$ [75] (3).

[89] Flächen dritter Ordnung. Aus einem in [88] gefundenen Resultat folgt, daß ein einer Fläche dritter Ordnung φ_3 umbeschriebener Kegel, dessen Scheitel in einem Punkt A der Fläche liegt, abgesehen von der zweimal zu zählenden Tangentialebene in A, von der vierten Ordnung ist; er kann weder Doppelkanten noch Rückkehrkanten haben, weil eine solche die Fläche, außer in A, noch in vier oder drei Punkten schneiden würde. Er ist von der Klasse 12; man kann daher auf ihn — oder auf einen ebenen Schnitt von ihm — die in [83] gefundenen Eigenschaften einer Kurve vierter Ordnung c_4 anwenden.

Die durch A gehende Tangentialebene von φ_3 wird eine der 28 Doppeltangentialebenen des Kegels sein. Jede der 27 anderen wird eine Doppeltangentialebene der Fläche φ_3 sein und sie also in einer Kurve dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten schneiden, d. h. in einer aus einer Geraden g und einem Kegelschnitt zusammengesetzten Kurve. Auf diese Weise findet man 27 auf der Fläche φ_3 liegende Gerade $g_1, g_2 \cdots g_{27}$.

Die durch eine dieser Geraden g gelegten Ebenen werden φ_3 noch in Kegelschnitten schneiden. Projiziert man diese vom obengenannten Punkte A der Fläche φ_3 aus auf eine Ebene ε, so erhält man ein System von Kegelschnitten, dessen Charakteristik $\mu=2$ sein muß, weil jeder Punkt der Ebene ε die Projektion zweier Punkte der Fläche ist. Diese Kegelschnitte berühren alle die Spur c_4 des umbeschriebenen Kegels vierter Ordnung in vier Punkten. Von den in einem solchen System enthaltenen sechs Kegelschnitten mit Doppelpunkten [83] ist der eine aus der Projektion der Geraden g und der Spur der durch A gehenden Tangentialebene von φ_3 zusammengesetzt; der so zusammengesetzte Kegelschnitt wird sich nämlich als Projektion des Schnitts der Ebene (g, A) ergeben. Die fünf anderen bestehen aus den Projektionen von fünf auf der Fläche liegenden Geradenpaaren, in denen weitere fünf durch g_1 gehende Ebenen die Fläche schneiden. Diese Ebenen werden drei-

fache Tangentialebenen der Fläche sein. Solcher gibt es also im ganzen $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 27 = 45$, da man bei der Verwendung aller 27 Geraden als Achsen von Büscheln jede dreifache Tangentialebene dreimal bekommt.

Außer den hier betrachteten 27 Systemen hat c_4 36 andere Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten [83]. Die in einem solchen enthaltenen sechs Paare von Doppeltangenten werden Projektionen der ein sogenanntes Doppelsechs bildenden Geraden der Fläche sein, die man für die Benennungen der 27 Geraden der Fläche zugrunde gelegt hat. Die hier benutzten Abzählungen geben also einen Ausgangspunkt für die Theorie dieser Geraden und damit für die ganze Theorie der Flächen dritter Ordnung.

[90] Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt. Wenn man einer Fläche vierter Ordnung ψ_4, die zweimal durch einen Kegelschnitt k_2 geht, einen Kegel mit dem Scheitel A auf k_2 umbeschreibt, wird dieser, abgesehen von den beiden Tangentialebenen in A, ebenfalls ein Kegel vierter Ordnung sein, der weder Doppel- noch Rückkehrkanten haben kann, da solche die Fläche in mehr als vier Punkten schneiden würden. Die Spur dieses Kegels auf einer beliebigen Ebene ε ist eine Kurve vierter Ordnung c_4 ohne Doppelpunkte oder Spitzen, sie wird die Spuren t_1 und t_2 der durch A gehenden Tangentialebenen von ψ_4 je zweimal berühren. Diese Kurve hat noch 26 andere Doppeltangenten. Jede von diesen ist die Spur einer von A ausgehenden doppelten Tangentialebene. Eine solche muß die Fläche ψ_4 in einer Kurve vierter Ordnung mit vier Doppelpunkten schneiden, letztere sind nämlich die zwei Berührungspunkte und die Schnittpunkte mit k_2. Der Schnitt muß dann entweder aus einer Geraden und einer Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt bestehen oder aus zwei Kegelschnitten. Schließen wir den Grenzfall aus, in welchem die Fläche eine Regelfläche ist und es also unendlich viele, durch A gehende Schnitte der erstgenannten Art gibt, so können wir annehmen, daß A auf keine der Geraden der Fläche liegt. Der Punkt A muß dann im ersten der genannten Fälle der Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung sein, im letzteren einer der vier Schnittpunkte der Kegelschnitte.

Um nun zu prüfen, wie viele der gefundenen 26 doppelten Tangentialebenen der einen, und wie viele der anderen Art angehören, bemerken wir zunächst, daß es jedenfalls solche gibt, die ψ_4 in zwei Kegelschnitten schneiden. Gäbe es nämlich keine solche Ebene, so würden auf der Fläche 26 Gerade liegen. Wenn zwei davon sich schneiden, so enthält bereits ihre Ebene den von ihnen gebildeten Kegelschnitt, und diese muß also ψ_4 noch in einem weiteren Kegelschnitt schneiden. Wenn nicht, so müßte doch die durch zwei Gerade und durch k_2 gehende Fläche zweiter Ordnung φ_2 die Fläche ψ_4 noch in einer Kurve zweiter Ordnung schneiden, die entweder ein Kegelschnitt ist oder aus zwei Geraden besteht; und wenn in letzterem Falle die vier auf ψ_4 liegenden

Erzeugenden von φ_2 nicht alle derselben Schar angehören, bilden sie auf ψ_4 liegende Kegelschnitte. Wenn sie immer derselben Schar angehören, so würde man durch eine der 26 Geraden der Fläche ψ_4 völlig bestimmte Flächen zweiter Ordnung legen können, auf welche sich die übrigen 25 zu je drei verteilten, was numerisch unmöglich ist.

Legen wir nun durch einen auf der Fläche liegenden Kegelschnitt i_2 und durch k_2 einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, so werden auch diese auf der Fläche ein System von Kegelschnitten ausschneiden, von denen durch jeden Punkt der Fläche je einer geht. Projiziert man sie nun vom Punkte A aus auf die Ebene ε, so bilden die Projektionen ein System mit der Charakteristik $\mu = 2$ und berühren viermal die Kurve c_4. Von den diesem System angehörenden sechs Geradenpaaren bestehen zwei aus der Geraden t_1 oder t_2 und je der Spur einer Ebene, die ψ_4 in einem Kegelschnitt schneidet. Die Kegelschnitte, die aus diesen beiden Paaren von Doppeltangenten von c_4 zusammengesetzt sind, entsprechen nämlich den Flächen des Büschels, die in A einen Mantel der Fläche ψ_4 berühren. Die übrigen vier zusammengesetzten Kegelschnitte werden die Projektionen von vier Paaren einander schneidender, auf ψ_4 liegender Geraden sein. Weil sie auf Flächen des Büschels liegen, müssen sie auch i_2 schneiden, und zwar sind sie die einzigen i_2 schneidenden und auf der Fläche liegenden Geraden; denn durch eine solche geht immer eine Fläche des hier benutzten Büschels. Da die i_2 enthaltende Ebene ψ_4 noch in einem anderen Kegelschnitt j_2 schneidet und dieser 8 andere auf der Fläche liegende Geraden schneidet, sieht man, daß die Fläche im ganzen 16 Gerade enthält. Außer den 16 diese Gerade projizierenden Ebenen gehen durch A noch 10 weitere Doppeltangentialebenen; diese müssen die Fläche je in zwei Kegelschnitten schneiden. Die Umhüllungsfläche solcher Doppeltangentialebenen ist also von der Klasse 10.

Projizieren wir nun die Schnittkurve einer beliebigen der letztgenannten Doppeltangentialebenen von A aus auf ε, so wird die Projektion aus zwei Kegelschnitten bestehen, die c_4 je viermal berühren. Das Zerfallen des Systems solcher Kegelschnitte [83] wird bewirken, daß auch die genannte Umhüllungsfläche 10ter Klasse in mehrere Teile zerfällt. Es seien c_2 und c_2' die Projektionen zweier Kegelschnitte, in denen ein und dieselbe Ebene die Fläche ψ_4 schneidet; sie werden dann je einem durch sie völlig bestimmten System von viermal berührenden Kegelschnitten angehören. Diese Systeme müssen unter sich verschieden sein; denn sonst würden (da jeder Punkt der Ebene ε die Projektion zweier Punkte der Fläche ist, und also nur einer der projizierten Kegelschnitte des Systems durch einen Punkt P der Fläche geht) die Ebenen dieser Kegelschnitte einen Büschel bilden, und dann würden auch die Projektionen durch feste Punkte gehen, welche Doppelpunkte der Kurve c_4 sein müßten. Solche hat sie aber nicht. Sind die Systeme aber ver-

schieden, so werden je zwei solche Kegelschnitte der Fläche, deren Projektion je einem der zwei Systeme angehören, durch P gehen. Die Einhüllende der Ebenen dieser Kegelschnitte ist also von der Klasse zwei. Sie muß daher ein Kegel zweiter Ordnung und Klasse sein. Die gesuchte Einhüllende zehnter Klasse zerfällt somit in fünf Kegel[1]) zweiter Ordnung und Klasse. (Die *Kummer*schen Kegel.)

Übrigens können die verschiedenen Systeme viermal berührender Kegelschnitte benutzt werden, um die gegenseitigen Beziehungen der sechzehn Geraden und der *Kummer*schen Kegel zu untersuchen.

[91] Umhüllungsfläche eines Systems von Flächen zweiter Ordnung mit der Charakteristik $\mu = 2$; *Kummer*sche Fläche. Ich werde hier die früher [31] angekündigte nähere Bestimmung der Brennfläche der Linienkongruenzen zweiter Ordnung und Klasse einschieben. Dabei fange ich damit an, die Umhüllungsfläche eines Systems von ∞^1 Flächen zweiter Ordnung ψ_2 mit der Charakteristik $\mu = 2$ zu betrachten. Diese Fläche φ_4 ist (vgl. [24]) von der Ordnung 4, weil die Flächen des Systems sie längs ihrer Schnittkurven mit konsekutiven Flächen (Charakteristiklinien) berühren und sont nicht schneiden können. Sie hat weiter konische Doppelpunkte in den 8 Schnittpunkten dreier Flächen des Systems, die nicht demselben Büschel angehören. Durch sie gehen nämlich alle Flächen des Systems [39]; eine durch einen solchen Punkt A gehende Ebene wird die Flächen in einem System von Kegelschnitten mit der Charakteristik $\mu = 2$ schneiden; der Punkt A, durch den diese alle gehen, wird Doppelpunkt ihrer Einhüllenden sein [24].

Die geraden Erzeugenden der Flächen ψ_2 werden Doppeltangenten der Umhüllungsfläche φ_4 sein. Diese Doppeltangenten bilden eine Kongruenz, deren Ordnung 4 ist; denn durch einen Punkt des Raumes gehen zwei Flächen ψ_2 und zwei Erzeugende jeder dieser Flächen. Ihre Klasse ist 12, denn das System der Schnittkurven der Flächen ψ_2 mit einer Ebene enthält sechs Geradenpaare [83]. Diese Kongruenz wird aber wesentlich reduziert in dem jetzt zu betrachtenden Fall, wo das System vier Ebenenpaare enthält.

Um ein solches System zu erhalten, haben wir zunächst 8 Punkte im Raume so zu bestimmen, daß durch sie ein Bündel von Flächen zweiter Ordnung geht, das vier Ebenenpaare enthält. Es seien α und α' die Ebenen eines dieser Paare, und B, C, D, E vier Punkte der Ebene α, B', C', D', E' vier Punkte der Ebene α'. Sollen die 8 Punkte noch auf drei anderen Ebenenpaaren liegen, so müssen die Paare von Gegenseiten der aus B, C, D, E und B', C', D', E' gebildeten vollständigen Vierecke sich auf der Schnittlinie der Ebenen α und α' schneiden. Dies könnte erreicht

1) Daß die Einhüllende aus Kegeln besteht, hätte man auch durch die Bemerkung finden können, daß kein Punkt der Fläche ihrer Rückkehrkurve angehören kann: diese Rückkehrkurve ist also von der Ordnung 0 [49].

werden, wenn man die Vierecke in perspektivischer Lage annähme. Dann würden aber die drei Ebenenpaare einem Büschel von Flächen ψ_2 angehören, und könnten also nicht Elemente eines irreduziblen Systems mit der Charakteristik $\mu = 2$ sein. Es gibt aber noch eine andere mögliche Anordnung, nämlich jene, bei der drei Seiten des einen Vierecks, die durch einen Scheitel (E) gehen, die Seiten eines Dreiecks ($B'C'D'$) des anderen Vierecks schneiden (Fig. 7). Eine solche Bestimmung der Punkte B', C', D', E' ist möglich, wenn B, C, D, E gegeben sind; denn wegen der Involution der Schnittpunkte der Geraden $\alpha\alpha'$ mit den Gegenseiten der zwei Vierecke, braucht man nur dafür zu sorgen, daß im ganzen fünf Seiten des Vierecks B', C', D', E' die entsprechenden Seiten des Vierecks B, C, D, E schneiden. Dann wird das durch die 8 Punkte gehende Bündel von Flächen zweiter Ordnung die folgenden vier Ebenenpaare enthalten:

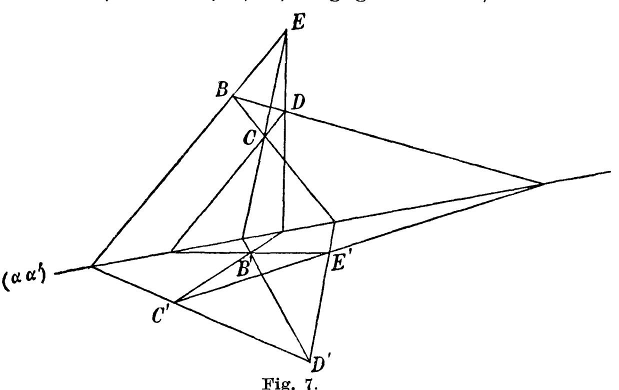


Fig. 7.

$$\alpha \text{ und } \alpha'$$
$$EBC'D' \text{ und } E'B'CD$$
$$ECD'B' \text{ und } E'C'DB$$
$$EDB'C' \text{ und } E'D'BC$$

Den Flächen des Bündels, die eine Ebene in einem linearen Netze von Kegelschnitten schneiden, kann man die Geraden einer Ebene gegenseitg eindeutig entsprechen lassen (vgl. [79]). Dann werden den Flächen eines Systems mit der Charakteristik $\mu = 2$ die Tangenten eines Kegelschnitts entsprechen. Man kann also ein solches System dadurch bestimmen, daß man fünf ihrer Flächen willkürlich im Bündel wählt; darunter kann man die vier genannten Ebenenpaare nehmen. In diesem Falle wird die Umhüllungsfläche φ_4 alle diese 8 Ebenen je längs eines Kegelschnittes berühren, z. B. die Ebenen α und α' in Kegelschnitten, die beziehungsweise durch B, C, D, E und B', C', D', E' gehen. Diese Kegelschnitte müssen die Schnittlinie $\alpha\alpha'$ in denselben zwei Punkten A_1 und A_2 treffen, da diese Linie dort φ_4 berührt; auch diese Punkte müssen wegen der zwei Tangentialebenen Doppelpunkte sein. Ebenso enthalten die Schnittlinien der drei anderen Ebenenpaare je zwei Doppelpunkte, was mit den festen Punkten des Bündels 16 Doppelpunkte ergibt, die im allgemeinen konische Doppelpunkte sein müssen, da schon solche die Klasse

auf 4 reduzieren werden (vgl. [31]), und die Fläche, wie wir jetzt sehen werden, eben diese Klasse hat.

Im betrachteten System von Flächen ψ_2 mit der Charakteristik $\mu = 2$ gibt es nämlich zwei Flächen, die eine willkürliche Ebene berühren, d. h. die Charakteristik μ'' des Systems ist ebenfalls zwei [17]. Die Spuren der Flächen ψ_2 auf einer Ebene bilden nämlich ein System von Kegelschnitten, die die Spur der Fläche φ_4 vierfach berühren, und vier der Paare von Doppeltangenten, die diesem System angehören, sind Spuren der vier Ebenenpaare des Systems. Übrig bleiben also zwei Paare, die von den beiden Erzeugenden zweier berührender Flächen gebildet werden müssen. Das System enthält auch vier Flächen, die, als Einhüllende ihrer Tangentialebenen betrachtet, aus zwei Punkten zusammengesetzt sind, nämlich dieselben, die als Punktörter betrachtet aus zwei Ebenen bestehen (vgl. [27]). Diese zwei Punkte sind für das Ebenenpaar α, α' die zwei auf der Geraden $\alpha\alpha'$ liegenden Doppelpunkte A_1 und A_2 der Fläche. Das System hat also zu sich selbst dualistische Eigenschaften, und seine Flächen werden auch 8 feste Ebenen berühren, die ebenfalls die Fläche φ_4 längs Kegelschnitten berühren. Die Fläche φ_4 hat somit im ganzen 16 Ebenen, die sie längs Kegelschnitten berühren. Sie ist daher vierter Ordnung und vierter Klasse und hat 16 konische Doppelpunkte und 16 Ebenen, die sie längs Kegelschnitten berühren.

Diese Eigenschaften haben wir in [31] der *Kummer*schen Fläche zugeschrieben und wir haben gesehen, daß die Brennfläche einer Kongruenz zweiter Ordnung und Klasse diese Eigenschaften haben muß. Nun wollen wir beweisen, daß eine *Kummer*sche Fläche, deren Existenz jetzt bewiesen ist, umgekehrt Brennfläche solcher Kongruenzen ist, die also ebenfalls existieren. Unmittelbar werden zwar, wenn man die Fläche wie hier herstellt, die Erzeugenden der Flächen ψ_2 des Systems eine Kongruenz von der vierten Ordnung und Klasse bilden. Jede Fläche hat aber zwei Scharen von Erzeugenden und es ist zu erwarten, daß diese getrennt bleiben. Sonst müßte das System nämlich Kegelflächen enthalten, für welche die zwei Scharen von Erzeugenden zusammenfallen, was bei einer Fläche, die aus zwei Ebenen mit zwei Scheiteln auf der Schnittlinie besteht, nicht der Fall ist [27]. Eine Kegelfläche kann das System aber nicht enthalten; denn ihre Tangentialebenen würden Doppeltangentialebenen der Fläche φ_4 sein und solcher kann die Fläche ebensowenig eine kontinuierliche Folge haben, als sie eine Doppelkurve haben kann, da dadurch die Ordnung beziehungsweise die Klasse zu weit herabgedrückt würde. Die Teilung der aus den Erzeugenden der Flächen ψ_2 gebildeten Kongruenz in zwei Kongruenzen von der zweiten Ordnung und zweiten Klasse werden wir denn auch direkt nachweisen durch die folgende Betrachtung der verschiedenen Erzeugungsarten einer vorgelegten *Kummer*schen Fläche.

Soll eine Fläche vierter Ordnung φ_4 eine Ebene α längs eines Kegelschnittes berühren, so wird eine durch diesen gehende Fläche zweiter Ordnung χ_2 die Fläche φ_4 noch in einer Kurve sechster Ordnung schneiden, deren sechs Schnittpunkte A_1, A_2, B, C, D, E mit der Ebene α konische Doppelpunkte der Fläche sein werden. Soll die Fläche noch 15 weitere in Kegelschnitten berührende Ebenen haben, so müssen diese die Ebene α in den 15 Geraden schneiden, die die genannten 6 Doppelpunkte verbinden. Es sei α' die Ebene, die durch $A_1 A_2$ geht, und B', C', D', E' seien die in ihr liegenden Doppelpunkte, die, da sie auch zu je zwei auf den singulären Ebenen der Fläche φ_4 liegen, so geordnet werden können, wie wir bereits vorausgesetzt haben (da eine perspektivische Lage der Vierecke nicht auf eine Fläche mit den gegebenen Eigenschaften führt). Legen wir eine Fläche zweiter Ordnung ω_2 durch die Berührungskegelschnitte der Ebenen α und α', so wird diese, zweimal genommen (ω_2^2), zusammen mit der Fläche φ_4 einen Büschel bestimmen, in welchem die durch einen Punkt der Ebene α gehende Fläche aus α, α' und einer Fläche ψ_2 zusammengesetzt ist, die φ_4 längs einer durch $B, C, D, E, B', C', D', E'$ gehenden Raumkurve vierter Ordnung berührt. Die Flächen ψ_2, die den verschiedenen Flächen ω_2 entsprechen, bilden ein System mit der Charakteristik $\mu = 2$, da durch jeden Punkt von φ_4 zwei zusammenfallende Flächen gehen, und diesem System gehören auch 4 durch die 8 Punkte gehende Ebenenpaare an. φ_4 wird also eben auf die vorausgesetzte Weise erzeugt, und da die Ebenen α und α' zwei willkürliche der 16 singulären Ebenen waren und jedes System 4 solche Paare enthält, so läßt sich eine gegebene *Kummer*sche Fläche auf $\frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 4} = 30$ solche Arten erzeugen.

Betrachten wir nun einen ebenen Schnitt der *Kummer*schen Fläche, so gibt es unter den 63 Systemen seiner vierfach berührenden Kegelschnitte 30, in welchen vier der Paare von Doppeltangenten Spuren singulärer Tangentialebenen der Fläche φ_4 sind, während die zwei übrigen je von den Erzeugenden zweier demselben System angehörigen Flächen ψ_2 gebildet werden. Es seien z. B. die Geraden a und b, c und d in einem solchen System gepaart. Da jedes der 30 Systeme 4 solche Gerade enthält, so muß jede der 12 nicht zu den Spuren der singulären Ebenen gehörigen Doppeltangenten des Schnittes in $\frac{4 \cdot 30}{12} = 10$ solchen Systemen vorkommen, also verbunden mit 10 der 11 übrigen je in einem Systeme auftreten. Es gibt somit außer dem System mit den Paaren ab und cd, ein anderes unter den 30, wo a entweder mit c oder mit d gepaart ist, sagen wir mit d. Dieses System enthält also die Paare ad und bc und die Spuren der 8 singulären Ebenen, die nicht dem ersten System angehören [83]. Dagegen wird das durch die Paare ac und bd von Doppeltangenten bestimmte System von vierfach be-

rührenden Kegelschnitten Paare enthalten, die von den übrigen Doppeltangenten, die nicht Spuren der singulären Ebenen sind, gebildet werden. Es sei ef eines dieser Paare. Dann werden ae und cf Paare von Erzeugenden eines neuen Systems von Flächen χ_2 sein, die φ_4 längs Kurven vierter Ordnung berühren. Als Erzeugende dieser Flächen trennen sich a und c von b und d, da nicht mehr b und d, sondern e und f bei der Erzeugung auftreten, und bilden mit den übrigen gemeinschaftlichen Erzeugenden der Flächensysteme ψ_2 und χ_2 eine Kongruenz, deren Ordnung und Klasse 2 sein muß. Einer anderen solchen Kongruenz gehören die Geraden b und d, einer dritten die Geraden e und f an; die Doppeltangenten der Fläche φ_4 verteilen sich überhaupt auf 6 derartige Kongruenzen, da die 12 Doppeltangenten in einer Ebene je zwei Kongruenzen angehören. Die Strahlen einer Kongruenz werden Erzeugende in 10 der 30 Systeme von Flächen zweiter Ordnung, die φ_4 längs Kurven vierter Ordnung berühren.

Ein weiteres Beispiel dafür, daß gewöhnliche geometrische Eigenschaften bei Abzählungen hervortreten, können wir an die Betrachtung des Bündels knüpfen, das hier den Ausgangspunkt für unsere Untersuchung über *Kummer*sche Flächen bildete. In [35] 6 haben wir gesehen (was wir übrigens auch in [148] anders beweisen werden), daß der Ort der Scheitel der in einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung enthaltenen Kegel von der 6ten Ordnung ist. Das hier vorliegende Bündel enthält aber 4 Ebenenpaare, und alle Punkte der Schnittlinien dieser Paare haben die Eigenschaften, die (punktgeometrisch) die Scheitel der Kegel charakterisieren. Die vier Schnittlinien sind also Teile des eben bestimmten Ortes. Übrig bleibt eine Kurve zweiter Ordnung, die die Scheitel der eigentlichen Kegel des Büschels enthalten muß. Um diese Kurve näher zu untersuchen und zu entscheiden, ob sie etwa ein Kegelschnitt ist oder aus zwei sich nicht schneidenden Geraden besteht, suchen wir ihre Schnittpunkte S und S' mit der Ebene, die wir in Fig. 7 α genannt haben und die die Flächen des Bündels in Kegelschnitten schneidet, die durch die Punkte B, C, D, E gehen, also einen Büschel bilden. Diese Schnittpunkte müssen auf der Schnittlinie von α mit der mit ihr gepaarten Ebene α' liegen. Denn sonst würde der Büschel, außer den Schnittlinien mit den drei anderen Ebenenpaaren, noch zwei Geradenpaare enthalten, nämlich die Schnittlinien mit den Kegeln, die ihre Scheitel in S und S' haben, was unmöglich ist. Dies wird nur dadurch vermieden, daß die zwei Kegel selbst mit dem Ebenenpaar $\alpha\alpha'$ zusammenfallen; dieses muß eine Grenzform sein, der sich die zwei Kegel nähern. Da die dem Ebenenpaar benachbarten Flächen des Bündels α in Kurven des eben genannten Büschels schneiden, so werden die ∞^1 Grenzlagen der Scheitelpaare der benachbarten Flächen Punktepaare der durch den Büschel bestimmten Involution sein, und die Grenzlagen der Scheitel benachbarter Kegel müssen die Doppelpunkte dieser Involution sein. Mit diesen fallen

also S und S' zusammen. Dieselbe Bestimmung läßt sich auf die Schnittpunkte des Ortes mit den Schnittlinien der drei anderen Ebenenpaare anwenden.

Da die vier Schnittlinien nicht in derselben Ebene liegen, kann der gesuchte Ort der Scheitel der im Büschel enthaltenen, eigentlichen Kegel nicht ein Kegelschnitt sein, sondern er muß aus den zwei Geraden bestehen, die diese vier Schnittlinien schneiden.

[92] Übungen und Aufgaben. 1. Eine Fläche von der Ordnung n, mit einer Doppelkurve von der Ordnung d und einer Rückkehrkurve von der Ordnung e sei gegeben: die Schnitte zu untersuchen, deren Ebenen die Fläche in einem Punkt der Doppelkurve oder in einem Punkt der Rückkehrkurve berühren, oder die Doppelkurve in einem Doppelpunkt der Doppelkurve oder in einem Schnittpunkt mit der Rückkehrkurve oder in einem Pinchpunkt berühren, oder die Rückkehrkurve in einem Schnittpunkt mit der Doppelkurve oder in einem Closepunkt berühren, oder die Fläche selbst in einem dieser Punkte berühren. Es wird vorausgesetzt, daß die genannten Punkte von möglichst einfacher Natur, also alle nur Doppelpunkte der Fläche sind. (Siehe [72] und [75]).

2. Allgemeine Untersuchung der Evolute einer Kurve, die in den zwei unendlich fernen Kreispunkten singuläre Elemente mit den Multiplizitäten ν und ν' hat; zu berücksichtigen ist sowohl der Fall, in welchem die unendlich ferne Gerade diese Elemente schneidet, als auch der, in welchem sie dieselben berührt. (Siehe [77]).

3. Die Aufgabe [78] in dem Fall zu behandeln, in welchem der feste Punkt A in einer Knotenspitze der gegebenen Kurve liegt, und diese im übrigen keine mehrfachen Punkte hat.

4. Zu bestimmen, wie viele Kegelschnitte, die durch zwei gegebene Punkte gehen, eine Gerade berühren und Berührung zweiter Ordnung mit einer gegebenen Kurve (vgl. [80]) haben.

5. Das Geschlecht des ebenen Systems von Kegelschnitten, die durch zwei Punkte gehen und zwei Gerade berühren, zu finden und zu erklären.

6. Die Systeme von Kegelschnitten zu untersuchen, die zwei gegebene Kegelschnitte je in zwei Punkten berühren (vgl. [83]).

7. Die Anzahl der zusammenfallenden Punkte zu finden, in denen sich die Schmiegungsebene in einer Spitze oder einem Wendepunkt einer Raumkurve und die Doppelkurve der Tangentenfläche dieser Kurve schneiden. (Siehe [86].)

8.* Die Singularitäten der Doppelkurve einer abwickelbaren Fläche in Beziehung auf ein Element der Rückkehrkurve zu untersuchen, das die Multiplizitäten 1, 2, 2; 2, 1, 2; 2, 2, 1 oder 2, 2, 2 hat. (Vgl. Schlußbemerkungen von [86].)

9. Die Umhüllungsfläche der Normalebenen einer Raumkurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten zu untersuchen; wie

viele Kugelflächen schneiden die Kurve in fünf zusammenfallenden Punkten?

10. Das Zerfallen der Umhüllungsfläche der Ebenen, die eine Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt in zwei Kegelschnitten schneiden [90], durch die Bestimmung ihres Geschlechts zu beweisen.

11. Wie viele Pinchpunkte [72] gibt es auf einer Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt [90]?

b) Geschlechtsätze von Flächen.

[93] Numerische Invarianten der Flächen. Auch für Flächen gibt es Zahlen, die für zwei einander eindeutig entsprechende Flächen denselben Wert haben — ebenso wie das Geschlecht für einander eindeutig entsprechende Kurven. Wir werden hier zeigen, wie sich einige dieser Zahlen durch abzählende Methoden finden lassen. Wir beschränken uns dabei vorläufig auf den Fall, in dem die beiden entsprechenden Flächen nur eine Doppelkurve, aber weder eine Rückkehrkurve noch isolierte singuläre Punkte besitzen.

Wir nennen die Flächen φ_1 und φ_2 und nehmen an, daß ihre Punkte P_1 und P_2 einander gegenseitig eindeutig entsprechen. Wir unterscheiden die diesen und den einzuführenden Hilfsflächen zugehörigen Zahlen m usw. durch die den Flächen entsprechenden Indices und schreiben also m_1, m_2 usw.; die Ordnung nennen wir m, den Rang m', die Klasse m'', die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden stationären Tangentialebenen m'''.

Im allgemeinen wird für einzelne Punkte, Fundamentalpunkte (F) der einen oder anderen Fläche der Fall eintreten, daß der entsprechende Punkt ein unbestimmter Punkt einer ganzen Kurve, Fundamentalkurve, wird. Auch in dieser Beziehung halten wir uns an den allgemeinen Fall, wo die Fundamentalpunkte, deren Anzahlen wir durch f_1 und f_2 bezeichnen werden, einfach sind. Dann entsprechen die verschiedenen Punkte der Fundamentalkurve den Punkten, die auf den Kurven eines durch F gelegten Büschels dem Punkte F unendlich nahe liegen. Dadurch werden die Tangenten in einem Fundamentalpunkt an eine Kurve, deren entsprechende Kurve die entsprechende Fundamentalkurve in gewissen Punkten schneidet, bestimmt. Die einem einfachen Fundamentalpunkt entsprechende Fundamentalkurve muß vom Geschlecht 0 sein, weil ihre Punkte den Strahlen eines Büschels entsprechen.

Einem ebenen Schnitt der Fläche φ_1 wird auf φ_2 eine Kurve entsprechen, deren Ordnung s der Ordnung der Kurve gleich sein wird, die auf φ_1 einem ebenen Schnitt von φ_2 entspricht. Die Schnittpunkte des einen ebenen Schnitts mit der dem anderen Schnitt entsprechenden Kurve entsprechen nämlich den Schnittpunkten des anderen ebenen Schnitts mit der dem erstgenannten Schnitt entsprechenden Kurve. Den

Rang s_2' der auf φ_2 liegenden Kurve, die einem ebenen Schnitt von φ_1 entspricht, findet man durch die Bemerkung, daß diese beiden Kurven von demselben Geschlecht sein müssen. Da im allgemeinen keine der Kurven Spitzen hat, ist also nach [65]

(1) $$s_2' - 2s = m_1' - 2m_1.$$

Hat s_1' die entsprechende Bedeutung, so ist

(1′) $$s_1' - 2s = m_2' - 2m_2.$$

Die Anzahlen s_1'' und s_2'' der durch einen festen Punkt gehenden Schmiegungsebenen derselben Kurve werden dann nach [84] durch die folgenden Formeln bestimmt:

(2) $$s_1'' = 3(s + m_2' - 2m_2)$$

(2′) $$s_2'' = 3(s + m_1' - 2m_1).$$

Bei der weiteren Untersuchung benutzen wir zwei Hilfsflächen φ_3 und φ_4. Wir wählen einen festen Punkt des Raumes A und eine feste Gerade a; man bestimmt dann einen Punkt P_3 der Fläche φ_3 als Schnittpunkt der Geraden AP_1 und der Ebene aP_2. Eine beliebige Gerade durch A enthält m_1 Punkte P_1, also auch, außer A, m_1 Punkte P_3. Ein solcher Punkt fällt mit A zusammen, wenn P_2 auf der Schnittkurve der Ebene Aa mit φ_2 liegt. Die entsprechende Grenzlage der Geraden AP_3 projiziert einen Punkt P_1 der dem Schnitt entsprechenden Kurve von der Ordnung s. A ist also auf φ_3 ein singulärer Punkt, in welchem die Tangenten einen Kegel von der Ordnung s und der Klasse s_1' mit s_1'' stationären Tangentialebenen erzeugen. Durch Abzählung aller Schnittpunkte einer Geraden durch A findet man, daß

$$m_3 = m_1 + s$$

ist. Eine Ebene durch a schneidet φ_3 in einer Kurve von der Ordnung s; übrigens ist a eine m_1-fache Gerade. Die Tangentialebenen in einem ihrer Punkte M sind jene Ebenen, die a mit den Punkten P_2 verbinden, die den Schnittpunkten der Fläche φ_1 mit AM entsprechen.

Vertauscht man bei diesen die Fläche φ_3 betreffenden Bestimmungen die Flächen φ_1 und φ_2, so wird man die die Fläche φ_4 betreffenden erhalten. Eine besondere Beziehung zwischen den Flächen φ_3 und φ_4 wird man aber durch eine geeignete Wahl der bei der Konstruktion benutzten festen Punkte und Geraden erreichen können. Es seien in Fig. 8 A und a jene Elemente, die der Fläche φ_3 entsprechen. Dann benutzen wir zur Konstruktion von φ_4 einen festen Punkt B von a und eine feste Gerade b, die durch A geht und a in einem Punkt C schneidet. Nun folgt aus der Konstruktion, daß die Gerade P_3P_4, die die den Punkten P_1 und P_2 entsprechenden Punkte P_3 und P_4 verbindet, durch C geht. Da weiter, wegen der algebraischen Natur der Korrespondenz, konsekutiven Punkten stets konsekutive Punkte entsprechen (vgl. [65]), wird

derselbe Kegel mit dem Scheitel C den beiden Flächen φ_3 und φ_4 umbeschrieben sein. Dieser Kegel ist jedoch für beide Flächen nur ein Restkegel, den man erhält, wenn man die Teile der vollständigen umbeschriebenen Kegel ausscheidet, deren Berührung nur im vielfachen Punkt C oder in den vielfachen Geraden a oder b stattfindet.

Da C auf einer m_1-fachen Geraden a der Fläche φ_3 liegt, werden von den durch C gehenden Tangenten an einen ebenen, durch C gelegten Schnitt $2m_1$ auf den Tangentialebenen in C liegen. Die Ordnung des den Flächen φ_3 und φ_4 gemeinsamen Restkegels ist also nur $m_3' - 2m_1$. Ebenso findet man, daß sie gleich $m_4' - 2m_2$ ist. Also ist

(3) $$m_3' - 2m_1 = m_4' - 2m_2.$$

Eine beliebige, durch a gehende Ebene ε schneidet, wie wir gesehen haben, φ_3 m_1-mal in a und noch in einer Kurve k_ε von der Ordnung s. Da sich diese Kurve ändert und ihre Schnittpunkte mit a sich bewegen, wenn ε sich um a dreht, berührt diese Ebene φ_3 in diesen s Punkten. Die Ebene ist also s-mal mitzuzählen unter die Tangentialebenen, die durch eine in ihr liegende Gerade gehen. Die Klasse des gemeinsamen Restkegels ist daher $m_3'' - s$. Ebenso findet man, daß sie gleich $m_4'' - s$ ist. Also wird

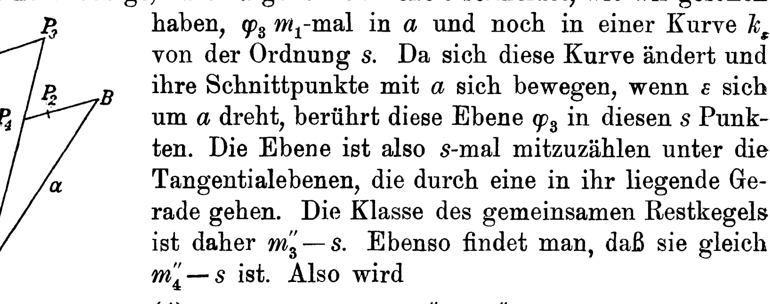


Fig. 8.

(4) $$m_3'' = m_4''.$$

Stationär wird eine solche durch a gehende Tangentialebene ε von φ_3, wenn die Kurve k_ε die Gerade a berührt, und zwar wird sie stationäre Tangentialebene der Umhüllungskurve der stationären Tangentialebenen der Fläche φ_3 sein, weil ihre Schnittkurve einen Selbstberührungspunkt hat; a wird die entsprechende Erzeugende dieser abwickelbaren Fläche sein [88] 2. Daß ε auch in diesem Grenzfalle im allgemeinen nur für drei durch einen Punkt C der Geraden a gehenden stationären Tangentialebenen zu zählen ist, geht jedoch aus der Beweisführung in [88] 2 nicht unmittelbar hervor. Das eine der hier gefundenen Elemente der Kontur der von C aus projizierten Fläche wird sich auf einen Punkt reduzieren, so daß alle durch diesen gehenden Geraden als Tangenten der Kontur zu betrachten sind. Wenn man diese als Enveloppe ihrer Tangenten betrachtet, ist diese Erscheinung aber nur als ein einfacher Spezialfall anzusehen, in dem die Anzahlen, die Tangenten der Kontur oder Tangentialebenen von C aus an die Fläche betreffen, unverändert bleiben. Mit den Bezeichnungen in [88] und [75] ist also auch hier $E' = 3$.

k_ε ist die Kurve, die man erhält, wenn man von A aus auf die Ebene ε jene auf φ_1 liegende Kurve projiziert, die dem Schnitt der Fläche φ_2 mit ε entspricht. Da nun sie, und also auch die Kurve auf φ_1, deren Projektion sie ist, die Ebene Aa und somit auch den Schnitt der Fläche

φ_1 mit Aa berühren, so müssen auch die entsprechenden Kurven auf φ_2 sich berühren; somit berührt die Ebene ε die Kurve auf φ_2, die dem Schnitt der Fläche φ_1 mit der Ebene Aa entspricht. Da letztere Kurve vom Rang s_2' ist, ist s_2' die Anzahl der eben beschriebenen, dreifachen stationären Tangentialebenen, die man von C aus an φ_3 legen kann. Diese gehören nicht dem den Flächen φ_3 und φ_4 gemeinsamen Restkegel an. Die Anzahl der stationären Tangentialebenen des Restkegels wird also nur $m_3''' - 3s_2'$ sein. Ganz ebenso findet man, daß dieselbe Anzahl gleich $m_4''' - 3s_1'$ ist. Also ist

$$m_3''' - 3s_2' = m_1''' - 3s_1'$$

oder wegen der Formeln (1) und (1')

$$m_3''' - 3m_1' + 6m_1 = m_4''' - 3m_2' + 6m_2. \tag{5}$$

Um die Formeln (3), (4) und (5) zu verwerten, muß man die Zahlen m_3', m_3'' und m_3''' und die entsprechenden für φ_4 noch durch eine andere Abzählung bestimmen. Dazu kann man den der Fläche φ_3 umbeschriebenen Kegel mit dem Scheitel A benutzen. Auch aus diesem lassen sich Teile absondern, deren Berührung nur in A oder auf den durch A gehenden und auf der Fläche φ_3 liegenden Geraden stattfinden. Übrig bleibt dann ein Restkegel, der zugleich der φ_1 umbeschriebene Kegel ist, für den die genannten Zahlen also m_1', m_1'', m_1''' sind.

Um auch über die abgesonderten Teile des der Fläche φ_3 umbeschriebenen Kegels Rechenschaft abzulegen, ziehen wir zuerst durch einen unendlich nahe bei A liegenden Punkt O die Tangenten an einen Schnitt der Fläche φ_3, dessen Ebene durch O geht. Von solchen Tangenten finden wir — außer denen, deren Grenzlagen auch φ_1 berühren — erstens $2s$, deren Grenzlagen zu je zwei zusammenfallen mit den Erzeugenden des Tangentenkegels der Fläche φ_3 in A, und zweitens s_1', die den genannten Kegel berühren. Von Tangentialebenen, die durch eine willkürliche, durch O gehende Gerade l gehen, fallen in der Grenzlage $2s_1'$ zu je zwei zusammen mit Tangentialebenen des genannten Kegels. Liegt die Grenzlage der Geraden l in einer der s_1'' stationären Tangentialebenen des Kegels, so fallen zwei der Tangentialebenen des Kegels, also vier konsekutive Tangentialebenen der Fläche φ_3 oder des vollständigen, dieser Fläche umbeschriebenen Kegels zusammen. Überträgt man das, was in [71] über die Abzählung der Wendetangenten einer ebenen Kurve gesagt wurde, auf den Kegel, so findet man, daß eine solche Ebene für drei von A ausgehende stationäre Ebenen zu zählen ist. Die hier genannten, abgesonderten Teile des vollständigen umbeschriebenen Kegels liefern also zu den Zahlen m_3', m_3'' und m_3''' beziehungsweise die Beiträge $2s + s_1'$, $2s_1'$ und $3s_1''$.

Die hier genannten abgesonderten Teile sind jene, deren Ordnung von 0 verschieden ist. Um aber alle Beiträge zu m_3'' und m_3''' zu erhalten, muß man auch die durch A gehenden Geraden der Fläche φ_3 be-

achten. Dies sind jene, die A mit einem den folgenden Gattungen angehörigen Punkt der Fläche φ_1 verbinden:

1. den f_1 Fundamentalpunkten F_1;
2. den m_2 Punkten P_1, die den Schnittpunkten der Fläche φ_2 mit der Geraden a entsprechen;
3. den s Punkten P_1, die zusammen mit ihren entsprechenden Punkten P_2 in der Ebene Aa liegen.

In allen drei Fällen ersieht man mittels einer unendlich kleinen Verschiebung des betreffenden Punkts P_1 auf φ_1 aus der Eindeutigkeit der Konstruktion der entsprechenden Ebene aP_2, daß eine willkürliche, durch eine der genannten Geraden gehende Ebene die Fläche φ_3 nur in einem Punkt berührt. Wegen dieser Eindeutigkeit ist die Berührung niemals stationär. Die genannten $f_1 + m_2 + s$ Geraden liefern also je den Beitrag 1 zu m_3'', aber keinen Beitrag zu m_3'''.

Aus diesen Abzählungen findet man mit Benutzung der Ausdrücke (1′) und (2′) für s_1' und s_1''

$$(6)\quad \begin{cases} m_3' = m_1' + 2s + s_1' = m_1' + 4s + m_2' - 2m_2, \\ m_3'' = m_1'' + 2s_1' + f_1 + m_2 + s = m_1'' + 5s + 2m_2' - 3m_2 + f_1, \\ m_3''' = m_1''' + 3s_1'' = m_1''' + 9s + 9m_2' - 18m_2; \end{cases}$$

für m_4', m_4'', m_4''' wird man die entsprechenden Ausdrücke finden.

Die Einführung der Ausdrücke für m_3' und m_4' in (3) wird nur eine Identität ergeben; bei der Bildung der Ausdrücke haben wir aber bereits die Gleichheit des Geschlechts entsprechender Kurven auf den eindeutig einander entsprechenden Flächen benutzt; diese kann als die erste Bedingung für die Eindeutigkeit des Entsprechens betrachtet werden.

Durch das in (4) geforderte Gleichsetzen der Ausdrücke für m_3'' und m_4'' findet man

$$(7)\qquad m_1'' - 2m_1' + 3m_1 + f_1 = m_2'' - 2m_2' + 3m_2 + f_2,$$

und durch Einführung der Ausdrücke für m_3''' und m_4''' in (5)

$$(8)\qquad m_1''' - 12m_1' + 24m_1 = m_2''' - 12m_2' + 24m_2.$$

Die Gleichungen (7) und (8) sind also notwendige Bedingungen für das gegenseitig eindeutige Entsprechen der Punkte der beiden Flächen.

Man hat die durch den Ausdruck

$$(9)\qquad P = \tfrac{1}{24}(m''' - 12m' + 24m - 24)$$

bestimmte Zahl P das numerische Geschlecht der Fläche genannt. Die Formel (8) drückt aus, daß diese Zahl für zwei sich eindeutig entsprechende Flächen denselben Wert hat, oder daß sie bei jeder birationalen Transformation invariant bleibt.

Die durch den Ausdruck

$$(10)\qquad I = m'' - 2m' + 3m - 4$$



bestimmte Zahl I wird dazu dienen können, die Differenz der Anzahlen der zum eindeutigen Entsprechen zweier Flächen nötigen Fundamentalpunkte zu bestimmen. Die Gleichung (7) gibt nämlich

$$f_1 - f_2 = I_2 - I_1. \tag{11}$$

Man sagt auch, die Zahl $I + f$ bleibe bei einer birationalen Transformation invariant; sie ist aber nur eine relative Invariante, weil sie nicht allein von der Fläche abhängt, sondern auch von der Natur der Transformation.

Beispiel: Für eine Ebene ($m = 1$, $m' = m'' = m''' = 0$) findet man $P = 0$, $I = -1$; für eine allgemeine Fläche dritter Ordnung ($m = 3$, $m' = 6$, $m'' = 12$, $m''' = 24$) findet man $P = 0$, $I = 5$. Da die Bedingung $P_1 = P_2$ nur eine notwendige ist, darf man zwar aus der Gleichheit des Geschlechts nicht sogleich auf eindeutiges Entsprechen schließen. Ein solches läßt sich aber auf verschiedene Weise bewerkstelligen. Die Formel (11) gibt dann an, daß die Differenz $f_1 - f_2$ der Anzahlen der in der Ebene und auf der Fläche dritter Ordnung liegenden Fundamentalpunkte sechs sein muß.

Das eindeutige Entsprechen kann z. B. durch solche Gerade l bewerkstelligt werden, die zwei sich nicht schneidende Gerade der Fläche a und b treffen. P_1 ist dann der Schnittpunkt der Geraden l mit der Ebene, P_2 ihr dritter Schnittpunkt mit der Fläche. Die auf der Ebene liegenden Fundamentalpunkte sind dann 1. die Spuren der Geraden a und b und 2. die Spuren der Geraden auf der Fläche, die sowohl a als auch b treffen. Nennt man die Anzahl der letzteren Geraden x, so wird $f_1 = 2 + x$ sein. Die Fläche enthält einen Fundamentalpunkt, nämlich den dritten Punkt, in welchem die Gerade, die die Spuren der Geraden a und b auf der Ebene verbindet, die Fläche trifft. Also ist $f_2 = 1$, $f_1 - f_2 = 1 + x = 6$, $x = 5$. Diese Anzahl läßt sich übrigens auch im Anschluß an die durch [89] eingeleiteten Untersuchungen finden.

[94] Fortsetzung; Grenzfälle. Wir haben hier den einander entsprechenden Flächen nur Doppelkurven beigelegt. Auf diese, sowie auf etwaige mehrfache Schnittkurven verschiedener Mäntel mußte übrigens bei der vorliegenden Bestimmung gar nicht direkt Bezug genommen werden. Nur solche singuläre Kurven und Punkte, in denen die Fläche jede Schnittlinie in konsekutiven Punkten schneidet, sind besonders zu beachten. Solche Fälle können aber als Grenzfälle aufgefaßt werden (vgl. [88]), so daß man entweder unmittelbar die ihnen entsprechenden Formeln aus den allgemeinen herleiten, oder aber, wenn der Grenzübergang schwierig oder zweifelhaft wird, sie direkt nach der vorhin angewandten Methode behandeln kann, wobei dann auch auf die neuen Singularitäten Bezug genommen werden muß. Durch Betrachtung einiger der einfachsten dieser Grenzfälle werden wir Anweisung dazu geben, wie man auch andere behandeln kann.

Legen wir fürs erste der Fläche φ_1 einen konischen Doppelpunkt K_1 bei, der selbst ein Fundamentalpunkt ist. Den Punkten, die auf den Erzeugenden des Tangentenkegels mit K_1 zusammenfallen, werden dann die Punkte einer Kurve entsprechen. Die Ebenen durch AK_1 werden die Hilfsfläche φ_3 so in zwei auf AK_1 liegenden Punkten schneiden, daß diese sich bewegen, wenn die Ebene sich um AK_1 dreht, und zusammenfallen, wenn die Ebene eine der zwei Tangentialebenen des Tangentenkegels ist. Dieselbe Betrachtung, die wir bei der Herleitung von [93] (4) und (5) benutzt haben, zeigt dann, daß die Ebenen durch AK_1 zweimal unter die Tangentialebenen von φ_3, und die zwei Tangentialebenen des Tangentenkegels je dreimal unter die durch A gehenden stationären Tangentialebenen von φ_3 zu zählen sind. Gibt es also auf φ_1 k_1 und auf φ_2 k_2 solche konische Fundamentalpunkte, so muß man in (11) f_1 und f_2 mit $f_1 + 2k_1$ und $f_2 + 2k_2$, oder aber in (10) m'' mit $m'' + 2k$ vertauschen, ohne diese Fundamentalpunkte unter f_1 und f_2 mitzuzählen. Im Ausdruck (9) für P ist m''' durch $m''' + 6k$ zu ersetzen.

Dasselbe Ergebnis würde man erhalten, wenn man den Fall als Grenzfall betrachtete, in welchem die Fläche φ_1 einen neuen konischen Doppelpunkt bekommen hat. Denn ein solcher ersetzt eben zwei der m_1'' Tangentialebenen, die durch eine beliebige Gerade gehen, und sechs der m_1''' stationären Tangentialebenen, die durch einen beliebigen Punkt gehen; der neue Doppelpunkt, der zwei Punkte der ursprünglichen Fläche vertritt, muß, wenn diese Punkte nicht eben auf einer Fundamentalkurve liegen, zwei Punkten von φ_2 entsprechen, also selbst ein neuer Fundamentalpunkt werden, was wir hier vorausgesetzt haben.

Wir werden weiter den Fall untersuchen, in welchem die Fläche φ_1 eine Rückkehrkurve von der Ordnung n_1 und dem Rang n_1' hat, an die man durch einen Punkt n_1'' Schmiegungsebenen legen kann; wir benennen mit l die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden Geraden, die die Fläche in Punkten der Rückkehrkurve berühren. Außerdem legen wir der Fläche noch q sogenannte Closepunkte [72] bei, von denen wir annehmen, daß sie Fundamentalpunkte seien. Übrigens setzen wir [9] den allgemeinen Fall voraus, in dem der Rückkehrkurve von φ_1 nur eine einfache Kurve der Fläche φ_2 entspricht und die Rückkehrkurve möglichst einfach ist. Sie kann dann aufgefaßt werden, als sei sie durch das Zusammenfallen einer Doppelkurve mit einer gemeinschaftlichen Berührungskurve aller umbeschriebenen Kegel gebildet worden (vgl. [72] (2)). In den Formeln in [93] werden daher m_1' und m_1'' durch $m_1' + n_1$ und $m_1'' + n_1'$ zu ersetzen sein, und unter die von einem Punkt A ausgehenden stationären Tangentialebenen sind sowohl die n_1' Schmiegungsebenen an die Rückkehrkurve als auch die l Ebenen, die die Fläche in Punkten E der Rückkehrkurve berühren, mitzuzählen, und zwar letztere zweimal. In einer solchen Ebene werden nämlich zwei von A ausgehende Gerade zusammenfallen, die φ_1 und also auch φ_3 je

in drei konsekutiven Punkten schneiden, daher zwei Haupttangenten an die Fläche φ_3 sind. Der ebene Schnitt dieser Fläche hat dann eine Spitze, deren Tangente durch A geht; in [88] 1 haben wir gesehen, daß dann die Ebene zweimal unter die von A ausgehenden stationären Tangentialebenen von φ_3 zu zählen ist. m_1''' ist also durch $m_1''' + n_1'' + 2\,l_1$ zu ersetzen.

Was nun einen Closepunkt betrifft, in welchem die Rückkehrkurve die Berührungskurve jedes umbeschriebenen Kegels trifft, so hat er nicht nur das Aussehen eines flachgedrückten konischen Doppelpunkts, sondern wird durch einen solchen ersetzt werden, wenn man die Rückkehrkurve mit einer Doppelkurve und einer Berührungskurve vertauscht. Die den konischen Doppelpunkt betreffenden Zahlen lassen sich dann auf diesen übertragen.

Legt man nun einer Fläche die hier genannten Singularitäten bei, so muß man die Formeln (9) und (10) in [93] durch die folgenden ersetzen, wobei wir jedoch voraussetzen, daß die konischen Doppelpunkte und die Closepunkte solche Fundamentalpunkte sind, deren verschiedenen Tangenten die verschiedenen Punkte einer Kurve entsprechen:[1])

$$(9')\quad P = \tfrac{1}{24}(m''' - 12m' + 24m + n'' - 12n + 2l + 6q + 6k - 24),$$

$$(10')\quad I = m'' - 2m' + 3m + n' - 2n + 2q + 2k - 4.$$

Die Einführung der Rückkehrkurve, die der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen entspricht, wird es erlauben, die Formeln auf das dualistische Entsprechen zweier Flächen, das ja eben eindeutig ist, anzuwenden, und dadurch Formeln, die die dualistisch entsprechenden Singularitäten derselben Fläche betreffen, herzuleiten. Dabei ist jedoch noch zu beachten, daß die (bei der Bestimmung der Flächen als Örter) auf Doppelkurven und Rückkehrkurven allgemein vorkommenden Pinchpunkte und Closepunkte dualitisch entsprechender Flächen als Fundamentalpunkte auftreten werden, und zwar als solche, die wir bisher nicht beachtet haben. In diesen wird nämlich jedem Punkt M_2 der entsprechenden Fundamentallinie eine ganz bestimmte Tangente im Pinchpunkt oder Closepunkt entsprechen, und den durch M_2 gehenden Kurven auf φ_2 entsprechen auf φ_1 Kurven, die im Pinch- oder Closepunkt diese Tangente berühren. Der Einfluß solcher Fundamentalpunkte läßt sich aber ebenfalls durch die hier angewandte Methode finden. Hier würde jedoch dieses nähere Eingehen auf die Theorie der Flächen zu weitläufig werden.[2])

[95] Mehrdeutiges Entsprechen zweier Flächen.[3]) Auch den Fall, wenn zwei Flächen sich mehrdeutig entsprechen, kann man

---

1) In diesen Formeln darf man n'' durch $3(n' - n) + e$ ersetzen [85]; wenn $e' > 0$ ist, muß man e' in n'' einbeziehen.

2) Siehe die S. 148, Fußnote zitierte Abhandlung.

3) Die hier entwickelten Resultate sind von Herrn *F. Severi* in einer Abhandlung in den Rendiconti del R. Ist Lomb. Serie II, Vol. XXXVI (1903)



als einen Grenzfall behandeln. Setzen wir nämlich voraus, daß jedem Punkt P_1 der Fläche φ_1 α_2 Punkte P_2 der Fläche φ_2 und jedem Punkt P_2 der Fläche φ_2 α_1 Punkte P_1 der Fläche φ_1 entsprechen, so wird man ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen zwischen einer mit φ_1 zusammenfallenden α_2-blättrigen Fläche und einer mit φ_2 zusammenfallenden α_1-blättrigen Fläche erhalten. Der Zusammenhang der Blätter findet gewöhnlich längs Übergangskurven statt, d. h. Örtern der Punkte P_1 der Fläche φ_1, von deren entsprechenden Punkten auf φ_2 zwei zusammenfallen, und der Punkte P_2 der Fläche φ_2, von deren entsprechenden Punkten auf φ_1 zwei zusammenfallen. Wir werden die Ordnung einer Übergangskurve ν, ihre Klasse ν' und die Anzahl ihrer durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen ν'' nennen, und bezeichnen durch den Index 1 oder 2 ihre Zugehörigkeit zur Fläche φ_1 oder φ_2. Die Anzahlen λ_1 und λ_2 der Schnittpunkte einer Übergangskurve mit der Berührungskurve eines der Fläche φ_1 oder φ_2 umbeschriebenen Kegels werden ebenfalls benutzt werden.

Da die Flächen jetzt mehrfach sind, werden zunächst überall in den gefundenen Formeln die der Fläche φ_1 entsprechenden Zahlen mit α_2, die der Fläche φ_2 entsprechenden mit α_1 zu multiplizieren sein. Dies tritt in der Beweisführung dadurch hervor, daß der φ_1 umbeschriebene Kegel mit dem Scheitel A wirklich α_2-facher umbeschriebener Kegel der Hilfsfläche φ_3 wird.

Weiter ist der Kegel, der eine Übergangskurve projiziert, als Teil des umbeschriebenen Kegels der mehrfachen Fläche zu betrachten. Der Kegel, der die Übergangskurve der Fläche φ_1 vom Punkt A aus projiziert, berührt nämlich wirklich die Hilfsfläche φ_3. Die Zahlen ν, ν', ν'' sind als Teile der Zahlen m', m'', m''' mitzuzählen.

Endlich ist in m''' die Zahl 3λ mitzuzählen. Daß der Koeffizient drei wird, beruht darauf, daß eine durch A gehende Ebene, die φ_1 in einem Punkt der Übergangskurve berührt, dreimal unter die von A ausgehenden stationären Tangentialebenen an φ_3 mitzuzählen ist. Diese Ebene muß nämlich zwei durch A gehende, konsekutive Gerade enthalten, die je φ_3 in vier konsekutiven Punkten treffen. Ihre Schnittkurve mit φ_3 hat also einen Selbstberührungspunkt, dessen Tangente durch A geht. Der Fall ist also der, für welchen wir in [89] 2. $E' = 3$ fanden.

Noch sind die Fundamentalpunkte zu beachten. Von diesen werden wir hier unseren Flächen solche von der folgenden Beschaffenheit beilegen. Ein Fundamentalpunkt F_1 der Fläche φ_1 kann β_2 der diese überdeckenden α_2 Blätter angehören. Dem Punkt F_1 entsprechen dann $\alpha_2 - \beta_2$ bestimmte Punkte der Fläche φ_2 und dazu noch alle Punkte einer

zuerst dargelegt worden. Seine Beweisführung ist jedoch von der, die hier vorliegt und die sich an meine schon in Math. Ann. IV (1871) und hier in [97] wiederholte anschließt, ganz verschieden.

Kurve. Dabei wollen wir voraussetzen, daß jeder Tangente an φ_1 in F_1 β_2 Punkte der genannten Kurve entsprechen, die nur dann zusammenfallen, wenn die Tangente einen durch F_1 gehenden Zweig der Übergangskurve berührt, und daß es β_2' solche unter sich verschiedene, einfache Zweige gibt. Für einen nicht auf der Übergangskurve liegenden Fundamentalpunkt ist $\beta_2 = 1$, $\beta_2' = 0$.

Betrachten wir jetzt die Beschaffenheit der mehrfachen Geraden AF_1 der Hilfsfläche φ_3 (siehe [93]). Jede Ebene durch AF_1 schneidet φ_3, außer in AF_1 selbst, noch in einer Restkurve, welche AF_1 in β_2 Punkten schneidet, die sich bewegen, wenn die Ebene sich um AF_1 dreht; wenn die Ebene eine der Ebenen β_2' ist, die die Übergangskurve in F_1 berühren, so fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen. Durch dieselben Betrachtungen, die wir in [93] bei der Herleitung der Formeln (4) und (5) benutzt haben, finden wir also, daß eine beliebige Ebene durch AF_1 β_2-fache Tangentialebene an φ_3 ist, und daß die besonders hervorgehobenen β_2' Ebenen je für drei durch A gehende stationäre Tangentialebenen zu zählen sind. Bei der Anwendung der Formeln [93] (7) und (8) auf die vielfachen Flächen muß man also für f_1 die über alle Fundamentalpunkte ausgedehnte Summe $\sum\beta_2$ setzen und in m_1''' den Wert $3\sum\beta_2'$ mitrechnen; mit Vertauschung der Indices ist dasselbe für die Fläche φ_4 vorzunehmen.

Durch Einsetzen der erweiterten Ausdrücke in [93] (8) und (7) und durch Benutzung der Ausdrücke [93] (9) und (10) der den einfachen Flächen zugehörigen Invarianten findet man nun:

$$(1)\qquad 24\alpha_2(P_1+1) - 24\alpha_1(P_2+1)$$
$$= (\nu_2'' - 12\nu_2 + 3\lambda_2) - (\nu_1'' - 12\nu_1 + 3\lambda_1) + 3\sum(\beta_1') - 3\sum(\beta_2')$$

und

$$(2)\quad \alpha_2(I_1+4) - \alpha_1(I_2+4) = (\nu_2' - 2\nu_2) - (\nu_1' - 2\nu_1) + \sum(\beta_1) - \sum(\beta_2).$$

In diesen Ausdrücken ist es jedoch wünschenswert, die Zahlen durch solche zu ersetzen, die unverändert bleiben, wenn man eine der Flächen einer eindeutigen Transformation unterwirft, deren Fundamentalpunkte wir aber als verschieden von jenen voraussetzen werden, die dem betrachteten mehrdeutigen Entsprechen angehören. Bei einer solchen Transformation bleibt das Geschlecht π und die Anzahl der Spitzen η der Übergangskurve unverändert. Die Spitzen der Übergangskurve, z. B. der auf der Fläche φ_1 liegenden, sind nämlich die Punkte P_1, von deren entsprechenden α_2 Punkten drei konsekutiv sind. Verbindet man nämlich einen solchen Punkt mit dem in der Beweisführung benutzten Punkt A, so wird AP_1 eine Haupttangente der Hilfsfläche φ_3 sein, also Rückkehrkante ihres umbeschriebenen Kegels mit dem Scheitel A, und dieser Kegel projiziert die Übergangskurve, die somit eine Spitze in P_1 besitzt. Anders gebildete Spitzen dieser Kurve würden höhere Singularitäten sein, die wir

aus dieser allgemeinen Untersuchung ausschließen können. Für eine Übergangskurve hat man also

$$2(\pi - 1) = \nu' + \eta - 2\nu = \nu + \nu'' - 2\nu'.$$

Benutzt man diese Gleichungen, um ν' und ν'' wegzuschaffen, so erhält man

$$(1') \quad 24\alpha_2(P_1+1) - 24\alpha_1(P_2+1) = 6(\pi_2 - \pi_1) - 2(\eta_2 - \eta_1) + 3(\lambda_2 - 3\nu_2) - 3(\lambda_1 - 3\nu_1) + 3\sum(\beta_1') - 3\sum(\beta_2')$$

$$(2') \quad \alpha_2(I_1+4) - \alpha_1(I_2+4) = 2(\pi_2 - \pi_1) - (\eta_2 - \eta_1) + \sum(\beta_1) - \sum(\beta_2).$$

In der ersten Gleichung bleiben α_1, α_2, P_1, P_2, π_1, π_2, η_1, η_2, $\sum\beta_1'$, $\sum\beta_2'$ unverändert, wenn wir die eine Fläche einer gegenseitig eindeutigen Transformation unterwerfen. Wenn diese die Fläche φ_1 betrifft, kann sie keinen Einfluß auf $\lambda_2 - 3\nu_2$ haben. Sie muß also auch $\lambda_1 - 3\nu_1$ invariant lassen. (Siehe übrigens im folgenden [96].)

In der anderen Gleichung ist I nur eine relative Invariante; es folgt aber aus (2'), daß $\alpha_2 I_1 + \sum(\beta_2)$ unverändert bleibt, wenn man die Fläche φ_1 durch eine andere ersetzt, die ihr auf gegenseitig eindeutige Weise entspricht; denn die übrigen in diese Formel eingehenden Zahlen bleiben dann unverändert.

[96] Entsprechende Kurven auf Flächen, die sich eindeutig entsprechen. Wir kehren jetzt zu dem gegenseitig eindeutigen Entsprechen zweier Flächen φ_1 und φ_2 zurück (siehe [93], dessen Bezeichnungen wir weiterhin benutzen) und wollen zeigen, daß bei einem solchen die Zahl, deren Invarianz wir eben für eine Kurve, die als Übergangskurve dienen kann, bemerkt haben, auch für irgendwelche entsprechende Kurven der eindeutig entsprechenden Flächen invariant bleibt.

c_1 und c_2 seien zwei einander entsprechende Kurven der Flächen φ_1 und φ_2, ν_1 und ν_2 ihre Ordnungen und λ_1 und λ_2 die Anzahlen ihrer Schnittpunkte mit der Berührungskurve eines willkürlichen, der Fläche φ_1 beziehungsweise φ_2 umbeschriebenen Kegels. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß weder c_1 noch c_2 durch Fundamentalpunkte geht, daß diese Kurven also auch die den Fundamentalpunkten entsprechenden Kurven nicht schneiden. Vorläufig legen wir auch den Flächen keine Rückkehrkurven bei.

Wir werden dieselben Hilfsflächen φ_3 und φ_4 wie in [93] benutzen und nennen die auf ihnen liegenden, den Kurven c_1 und c_2 entsprechenden Kurven c_3 und c_4. Es folgt aus der Konstruktion, daß c_3 (bzw. c_4) ν_2-mal (ν_1-mal) durch den Punkt A (B) geht und ν_1-mal (ν_2-mal) die Gerade a (b) schneidet. Wir bezeichnen mit λ_3 (bzw. λ_4) die Anzahl der mit dem Scheitel des Kegels beweglichen Schnittpunkte der Kurve c_3 (c_4) mit der Berührungskurve eines der Fläche φ_3 (φ_4) umbeschriebenen

Kegels. In diesen Zahlen sind also die Schnittpunkte, die immer in die Punkte A oder B fallen, nicht inbegriffen.

Die Kurven c_3 und c_4 liegen [93] auf demselben Kegel mit dem Scheitel C ([93], Fig. 8). Ihre Schnittpunkte mit den Berührungskurven des den Flächen φ_3 und φ_4 gemeinschaftlichen umbeschriebenen Kegels mit dem Scheitel C entsprechen sich also eindeutig. Außerdem sind in λ_3 noch die ν_1 Schnittpunkte der Kurve c_3 mit a mitzuzählen, weil die Gerade a ein Teil der Berührungskurve des vollständigen, der Fläche φ umbeschriebenen Kegels ist[1]), und ebenso in λ_4 noch ν_2 Punkte. Also wird

$$\lambda_3 - \nu_1 = \lambda_4 - \nu_2.$$

Um einen Ausdruck für die Anzahl λ_3 zu finden, zählen wir die Schnittpunkte der Kurve c_3 mit der Berührungskurve des der Fläche φ_3 umbeschriebenen Kegels mit dem Scheitel A ab. Ein Teil dieses Kegels ist nach [93] auch der Fläche φ_1 umbeschrieben und liefert unmittelbar den Beitrag λ_1 zu λ_3. Außerdem haben wir noch die Vermehrung der mit A zusammenfallenden Schnittpunkte zu beachten, die man für diese Grenzlage des Scheitels erhält. Diese Vermehrung rührt nicht von den in [93] besprochenen s_1' Tangentialebenen an den Tangentenkegel der Fläche φ_3 her, sondern ausschließlich von dem doppelt zählenden Tangentenkegel selbst. Wenn sich der Scheitel O dem Punkt A nähert, sieht man, daß zwei Schnittpunkte der Berührungskurve des umbeschriebenen Kegels mit einer auf der Fläche liegenden und durch A gehenden Kurve mit A zusammenfallen, also $2\nu_2$ Schnittpunkte mit der Kurve c_3. Da die Kurve c_1 durch keinen der Punkte der Fläche φ_1 geht, deren Verbindungslinien mit A auf der Fläche φ_3 liegen, so schneidet c_3 keine von diesen Geraden.

Also ist

$$\lambda_3 = \lambda_1 + 2\nu_2,$$

ebenso findet man

$$\lambda_4 = \lambda_2 + 2\nu_1.$$

Setzt man diese Ausdrücke oben ein, so ergibt sich:

$$\lambda_1 - 3\nu_1 = \lambda_2 - 3\nu_2$$

was wir [95] für die zu Übergangskurven geeigneten Kurven gefunden haben.

Um die hier gefundene Formel auch auf solche Fälle anzuwenden, in welchen die Flächen Rückkehrkurven haben, denen einfache Kurven entsprechen, brauchen wir nur [94] unter λ_1 und λ_2 solche Punkte mitzuzählen, in welchen c_1 und c_2 diese Rückkehrkurven treffen und entweder diese berühren oder in denselben Punkten Rückkehrpunkte haben.

---

1) Weil wir den Fall als Grenzfall behandeln, kommen natürlich nur solche Schnittpunkte in Betracht, in denen sich Kurven, die demselben Mantel der Fläche angehören, schneiden.



Die Abbildungen dieser Punkte auf φ_3 und φ_4 werden nämlich auch Schnittpunkte mit Berührungskurven umbeschriebener Kegel werden.

[97] Übungen. 1. Suche die Zahlen P und I [93], die einer Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt angehören. Welches sind die Fundamentalpunkte, wenn die Punkte P_2 der Fläche den Punkten einer Ebene so entsprechen, daß $P_1 P_2$ den Doppelkegelschnitt und eine auf der Fläche liegende Gerade in verschiedenen Punkten schneidet?

2. Die Formeln in [95] sind auf das Entsprechen einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung und ihrer Projektion auf eine durch das Projektionszentrum gehende Fläche zweiter Ordnung anzuwenden.

3. Die in [96] gefundene Formel ist auf einen ebenen Schnitt einer Fläche φ_1 mit Doppelkurve und Rückkehrkurve und auf die entsprechende Kurve einer Fläche φ_2, die φ_1 dualistisch entspricht, anzuwenden. Die Fläche φ_1 besitze aber sonst keine anderen Singularitäten als jene, die sich, wenn wir diese Fläche als Ort ihrer Punkte auffassen, im allgemeinen an die Einführung dieser Kurven knüpfen[1]). Dadurch wird man finden, daß die Ordnung der parabolischen Kurve der Fläche φ_1 $4(m_1' - m_1) + n_1$ ist, wenn die Ordnung dieser Fläche m_1, ihr Rang m_1' und die Ordnung ihrer Rückkehrkurve n_1 ist (wie in [94]).

Viertes Kapitel.

Das Korrespondenzprinzip.

a) Korrespondenzen einstufiger Gebilde vom Geschlechte 0.

[98] Algebraischer Ausgangspunkt des Korrespondenzprinzips; geometrische Bedeutung der einfachsten Korrespondenzen. Daß eine algebraisch ausdrückbare Bestimmung eines Punktes P einer Geraden auf α Punkte P führt, ist damit identisch, daß die Bestimmung der auf der Geraden gerechneten Abszisse AP des Punktes P vom Grade α ist. Eine algebraisch ausdrückbare Abhängigkeit zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 derselben oder zweier Geraden, die jedem Punkt P_2 α_1 Punkte P_1 und jedem Punkt P_1 α_2 Punkte P_1 zuordnet, muß also durch eine Gleichung ausgedrückt werden, die in Beziehung auf die Abszisse des Punktes P_1 vom Grade α_1 und in Beziehung auf die Abszisse des Punktes P_2 vom Grade α_2 ist.

An Stelle der Reihe von Punkten einer Geraden kann man hier auch irgendwelche Reihe von Gebilden vom Geschlechte 0 (Büschel von Geraden

1) Durch diese Einschränkung schließen wir Pinchpunkte und Closepunkte der Fläche φ_2 aus, welche auf der entsprechenden Kurve des betrachteten Schnittes der Fläche φ_1 liegende Fundamentalpunkte sein würden. Dagegen werden Pinchpunkte und Closepunkte der Fläche φ_1 nicht ausgeschlossen.



oder Kurven, andere ∞^1-fache Systeme von Punkten, Geraden oder Kurven vom Geschlechte 0 [79] usw.) setzen; denn diese lassen sich eindeutig durch die Abszissen einer entsprechenden geradlinigen Punktreihe bestimmen. Die Übertragung auf die anderen Reihen ist so einfach, daß wir in den ausdrücklich aufzustellenden Sätzen uns darauf beschränken können, von Punkten gerader Linien zu sprechen.

Betrachten wir erstens den Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, in welchem die Punktreihen einander gegenseitig eindeutig entsprechen. Die Gleichung, die dann vom ersten Grade in Beziehung auf jede der beiden Abszissen ist, drückt aus, daß die Punktreihen (P_1) und (P_2) zueinander projektiv sind, oder daß die Doppelverhältnisse entsprechender Punkte P_1, Q_1, R_1, S_1 und P_2, Q_2, R_2, S_2 einander gleich sind. Dies kann man bekanntlich durch algebraische Umformung der Gleichung ersehen; es geht aber auch aus der in [51] gemachten Anwendung der Methode der Erhaltung der Anzahl hervor; denn das Verhältnis

$$\frac{P_1 R_1 \cdot Q_1 S_1}{Q_1 R_1 \cdot P_1 S_1} : \frac{P_2 R_2 \cdot Q_2 S_2}{Q_2 R_2 \cdot P_2 S_2}$$

kann, wenn z. B. P_1, Q_1, R_1 und mit ihnen P_2, Q_2, R_2 fest bleiben, während S_1 und S_2 sich bewegen, nicht null werden, ist also konstant. Es ist 1, weil es diesen Wert annimmt, wenn S_1 mit R_1, S_2 mit R_2 zusammenfällt.

Hat man dagegen $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, so bekommt man eine Gleichung ersten Grades in der Abszisse x_1 von P_1 und zweiten Grades in der Abszisse x_2 von P_2. Eine solche drückt bekanntlich aus, daß die Punktepaare $P_2 P_2'$, die den Punkten P_1 entsprechen, in Involution sind. Dies folgt nun auch daraus, daß jedem Punkt P_2 ein Punkt P_2' entspricht und umgekehrt, daß also die Punktreihen P_2 und P_2' projektiv sind, und daß weiter die Punkte P_2 und P_2' sich vertauschen lassen. — Die Reihe der Punkte P_3, die mit einem Punkte A der Geraden g_2, die die Punkte P_2 enthält, in Beziehung auf P_2 und P_2' harmonisch verbunden sind, z. B. die der Mittelpunkte von $P_2 P_2'$, wird auf die Reihe P_1 projektiv bezogen sein.

Diese Abhängigkeit von Abzählungen kann zur schnellen Entdeckung von Projektivitäten und Involutionen führen und dadurch oft Mittel an die Hand geben, durch die eine vorgelegte Aufgabe sich lösen läßt. Der hier erhaltene Projektivitätsatz umfaßt z. B. die Sätze von der Projektivität der Büschel der Geraden, die von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes aus einen beweglichen Punkt desselben projizieren; eines solchen Büschels und der Reihe der Schnittpunkte der Tangenten im beweglichen Punkte mit einer festen Tangente; der Büschel von Ebenen, die zwei Sekanten einer Raumkurve dritter Ordnung mit einem beweglichen Punkte der Kurve verbinden; der Büschel der Ebenen, die zwei feste Erzeugende derselben Schar einer Fläche zweiter Ordnung mit einer

beweglichen Erzeugenden der anderen Schar verbinden; der Reihen der beweglichen Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit zwei durch Basispunkte des Büschels gehenden Geraden, oder einer solchen Reihe und des Büschels der Tangenten an die Kegelschnitte in einem Basispunkte, sowie viele andere Projektivitäten, darunter auch jene, die den genannten dualistisch entsprechen.

Ebenso umfaßt der gefundene Involutionssatz jene Sätze, die aussagen, daß die folgenden Reihen und Büschel in Involution sind: die Reihe von Schnittpunktepaaren einer Geraden mit einem Kegelschnittbüschel; die Reihe von Paaren von Schnittpunkten eines Kegelschnittes mit den Strahlen eines Büschels (oder der Strahlenpaare, die solche Schnittpunkte mit einem festen Punkte des Kegelschnittes verbinden); ebenso die Reihe von Punktepaaren, die auf einem Kegelschnitte c_2 durch die Kegelschnitte eines Büschels mit zwei Basispunkten auf c_2 ausgeschnitten werden (woraus hervorgehen wird, daß dieselben Punktepaare auch durch einen Büschel von Strahlen ausgeschnitten werden, was weiter auf den *Pascal*schen Kegelschnittsatz führt); die Reihe von Paaren von Schnittpunkten einer auf einer kubischen Fläche liegenden Geraden g mit den Kegelschnitten, in welchen die durch g gehenden Ebenen dieselbe Fläche noch schneiden usw.

An die hier angeführte Bestimmung der einfachen Involution oder der Involution zweiter Ordnung knüpft sich eine ähnliche Bestimmung der Involutionen höherer (n^{ter}) Ordnung an. Eine solche wird von den Punktgruppen P_2 einer Geraden g gebildet, die den Punkten P_1 einer Geraden entsprechen, die mit den Punkten P_2 in der durch $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = n$ ausgedrückten Beziehung stehen. Folgende Eigenschaften einer solchen Involution gehen aus dieser Bestimmung unmittelbar hervor: Wenn zwei Gruppen der Involution einen gemeinsamen Punkt haben, wird dieser allen Gruppen der Involution angehören, und die anderen Punkte der Gruppen bilden Gruppen einer neuen Involution von der Ordnung $n - 1$. Die r^{ten} Polaren eines festen Punktes der Geraden in Beziehung auf die Punktgruppen einer auf derselben Geraden liegenden Involution n^{ten} Grades [19] bilden selbst eine Involution $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Gruppen denselben Punkten P_1 wie die Gruppen der gegebenen Involution eindeutig entsprechen. Daher werden die $(n - 1)^{\text{ten}}$ Polaren oder die Polarenpunkte verschiedener fester Punkte in Beziehung auf die Gruppen unter sich und auf die die Involution bestimmenden Punkte P_1 projektiv bezogen sein. Sie können auch selbst als bestimmende Punkte P_1 benutzt werden. Die Gruppen der Punktpaare, die Polaren $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung eines Punktes bilden, sind in einfacher Involution.

Die Reihe von Punktgruppen, in welchen die Kurven eines Büschels n^{ter} Ordnung eine Gerade schneiden, bilden eine Involution n^{ter} Ordnung. Daraus ersieht man auch, daß die Polarkurven eines festen Punktes in Beziehung auf die Kurven eines Büschels selbst einen Büschel bilden.

Dieselben Bemerkungen lassen sich auch auf Flächenbüschel anwenden. Ebenso darf man sagen, daß die Punktgruppen, die durch die Kurven eines Büschels auf einer Kurve vom Geschlechte 0 ausgeschnitten werden, in Involution sind, wenn man nur die Bestimmung der Punkte der Kurve auf die Bestimmung der ihnen gegenseitig eindeutig entsprechenden Punkte einer Geraden zurückführt.

[99] Aufstellung des einfachen Korrespondenzsatzes. Kehren wir nun zum allgemeinen, durch die Zahlen α_1, α_2 charakterisierten Entsprechen der Punkte P_1 und P_2 zurück; dabei wollen wir aber voraussetzen, daß diese auf derselben Geraden g liegen, und daß wir die Abszissen x_1 und x_2 von demselben festen Punkt aus rechnen. Die Punkte der Geraden, in welchen ein Punkt P_1 mit einem entsprechenden Punkt P_2 zusammenfallen, werden dann dadurch bestimmt, daß man in der P_1 und P_2 verbindenden Gleichung $x_1 = x_2$ setzt. Diese wird dann, weil sie vom Grade α_1 in x_1 und vom Grade α_2 in x_2 ist, im allgemeinen vom Grade $\alpha_1 + \alpha_2$ sein, und unserem projektiven Standpunkt gemäß können wir sagen, daß sie immer $\alpha_1 + \alpha_2$ Wurzeln hat, wenn wir ihr nur so viele unendliche Wurzeln beilegen, als ihr an dieser Zahl fehlen. Die Zahl $\alpha_1 + \alpha_2$ wird man unmittelbar erhalten, wenn x_1 und x_2 die Verhältnisse der Abstände der einander entsprechenden Punkte P_1 und P_2 von zwei solchen festen Punkten sind, in welchen ein Punkt P_1 nicht mit einem entsprechenden Punkte P_2 zusammenfällt.

Wenn zwei bewegliche Punkte P_1 und P_2 einer Geraden algebraisch so aufeinander bezogen sind, daß jedem Punkte P_1 α_2 Punkte P_2 und jedem Punkte P_2 α_1 Punkte P_1 entsprechen, so gibt es auf der Geraden $\alpha_1 + \alpha_2$ Punkte K, in welchen ein Punkt P_1 mit dem entsprechenden Punkte P_2 zusammenfällt. Eine solche Korrespondenz nennen wir eine (α_1, α_2)-Korrespondenz. Die Punkte der Geraden lassen sich auch hier durch andere, einer Reihe vom Geschlecht 0 angehörige geometrische Gebilde ersetzen.

Der hier genannte allgemeine Satz drückt das sogenannte Korrespondenzprinzip aus. Wir werden ihn den einfachen Korrespondenzsatz nennen, um ihn von jenem zu unterscheiden, der auch Korrespondenzen auf Kurven, die nicht vom Geschlechte 0 sind [116], betrifft.

[100] Algebraische und konstruktive Anwendung. Die Anwendungen des Korrespondenzsatzes zeichnen sich vor den meisten anderen abzählenden Methoden dadurch aus, daß er eine unmittelbare Anweisung zur Bildung der algebraischen Gleichung gibt, durch welche die Aufgabe, deren Lösungen man abzählt, auch algebraisch zu lösen ist. Die Bildung der Gleichung vom Grad α_1, durch die man den Punkt P_1 bestimmt, der einem Punkt P_2 entspricht (oder umgekehrt), wird nämlich, algebraisch gesprochen, als eine einfachere Aufgabe als diejenige zu betrachten sein, die durch die Koinzidenz der

Punkte P_1 und P_2 gelöst wird, und um letztere algebraisch auszudrücken, hat man dann nur die Abszissen x_1 und x_2 gleichzusetzen.

Auch eine rein geometrische Lösung derselben Aufgabe läßt sich an die Anwendung des Korrespondenzprinzips anknüpfen, wenn man bemerkt, daß sie identisch mit der Lösung einer anderen Aufgabe wird, die ebenfalls auf der Koïnzidenz derselben korrespondierenden Punkte beruht. Verbindet man z. B. die beweglichen Punkte P_1 und P_2 der Geraden mit zwei festen Punkten A und B, so wird der Ort der Schnittpunkte der Geraden AP_1 und BP_2 eine Kurve von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2$ sein, die in A einen α_1-fachen, in B einen α_2-fachen Punkt hat. Dies haben wir in [18] anders bewiesen; es folgt aber auch unmittelbar aus dem Korrespondenzsatz, daß diese Kurve eine willkürliche Gerade in $\alpha_1 + \alpha_2$ Punkten schneidet (vgl. im folgenden [102]). Die gefundene Kurve wird eben die Gerade g in den gesuchten Koinzidenzpunkten schneiden. Hat man für eine Korrespondenz gefunden, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, die Korrespondenz also eine Projektivität ist [98], so wird die genannte Kurve ein Kegelschnitt sein, der durch A und B geht, und von welchem man noch drei Punkte bestimmen kann, wenn man drei entsprechende Punktepaare der Projektivität kennt. Dann wird es übrigens auch nicht schwierig sein, nach einer willkürlichen Wahl des Punktes A den Punkt B so zu wählen, daß der Kegelschnitt ein Kreis wird, so daß die ganze Konstruktion durch Zirkel und Lineal ausgeführt werden kann.

Einfacher wird die Konstruktion, wenn die entsprechenden Punktreihen schon auf einem festen Kegelschnitt k_2 (z. B. Kreis) liegen, was man immer durch geeignete Projektion erreichen kann. Wählen wir in diesem Fall die festen Punkte A und B so auf demselben Kegelschnitt k_2, daß der Punkt A als Punkt P_2 dem Punkt B als Punkt P_1 betrachtet entspricht, so wird aus dem Ort der Schnittpunkte der Geraden AP_2 und BP_1 die Gerade AB ausgeschieden, so daß nur eine Kurve von der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$, mit einem $(\alpha_1 - 1)$-fachen Punkt in A und einem $(\alpha_2 - 1)$-fachen Punkt in B übrig bleibt. Diese Kurve wird k_2 noch in den gesuchten Koinzidenzpunkten schneiden.

Im Falle der Projektivität $(\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1)$ wird die so konstruierte Kurve eine Gerade sein, von welcher man, wenn außer B und A noch zwei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, unmittelbar zwei Punkte finden kann. Man erhält dadurch eine bekannte Konstruktion der entsprechend gemeinsamen Punkte zweier projektiven Punktreihen auf demselben Träger. Ganz unmittelbar ergibt sich dadurch *Poncelet*s Lösung einer von ihm verallgemeinerten altberühmten Aufgabe. In der verallgemeinerten Gestalt verlangt sie die Konstruktion eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen n-Ecks, dessen Seiten durch n gegebene Punkte gehen. Versucht man nämlich, die Konstruktion mit einem Punkt P_1 des Kegelschnitts anzufangen und legt durch ihn die erste Seite des n-Ecks, so wird die letzte Seite den Kegelschnitt in einem Punkt P_2

treffen, der mit P_1 zusammenfallen soll, um eine Lösung der Aufgabe zu geben. Zwischen P_1 und P_2 findet eine (1, 1)-Korrespondenz statt; nach drei Versuchen, die zuerst die Punkte B und A und sodann noch zwei Paare entsprechender Punkte ergeben, läßt sich die eben angeführte Bestimmung der entsprechend gemeinsamen Punkte anwenden. Sie wird durch ausschließlichen Gebrauch des Lineals und des bereits gezeichneten Kegelschnitts durchgeführt.

Hier liegen die entsprechenden Punkte schon auf dem zu benutzenden Kegelschnitt. In anderen Fällen müssen sie auf ihn übertragen werden. Auf diese Weise erhält man die konstruktive Lösung einer beliebigen Gleichung zweiten Grades

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0;$$

denn diese bestimmt die Koinzidenzen verschiedener Projektivitäten von Punkten einer Geraden, z. B. der durch

$$a_0 x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 = 0$$

bestimmten.

Ist $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, so wird im genannten Fall der zur Konstruktion benutzte Ort ein durch A gehender, neuer Kegelschnitt, von welchem man noch vier Punkte kennt, wenn z. B. die zwei anderen Punkten P_2 entsprechenden vier Punkte P_1 bekannt sind. Seine drei anderen Schnittpunkte mit k_2 werden die gesuchten Koinzidenzpunkte sein. Da eine beliebige Gleichung dritten Grades

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

die Koinzidenzen einer (2, 1)-Korrespondenz, z. B. der durch die Gleichung

$$a_0 x_1^2 x_2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2 + a_3 = 0$$

ausgedrückten, bestimmt, erhält man somit eine konstruktive Lösung der genannten Gleichung durch zwei Kegelschnitte, von welchen der eine willkürlich gewählt ist.

In einem besonderen Fall können die Koinzidenzen einer (2, 2)-Korrespondenz auf ähnliche Weise konstruiert werden, wenn nämlich die zwei dem Punkt B_1 (als Punkt P_1 betrachtet) entsprechenden Punkte P_2 in A zusammenfallen und gleichzeitig die zwei dem Punkt A_1 (als Punkt P_2 betrachtet) entsprechenden Punkte P_1 in B zusammenfallen. Dann wird sich nämlich die Gerade AB zweimal aus dem Orte der Schnittpunkte der Geraden AP_1 und BP_2 ausscheiden, der Restort also nur von der zweiten Ordnung sein. Auf diesen Fall läßt sich die Lösung einer allgemeinen Gleichung vierten Grads

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

leicht zurückführen. Diese Gleichung wird nämlich die Koinzidenzen der durch die Gleichung

$$a_0 x_1^2 x_2^2 + a_1 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2 + a_4 = 0$$



bestimmten (2, 2)-Korrespondenz ergeben, und in dieser werden die durch $x_2 = 0$, $x_1 = \infty$ bestimmten Punkte sich eben auf die genannte Weise entsprechen.

[101] Sätze über (2, 2)-Korrespondenzen. An eine (2,2)-Korrespondenz zwischen den Punktreihen (P_1) und (P_2) knüpfen sich zwei andere Korrespondenzen an, die beziehungsweise von den Punkten P_1 und P_1', die demselben Punkt P_2 entsprechen, und von den Punkten P_2 und P_2', die demselben Punkt P_1 entsprechen, gebildet werden; einem Punkt P_1 entsprechen nämlich zwei Punkte P_2, die je einen von P_1 verschiedenen Punkt P_1' ergeben. Auch von diesen Korrespondenzen hat jede vier Koinzidenzen.

Verlegen wir die Reihen (P_1) und (P_2) auf zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 derselben Ebene und sind A und B feste Punkte auf einer Geraden, die zwei entsprechende Punkte P_1 und P_2 verbindet, so wird der Ort der Schnittpunkte der Geraden AP_1 und BP_2, abgesehen von der Geraden AB selbst, eine durch A und B gehende Kurve dritter Ordnung sein.

Nun haben wir in [51] bewiesen, daß, wenn wir von zwei Punkten A und B einer Kurve dritter Ordnung aus die vier Tangenten an die Kurve ziehen, die sie nicht in A und B berühren, diese zwei Gruppen von vier Geraden dieselben Doppelverhältnisse haben werden. Da diese g_1 in den vier Punkten C_1, D_1, E_1, F_1, deren entsprechende Punkte C_2, D_2, E_2, F_2 zusammenfallen, und g_2 in den vier Punkten G_2, H_2, I_2, K_2, deren entsprechende Punkte G_1, H_1, I_1, K_1 zusammenfallen, schneiden, so sieht man, daß, für eine passende Anordnung der Punkte der hier genannten Gruppen, die folgenden Doppelverhältnisse einander gleich sind:[1])

(1) $$(C_1 D_1 E_1 F_1) = (G_2 H_2 I_2 K_2).$$

Wir werden am Schlusse dieses Artikels sehen, daß für die entsprechende Anordnung auch (vgl. [54], 3)

(2) $$(G_1 H_1 I_1 K_1) = (C_2 D_2 E_2 F_2)$$

ist.

Fallen zwei Punkte der durch die Gleichung (1) verbundenen Gruppen zusammen, z. B. C_1 und D_1, so muß unsere Hilfskurve einen Doppelpunkt haben im Schnittpunkt der Geraden AC_1 und BC_2. Dann fallen auch G_2 und H_2 mit C_2 und D_2, G_1 und H_1 mit C_1 und D_1 zusammen. Fallen auch E_1 und F_1 zusammen, woraus folgt, daß I_1 und K_1 mit diesen und E_2, F_2 und I_2, K_2 unter sich zusammenfallen, so muß die Hilfskurve dritter Ordnung zwei Doppelpunkte haben, also aus einer Geraden und einem durch A und B gehenden Kegelschnitt zusammen-

1) Dieser Satz ist mit dem algebraischen Transformationssatz, auf welchem *Eulers* Addition elliptischer Integrale beruht, identisch.

gesetzt sein. Die (2, 2)-Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 löst sich also in (1, 1)-Korrespondenzen auf, so daß die Punktreihe (P_2) mit den zwei Reihen entsprechender Punkte P_1 und P_1', letztere also auch unter sich, und ebenso die Reihen (P_1) und die beiden ihr entsprechenden Punktreihen (P_2) und (P_2') projektiv werden.

Eine (2, 2)-Korrespondenz findet z. B. zwischen den Punkten P_1 eines Kegelschnittes k_1 und den Schnittpunkten P_2 der Tangenten von k_1 in P_1 mit einem anderen Kegelschnitt k_2 statt. In diesem Fall sind, wenn wir die Benennungen, die wir eben für geradlinige Träger g_1 und g_2 anwandten, auf die neuen Träger k_1 und k_2 übertragen die Punkte C, D, E, F, die Berührungspunkte der Kegelschnitte k_1 und k_2 mit ihren gemeinschaftlichen Tangenten, und diejenigen, die wir G, H, I, K genannt haben, die Schnittpunkte der Kegelschnitte, alle mit dem Index des Kegelschnitts, dem sie angehören. Die Gleichung (1) wird nun ausdrücken, daß das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, auf einem dieser gerechnet, dem Doppelverhältnis der Punkte, in denen die vier gemeinschaftlichen Tangenten den anderen berühren, gleich ist.

Vertauscht man in der Anwendung dieses Satzes die zwei Kegelschnitte, so findet man, daß wenigstens in diesem Fall auch die Gleichung (2) richtig ist. Um ihre allgemeine Gültigkeit zu beweisen, ist es aber noch nötig zu zeigen, daß zwei willkürliche (2, 2)-Korrespondenzen mit Hilfe von (1, 1)-Korrespondenzen mit solchen vertauscht werden können, die geometrisch auf die hier betrachtete Weise verbunden sind. Wir können zunächst der Reihe P_1 einen Kegelschnitt k_1 als Träger geben, während der Träger der Reihe P_2 noch willkürlich ist und z. B. eine Gerade g_2 sein kann. Jedem Punkt P_1 entsprechen dann zwei Punkte P_2 und P_2', und jedem Punkt P_2 zwei Punkte P_1 und P_1', und der Ort des Schnittpunktes P_3 der Tangenten p_1 und p_1' von k_1 in P_1 und P_1' wird ein Kegelschnitt sein. Er schneidet nämlich die Tangente p_1 nur im Schnittpunkte mit p_1' und in dem Schnittpunkt mit der Tangente von k_1 in dem Punkt, der außer P_1 dem Punkt P_2' entspricht. Die so gefundenen Punkte des Kegelschnittes k_2 entsprechen gegenseitig eindeutig den Punkten der Reihe P_2 und können sie also ersetzen. Sie stehen aber eben mit den Punkten P_1 in der oben vorausgesetzten Verbindung.

Wenn zwei Kegelschnitte k_1 und k_2 sich in zwei Punkten berühren, tritt der schon genannte Fall ein, in welchem die (2, 2)-Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 von k_1 und den Punkten P_2, in denen die Tangenten in P_1 den Kegelschnitt k_2 schneiden, sich in (1, 1)-Korrespondenzen auflöst, die Punkte P_1 und P_2 also unter sich projektive Punktreihen bilden.

Als weiteres Beispiel von (2, 2)-Korrespondenzen, auf welche man

die bewiesenen Sätze anwenden darf, nennen wir die Korrespondenz der sich schneidenden Erzeugenden zweier Flächen zweiter Ordnung.

[102] Ort der Schnittpunkte entsprechender Kurven. Die namentlich in [62] hervorgehobenen Vorteile lassen es oft nützlich erscheinen, eine Aufgabe, für die man bereits auf andere Weise abzählende Ergebnisse gewonnen hat, auch durch das Korrespondenzprinzip zu lösen. Diese neue Lösungsweise kann oft zu Erweiterungen führen.[1]) Daher wird man auch hier unter den Anwendungen des Korrespondenzprinzips solche Aufgaben finden, die wir schon anders gelöst haben.

Um die Ordnung des Ortes der Schnittpunkte entsprechender Kurven zweier in derselben Ebene liegenden, eindeutig aufeinander bezogenen Büschel zu finden [23], kann man die Anzahl seiner Schnittpunkte mit einer willkürlichen Geraden g suchen. Nehmen wir an, daß die Kurven der zwei Büschel beziehungsweise von den Ordnungen n_1 und n_2 sind, und bezeichnen wir mit P_1 und P_2 zwei Schnittpunkte zweier entsprechender Kurven mit g. Dann stehen P_1 und P_2 miteinander in einer (n_1, n_2)-Korrespondenz und es wird $n_1 + n_2$ Punkte geben, in welchen ein Punkt P_1 mit einem entsprechenden Punkte P_2 zusammenfällt. Diese Punkte sind eben die gesuchten Schnittpunkte mit g; die gesuchte Ordnung ist also $n_1 + n_2$.

Nehmen wir nun allgemein an, daß die Kurven c_1 von der Ordnung n_1 einem System angehören, von welchem μ_1 Kurven durch einen willkürlichen Punkt der Ebene gehen, die Kurven c_2 von der Ordnung n_2 einem anderen System, von welchem μ_2 Kurven durch einen willkürlichen Punkt der Ebene gehen; weiter, daß jeder Kurve c_1 r_2 Kurven c_2 und jeder Kurve c_2 r_1 Kurven c_1 entsprechen. Dann wird die Korrespondenz zwischen den Schnittpunkten P_1 und P_2 einer Geraden g mit zwei einander entsprechenden Kurven durch die folgenden Zahlen charakterisiert:

$$\alpha_1 = \mu_2 r_1 n_1, \qquad \alpha_2 = \mu_1 r_2 n_2.$$

Der Ort der Schnittpunkte zweier entsprechender Kurven wird also von der Ordnung $\mu_2 r_1 n_1 + \mu_1 r_2 n_2$ sein.

Wenden wir dieses Resultat besonders auf den Ort der Schnittpunkte solcher Tangenten zweier Kurven c_1 und c_2 von den Klassen n_1'

---

1) Dagegen würde es ein Mißverständnis sein, zu glauben, daß das sich enger an die algebraische Auflösung anschließende Korrespondenzprinzip damit eine größere Sicherheit gewähre als eine auf wirklichen Grenzübergängen beruhende Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl. Daß eine algebraische Kurve von der Ordnung n ist, wird z. B. dadurch ganz sicher gestellt, daß sie eine *einzige* Gerade in n und nur n Punkten schneidet, und es ist dann gar nicht nötig, nachher durch das Korrespondenzprinzip zu beweisen, daß sie auch eine *willkürliche* Gerade in n Punkten schneidet. Letztere Bestimmung kann aber nützlich sein, z. B. um auch die Verteilung der Schnittpunkte der Kurve mit anderen Geraden zu untersuchen.

und n'_2 an, die miteinander einen gegebenen Winkel bilden. Diesen Winkel denken wir uns in einer bestimmten Umlaufsrichtung von der Tangente von c_1 aus bis zur Tangente von c_2 gerechnet. In diesem Falle nehmen die eben benutzten Zahlen die folgenden Werte an:

$$n_1 = n_2 = 1, \quad \mu_1 = r_1 = n'_1, \quad \mu_2 = r_2 = n'_2.$$

Die Ordnung wird also $2n'_1 n'_2$ sein.

Dieses Resultat läßt sich zwar sehr wohl auch dann anwenden, wenn die Kurven c_1 und c_2 in eine einzige Kurve von der Klasse n' zusammenfallen, gibt aber dann nicht unmittelbar den Ort der Schnittpunkte zweier Tangenten, die miteinander den gegebenen Winkel bilden; dieser umfaßt nämlich dann auch die Tangenten, die mit sich selbst den gegebenen Winkel bilden; denn jeder Punkt einer solchen kann als ihr Schnittpunkt mit sich selbst betrachtet werden. Wir haben früher [55] bemerkt, daß es wirklich solche Tangenten gibt, nämlich die $2n'$, die durch die zwei unendlich fernen Kreispunkte gehen. Der Ort der Schnittpunkte zweier Tangenten einer Kurve von der Klasse n', die miteinander einen gegebenen Winkel bilden, ist also nur $2n'^2 - 2n' = 2n'(n' - 1)$. Dieses Resultat geht übrigens aus der Bestimmung mittels des Korrespondenzsatzes unmittelbar hervor, wenn man gleich von Anfang an daran festhält, daß der gegebene Winkel von verschiedenen Tangenten derselben Kurve gebildet werden soll. Dann hat man nämlich

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n'(n' - 1).$$

Ist der Winkel ein rechter, so wird die Unterscheidung zwischen den Umlaufsrichtungen hinfällig. Wie wir in [56] im Fall eines Kegelschnitts sahen, wird der Ort sich dann auf eine zweimal zu zählende Kurve von der Ordnung $n'(n' - 1)$ reduzieren.

[103] Unterscheidung verschiedenartiger Koinzidenzen. Was für die eben behandelte Aufgabe über Tangenten zweier Kurven, bei Anwendung des allgemeinen Resultats auf die Tangenten einer einzigen Kurve eintrat, das stellt sich auch sonst oft ein: die durch den Korrespondenzsatz gefundenen Koinzidenzen werden verschiedenartig sein und den Lösungen ganz verschiedener Aufgaben entsprechen. Bei den Anwendungen des genannten Satzes muß man daher 1. alle möglichen Arten von Koinzidenzen beachten und nicht nur diejenigen, durch welche die im vorliegenden Falle gestellte Aufgabe gelöst wird, 2. jede Art von Koinzidenzen sovielmal mitzählen, als die solche Koinzidenzen bestimmenden Abszissen Wurzeln der algebraischen Gleichung sind, die durch Gleichsetzen von x_1 und x_2 in der die Korrespondenz ausdrückenden Gleichung entsteht.

Die Erfüllung letzterer Voraussetzung kann man durch eine Regel sichern, die wir sogleich in [105] aufstellen werden. Für die Spaltung in verschiedenartige Koinzidenzen werden wir aber schon im voraus einige Beispiele liefern.



Ein solches bietet die Bestimmung der Ordnung eines Ortes dar, deren Resultat wir in [78] vorweggenommen haben. Der Ort war der der Schnittpunkte P zweier Tangenten einer ebenen Kurve c von der Ordnung n und der Klasse n', deren Berührungspunkte M_1 und M_2 auf Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel A liegen. Die entsprechenden Punkte P_1 und P_2 seien in Fig. 9 die Punkte, in welchen zwei solche Tangenten eine feste Gerade b schneiden. Für die Korrespondenz zwischen diesen Punkten findet man

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n'(n-1).$$

Von den Koinzidenzen dieser Korrespondenz fallen zwei in jeden Schnittpunkt des gesuchten Ortes mit b, weil es willkürlich ist, welche von den sich in einem solchen Punkt schneidenden Tangenten PM_1 und PM_2 man als PM_1 betrachten will (vgl. im folgenden [105]), und außerdem je eine in jeden der n' Schnittpunkte der durch A gehenden Tangenten mit b. Nennen wir die gesuchte Ordnung x, so finden wir also

$$2n'(n-1) = 2x + n',$$

wobei wir jedoch, wie in [78], voraussetzen, daß die Kurve keine anderen singulären Punkte hat als d Doppelpunkte. Somit wird

$$x = \tfrac{1}{2}n'(2n-3).$$

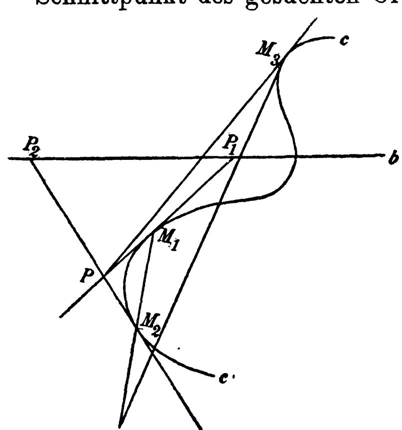


Fig. 9.

Ebenso kann man den Korrespondenzsatz benutzen, um die Anzahl t der in [78] genannten dreifachen Punkte desselben Ortes zu finden. Durch einen solchen Punkt gehen drei Tangenten an c, deren Berührungspunkte auf einer durch A gehenden Geraden liegen. Ist nun (Fig. 9) AM_1M_2 ein willkürlicher durch A gehender Strahl, M_1 und M_2 zwei seiner Schnittpunkte mit c, P der Schnittpunkt der Tangenten in M_1 und M_2, und M_3 der Berührungspunkt einer dritten durch P gehenden Tangente PM_3 an c, so werden dem Strahl AM_1M_2 $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte P, $\frac{1}{2}n(n-1)(n'-2)$ Punkte M_3, also auch

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}n(n-1)(n'-2)$$

Strahlen AM_3 entsprechen. Ein Strahl desselben Büschels wird, als Strahl AM_3 betrachtet, n Punkte M_3 enthalten. Die Tangente in einem solchen Punkt M_3 schneidet den Ort der Punkte P in $\frac{1}{2}n'(2n-3)$ Punkten. Von diesen sind jedoch $n-1$ nur die Schnittpunkte mit Tangenten an c in ihren übrigen Schnittpunkten mit AM_3. Die übrigbleibenden Punkte P geben je einen dem Strahle AM_3 entsprechenden Strahl AM_1M_2. In dieser Korrespondenz ist also

$$\alpha_1 = n(\tfrac{1}{2}n'(2n-3) - (n-1)).$$

An Koinzidenzen erhält man

1. $3t$, die davon herrühren, daß M_3 ein dritter Schnittpunkt des Strahls AM_1M_2 ist; daß dieser dreimal zu zählen ist, beruht darauf, daß hier jeder der drei Punkte als Punkt M_3 betrachtet werden kann.

Sonst können Koinzidenzen nur dann eintreten, wenn M_3 z. B. mit M_1 zusammenfällt. Fällt dann nicht auch P mit denselben Punkten zusammen, so muß PM_1 eine der e' Wendetangenten der Kurve c und M_2 einer der $n-1$ Schnittpunkte der Geraden AM_1 sein. Auf diese Weise erhält man:

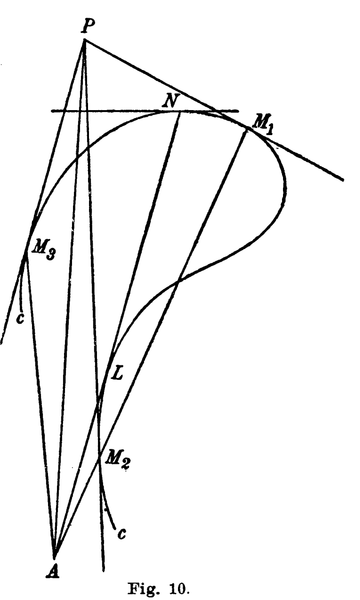


Fig. 10.

2. $e'(n-1)$ Koinzidenzen. Es gibt zwei Fälle, in denen sowohl M_3, als auch P mit M_1 zusammenfällt, nämlich:

3. wenn M_1 und M_2 in einen der d Doppelpunkte der Kurve c fallen, was $2d$ Koinzidenzen ergibt, da M_3 dann entweder demselben Zweig wie M_1 oder demselben Zweig wie M_2 angehören kann, oder

4. wenn der Punkt M_2 in den Berührungspunkt L (Fig. 10) einer der n' durch A gehenden Tangenten an c, sowie der Punkt M_1 und mit ihm P und M_3 in einen Punkt N der $n-2$ Schnittpunkte dieser Tangente fällt, was $n'(n-2)$ Koinzidenzen ergeben wird. Zwar werden in diesem Fall, weil zwei Schnittpunkte in den Berührungspunkt fallen, $2(n-2)$ der dem Strahl AL (betrachtet als ein Strahl AM_1M_2) entsprechenden Strahlen AM_3 mit ihr zusammenfallen. Aus der Regel, die wir in [105] aufstellen werden, und deren Unentbehrlichkeit aus dem hier vorliegenden Beispiel hervorgeht, ersieht man aber, daß die so entstehenden $n-2$ Koinzidenzen je nur einmal zu zählen sind. Übrigens wird, wenn man den Punkt N als einen Punkt M_3 betrachtet, nur eine der entsprechenden Geraden AM_1M_2 mit AM_3 zusammenfallen; denn, wie wir schon vorläufig in [78] bemerkt haben (ein exakter Beweis wird sogleich folgen), ist die Tangente in N an c Wendetangente des Ortes der Punkte P und hat in N drei zusammenfallende Schnittpunkte mit diesem Ort. Zwei davon sind ihre Schnittpunkte mit den Tangenten an c in ihren zwei in N zusammenfallenden Schnittpunkten mit dieser Kurve. Der dritte wird eben ein Punkt P sein, mittels dessen dem Strahl AL, als Strahl AM_3 betrachtet, derselbe Strahl, als Strahl AM_1M_2 betrachtet, einmal zugeordnet wird.

Der Korrespondenzsatz ergibt uns also die folgende Gleichung:

$$n(\tfrac{1}{2}n'(2n-3)-(n-1))+\tfrac{1}{2}n(n-1)(n'-2)=3t+e'(n-1)+2d+n'(n-2).$$

Da wir $e=0$ vorausgesetzt haben, folgt aus den *Plücker*schen Formeln [70], daß $e'=3(n'-n)$, $2d=n(n-1)-n'$ ist, wodurch man findet:

$$t=\tfrac{1}{2}n'(n-2)^2.$$

Die eben angeführten Bemerkungen über den Fall, in welchem M_2 in den Berührungspunkt L einer durch A gehenden Tangente, sowie M_1, P und M_3 in einen Schnittpunkt N derselben Tangente fallen, beruhen auf einer infinitesimalen Untersuchung einer benachbarten Lage dieser Punkte. Nehmen wir (Fig. 10) an, daß LM_2 unendlich klein erster Ordnung ist, so ist, da das in den Punkt L fallende Element der Kurve c einfach ist, der Winkel LAM_2 und also auch der Abstand NM_1 unendlich klein zweiter Ordnung [10], der Winkel PLN, also auch PN, PM_3, M_3N, der Winkel M_3AN und der Winkel M_3AM_1 erster Ordnung (was bei der Anwendung der Regel in [105] benutzt werden wird). Weiter bilden die Tangenten in N und M_1 einen unendlich kleinen Winkel zweiter Ordnung und müssen auf der Geraden AP ein unendlich kleines Stück dritter Ordnung abschneiden. Daraus folgt [10], daß der Ort der Punkte P die Tangente an c in N in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, oder daß diese eine Wendetangente des Ortes ist, wie wir eben bemerkten.

[104] Bestimmung der Brennfläche einer Linienkongruenz. Als eine Anwendung des Korrespondenzsatzes werden wir hier die früher [31] versprochene Bestimmung der Ordnung m und der Klasse m'' der Brennfläche einer Kongruenz geben. Dazu genügt es nicht, die Ordnung n und die Klasse n' der Kongruenz zu kennen. Man braucht auch den Rang r (s. [8] und [43]), der für höhere Werte von n und n' nicht schon durch diese Zahlen bestimmt ist. Er ist die Anzahl der Strahlenpaare der Kongruenz, die einem eine beliebige, gegebene Gerade a enthaltenden Büschel angehören.

Es sei P_1 ein Punkt der Geraden a. Durch ihn gehen n Strahlen der Kongruenz, die je in Verbindung mit a eine Ebene bestimmen, und jede solche Ebene enthält noch $n'-1$ Strahlen der Kongruenz, deren Schnittpunkte wir P_2 nennen. Da P_1 auf dieselbe Weise durch P_2 bestimmt wird, so findet zwischen P_1 und P_2 eine Korrespondenz mit den Zahlen $\alpha_1=\alpha_2=n(n'-1)$ statt. Koinzidenzen entstehen 1. in den r Scheiteln der Büschel, die a und zwei Strahlen der Kongruenz enthalten, und 2. in den m'' Schnittpunkten mit den Strahlen, deren eine Fokalebene die Gerade a enthält, und zwar, wie die Regel [105] zeigen wird, zwei in jedem der ersteren Punkte und eine in jedem der letzteren. Also findet man [1])

1) Siehe *Sturm* Liniengeometrie II S. 8.

(1) $$m'' = 2n(n'-1) - 2r.$$

Die dualistisch entsprechende Bestimmung ergibt

(2) $$m = 2n'(n-1) - 2r.$$

Es ist jedoch hier vorausgesetzt, daß die Kongruenz nicht eine zusammenhängende Schar von Doppelstrahlen hat. Wenn sie einen isolierten eigentlichen Doppelstrahl b hat [43] und a diesen schneidet, so müssen zwei Koinzidenzen der zu (1) führenden Korrespondenz im Punkte (ab) und zwei Koinzidenzen der zu (2) führenden Korrespondenz in der Ebene (ab) stattfinden. Entweder muß also der Doppelstrahl Doppelgerade der Brennfläche sein, und zwar sowohl wenn man diese als Punktort, als auch wenn man sie als Ebenenort betrachtet, oder er ersetzt für eine Gerade a, die ihn trifft, einen der r die Gerade a enthaltenden Büschel. Daraus entsteht die in [43] aufgestellte Unterscheidung zwischen eigentlichen Doppelstrahlen zweiter Art und eigentlichen Doppelstrahlen erster Art. Dagegen wird [43] ein punktdoppelter Strahl c, der a schneidet, zu keiner Koinzidenz der ersten Korrespondenz, ein ebenendoppelter Strahl d aber, der a schneidet, zu einer Koinzidenz führen; das Umgekehrte gilt für die andere Korrespondenz. Daraus ersieht man, daß die Brennfläche, als Ebenenort betrachtet, die ebenendoppelten Strahlen und, als Punktort betrachtet, die punktdoppelten Strahlen enthält.

Beachten wir nun die Benutzung von r in der Bestimmung, die wir in der Anmerkung zu [43] von den Flächen (B) und (C) gaben, so sehen wir, daß diese die eigentlichen Doppelstrahlen erster Art enthalten, aber weder die eigentlichen Doppelstrahlen zweiter Art, noch die punktdoppelten oder die ebenendoppelten Strahlen. Die dort gefundenen $\frac{1}{2}(n'-2)(n'-3)$ Doppelstrahlen der Kongruenzen zweiter Ordnung sind also eigentliche Doppelstrahlen erster Art.

Wenn die Ordnung der Kongruenz $n = 2$ ist, haben wir in [31] gesehen, daß $m = 4$ wird. Aus (2) findet man dann, daß $r = n' - 2$, und sodann aus (1), daß $m'' = 2n'$ ist. Diesen Wert von r haben wir auch in der genannten Anmerkung benutzt.

Ist $n = n' = 2$, so findet man $r = 0$. Gibt es also überhaupt Büschel, die gleichzeitig a und zwei Strahlen der Kongruenz enthalten, so muß es unendlich viele geben. Diese Eigenschaften haben alle Geraden des durch zwei sich schneidende Strahlen der Kongruenz bestimmten Büschels, und da durch jeden Punkt zwei Strahlen der Kongruenz gehen und in jeder Ebene zwei liegen, so sieht man, daß die Strahlen a solcher Büschel einen linearen Komplex bilden. Diesem gehören auch die Strahlen der Kongruenz an, da sie selbst in den genannten Büscheln liegen. Also wird eine Kongruenz von der zweiten Ordnung und zweiten Klasse in einem linearen Komplex liegen. Da $r = 0$ ist, so kann, wenn eine Gerade a einen Doppelstrahl trifft, die letztere der oben für Doppelstrahlen genannten Möglichkeiten nicht



eintreten. Wir sehen also, daß die Doppelstrahlen einer Kongruenz $n = 2$, $n' = 2$ zweiter Art sein müssen, was wir für die *Hirst*sche Kongruenz schon nachgewiesen haben [44].

[105] Regel für die Abzählung zusammenfallender Lösungen. In den bisher betrachteten Beispielen konnte wegen der Allgemeinheit der Fragestellung nur da, wo wir es ausdrücklich bemerkten [103], Zweifel darüber bestehen, wievielmal man jede Koinzidenz unter die durch das Korrespondenzprinzip angegebenen Lösungen mitzählen mußte. Um aber das Prinzip überall mit völliger Sicherheit anwenden zu können, muß man bestimmte Regeln für die Abzählung zusammenfallender Lösungen haben. Mittels einer schon in [100] genannten Konstruktion der $\alpha_1 + \alpha_2$ Koinzidenzpunkte zweier auf einer Geraden g liegender, durch eine (α_1, α_2)-Korrespondenz verbundener Punktreiben (P_1) und (P_2) kann man eine solche Regel aus der Regel für die Abzählung zusammenfallender Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve [10] herleiten.

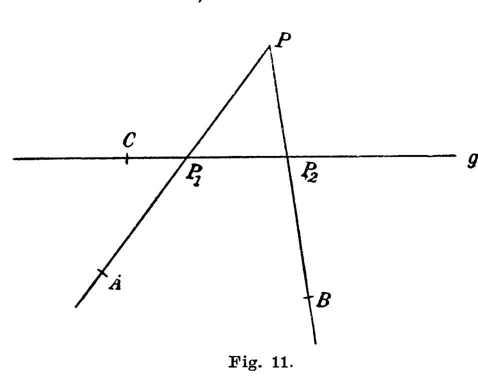


Fig. 11.

Indem (Fig. 11) A und B zwei feste Punkte einer durch g gehenden Ebene waren, bestimmten wir in [100] die Koinzidenzpunkte C als Schnittpunkte mit dem Ort der Schnittpunkte P der Geraden AP_1 und BP_2. Die Punkte A und B mögen so gewählt werden, daß AB nicht durch den zu untersuchenden Koinzidenzpunkt C geht. Wenn dann P_1 und P_2 sich diesem Punkt nähern, bleiben die Winkel des Dreiecks P_1P_2P endlich, die Seiten werden also unendlich klein von derselben Ordnung. Nun fanden wir, indem wir CP_1 als unendlich klein erster Ordnung betrachteten, die Anzahl der mit C zusammenfallenden Schnittpunkte der Hilfskurve mit g als die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken P_1P; die Punkte P werden je durch die P_1 entsprechenden Punkte P_2 bestimmt. Da P_1P und P_1P_2 von derselben Ordnung sind, erhält man daher die folgende Regel:

Wenn die Punkte P_1 und P_2 einer Geraden durch eine (α_1, α_2)-Korrespondenz verbunden sind, so läßt sich die Anzahl der in einem Punkt C der Geraden stattfindenden Koinzidenzen als die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Abstände P_1P_2 ausdrücken, wo P_1 ein in unendlich kleinem Abstand erster Ordnung von C gewählter Punkt der Reihe (P_1) ist, während für P_2 alle diesem Punkt entsprechenden Punkte der Reihe (P_2) einzusetzen sind. Man könnte natürlich auch CP_2 unendlich klein erster Ordnung setzen und die Summe der Ord-

nungen der zu dem Punkt P_2 gehörigen Abstände $P_2 P_1$ abzählen. Da birationale Änderungen die Ordnung unendlich kleiner Größen nicht ändern, läßt sich diese Regel sowohl auf entsprechende Büschel als auch auf Punktreihen oder Tangentenreihen rationaler Kurven unmittelbar übertragen.

Um die in [102]—[104] vorgenommenen Abzählungen sicherzustellen, muß man sie an dieser Regel prüfen. In den meisten Fällen ist damit gar keine Schwierigkeit verbunden; denn wegen der Allgemeinheit der Fragestellung durfte man voraussetzen, daß die betreffenden unendlich kleinen Größen von derselben Ordnung waren, und es genügte dann die Punkte P_2, die gleichzeitig mit P_1 — oder die Punkte P_1, die gleichzeitig mit P_2 — in den Punkt C fallen, abzuzählen. In solchen Fällen haben wir dies stillschweigend getan. Die so gewonnenen Resultate lassen sich zwar auch auf Grenzfälle anwenden, in welchen die unendlich kleinen Größen nicht von derselben Ordnung sind. In solchen fallen aber mehrere der gefundenen Lösungen zusammen: wieviel, das kann man eben mittels der Regel bestimmen. Dadurch kann man z. B. bei den in [103] gelösten Aufgaben den Einfluß etwa vorkommender Spitzen oder anderer singulärer Punkte der Kurve c finden.

In der in [103] behandelten vierten Art von Koinzidenzen begegneten uns jedoch auch unmittelbar unendlich kleine Größen verschiedener Ordnung. Wenn die Gerade AM_1M_2 (Fig. 10) mit AN zusammenfällt, werden zwei entsprechende Gerade AM_3 ebenfalls mit AN zusammenfallen. Bildet die erste Gerade aber mit AN einen unendlich kleinen Winkel erster Ordnung, so werden, wie wir sahen, die zwei entsprechenden Geraden AM_3 mit AM_1M_2 einen Winkel von der Ordnung $\frac{1}{2}$ bilden. Man bekommt also nur $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Koinzidenz. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Bemerkung, daß der Geraden AM_3 nur eine gleichzeitig mit AN zusammenfallende Gerade AM_1M_2 entspricht, und daß die Winkel NAM_3 und M_3AM_1 von derselben Ordnung sind.

[106] Koinzidierende Punktepaare in der Ebene. Die Anwendungen des Korrespondenzprinzips auf ebene Punktepaare haben sehr oft den Zweck, solche koinzidierende Punktepaare P_1P_2 zu finden, von denen P_1 auf einer Kurve von der Ordnung α_2, P_2 auf einer Kurve von der Ordnung α_1 liegt; dabei soll außerdem die Gerade P_1P_2, die wir l nennen werden, eine Kurve von der Klasse β berühren, und weiter das Punktepaar durch die Lage von P_1 oder von P_2 oder von l eindeutig bestimmt sein. Diese Eindeutigkeit kann man immer dadurch erreichen, daß man nötigenfalls die Orte der Punkte P_1 und P_2 und die Klasse der Einhüllenden der Geraden l als vielfach betrachtet; so wird z. B., wenn P_1 auf einer Kurve von der Ordnung n liegt und dann immer mit ν Punkten P_2 verbunden ist, $\alpha_2 = n \cdot \nu$, und wenn l eine Kurve von der Klasse n berührt und dann s Punktepaare enthält, $\beta = n' \cdot s$ zu setzen sein.

Um nun die Koinzidenzen der Punktepaare $P_1 P_2$ zu finden, verbindet man die entsprechenden Punkte P_1 und P_2 mit einem festen Punkt A. Zwischen den Geraden AP_1 und AP_2 hat man dann eine (α_1, α_2)-Korrespondenz. Ihre $\alpha_1 + \alpha_2$ Koinzidenzen erhält man, wenn entweder die Gerade $P_1 P_2$ durch A geht oder P_1 und P_2 zusammenfallen. Da ersteres mit β Geraden $P_1 P_2$ der Fall ist, so wird die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P_1 und P_2

$$\xi = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta.$$

Diese Formel umfaßt auch den bisher betrachteten Fall, in welchem die Gerade l festliegt; dann ist $\beta = 0$. Für $\alpha_1 = 0$ ist P_2 fest; dann gibt die Formel die Bestimmung [18] der Ordnung α_2 einer Kurve, die eine gegebene Multiplizität ξ in P_2 hat und eine Gerade durch P_2 in β anderen Punkten schneidet [18].

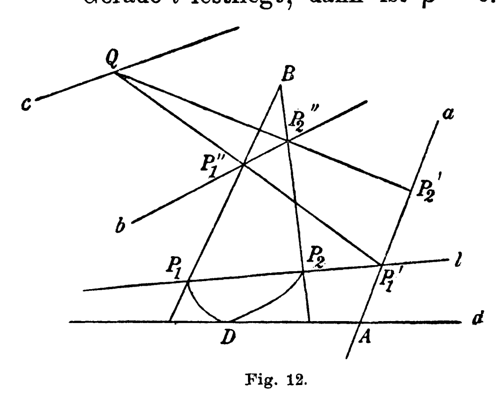


Fig. 12.

Wie viele dieser Koinzidenzen in einem Punkt D stattfinden, läßt sich durch die Regel in [105] entscheiden. Dabei darf man voraussetzen, daß der willkürlich gewählte Punkt A auf keiner der Grenzlagen der Geraden l, die in D zusammenfallende Punkte verbinden, liegt. Die Anwendung der zitierten Regel gestaltet sich dann folgendermaßen:

1. Sei p_1 eine Gerade, deren Abstand vom Punkt D unendlich klein erster Ordnung ist, und deren Grenzlage nicht ein in D koinzidierendes Punktepaar $P_1 P_2$ enthält, dann wird die Anzahl der in D koinzidierenden Punktepaare $P_1 P_2$ die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Abstände der auf p_1 liegenden Punkte P_1 von den entsprechenden Punkten P_2 sein.

Es kann aber auch nützlich sein, eine Regel zu besitzen, um abzuzählen, wievielmal eine Gerade d als Verbindungsgerade koinzidierender Punktepaare $P_1 P_2$ zu rechnen ist. Dies kann durch eine andere Anwendung des Korrespondenzprinzips erreicht werden. Es sei in Fig. 12 A der Schnittpunkt der Geraden d mit einer festen Geraden a, die so gewählt sein kann, daß d die einzige durch A gehende Gerade ist, die koinzidierende Punktepaare enthält. Auf dieser tragen wir eine unendlich kleine Strecke erster Ordnung AP_1' ab. Durch P_1' gehen β Gerade l, die Punktepaare $P_1 P_2$ enthalten. Diese projizieren wir von einem Punkt B aus auf eine Gerade b in die Punktepaare $P_1'' P_2''$. Vom Schnittpunkt Q der Geraden $P_1' P_1''$ mit einer Geraden c aus projizieren wir die Punkte P_2'' auf a in die Punkte P_2'. Man wird dann zwischen den Punkten $P_1' P_2'$ eine Korrespondenz haben, in welcher jedem Punkt P_1'

β Punkte P_2' entsprechen, und die gesuchte Anzahl wird die Anzahl der in den Punkt A fallenden Koinzidenzen dieser Korrespondenz sein. Weiter werden, wenn man nur besonders ungünstigen Lagen der willkürlich gewählten Linien und Punkte ausweicht, die Strecken $P_1 P_2$, $P_1'' P_2''$, $P_1' P_2'$ unendlich klein von derselben Ordnung.[1]) Da die gemachte Voraussetzung über die Lage von A wegfallen kann, wenn man nur bei der Abzählung von Geraden l durch P_1', die mit d einen endlichen Winkel bilden, absieht, so führt die in [105] gegebene Abzählungsregel im vorliegenden Fall zur folgenden Regel:

2. Sei P_1' ein Punkt, dessen Abstand von der Geraden d unendlich klein erster Ordnung ist[2]), dann ist die Anzahl der auf d koinzidierenden Punktepaare $P_1 P_2$ die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Strecken $P_1 P_2$, deren Verbindungslinien durch P_1' gehen und mit d unendlich kleine Winkel bilden.

[107] Koinzidierende Punktepaare im Raume. Was hier von Koinzidenzen von Punktepaaren in der Ebene gesagt ist, läßt sich unmittelbar auf Punktepaare $P_1 P_2$ im Raume übertragen. α_2 ist dann die Ordnung der Raumkurve, auf welcher P_1 liegt (ebenso vielmal gerechnet als jeder ihrer Punkte entsprechende Punkte P_2 hat), α_1 die (auf dieselbe Weise gerechnete) Ordnung des Ortes der Punkte P_2 und β ist die (ebenso gerechnete) Ordnung der von den Verbindungslinien l der Punktepaare erzeugten Regelfläche. Man findet dann die Anzahl $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta$ der Koinzidenzen durch Anwendung des Korrespondenzprinzips auf das Entsprechen der Ebenen, die eine Gerade a mit entsprechenden Punkten P_1 und P_2 verbinden. Die Anzahl der in einen Punkt D fallenden Koinzidenzen ist die Summe der Ordnungen der unendlich keinen Strecken $P_1 P_2$, deren Punkte P_1 in einer Ebene liegen, deren Abstand von D unendlich klein erster Ordnung ist und die endliche Winkel mit den Geraden d, auf welchen die Koinzidenzen stattfinden, bildet. Die Anzahl der Koinzidenzen, für welche die Verbindungslinie l die Grenzlage d hat, ist die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Abstände der Punkte P_1 und P_2, deren Verbindungslinien l unendlich wenig von d abweichen und eine Gerade schneiden, deren kürzester Abstand von d unendlich klein erster Ordnung ist, die aber mit ihr einen endlichen Winkel bildet.

Statt die hier und in [106] gegebenen Formulierungen festzuhalten, wird es jedoch oft bequemer sein, direkt auf die ursprüngliche

1) Man erinnere sich, daß wir, um uns so ausdrücken zu können, ohne jedesmal endliche Größen besonders berücksichtigen zu müssen, diese als unendlich klein von der Ordnung null betrachten [10].

2) P_1' darf jedoch nicht unendlich nahe an den Berührungspunkt der Geraden d mit der Umhüllungskurve der Geraden l gelegt werden.



Formulierung in [105] Bezug zu nehmen. Wir haben gezeigt, wie dies möglich ist. —

Was wir hier von Punktepaaren in der Ebene oder im Raume und ihren Verbindungslinien gesagt haben, läßt sich dualistisch auf Geradepaare in der Ebene und ihre Schnittpunkte oder auf Ebenenpaare und ihre Schnittlinien übertragen.

[108] *Bézouts* und *Plückers* Formeln. Um mit ganz einfachen Beispielen die Anwendungen der Regeln in [105]—[107] anzufangen, werden wir hier *Bézouts* Schnittpunktsatz [11] und *Plückers* Formeln [70] mittels des Korrespondenzprinzips herleiten.

Es seien zunächst zwei Kurven gegeben, c_1 von der Ordnung n_1 und c_2 von der Ordnung n_2. Eine willkürliche Gerade durch einen festen Punkt B schneidet c_1 in n_1 Punkten P_1, c_2 in n_2 Punkten P_2. Wir suchen die Anzahl der Koinzidenzen der Punktepaare $P_1 P_2$. c_1 wird dann n_2-mal als Ort der Punkte P_1 auftreten, c_2 n_1-mal als Ort der Punkte P_1 und jede Gerade durch B ist $n_1 n_2$-mal Verbindunglinie. Also ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = n_1 n_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta.$$

Die Anzahl der Koinzidenzen ist also $n_1 n_2$. Die Regel [106] 2 für die Abzählung der auf eine Gerade durch B fallenden Koinzidenzen zeigt erstens, daß die Gerade durch einen einfachen Schnittpunkt eine Koinzidenz enthält, und führt sodann unmittelbar auf die schon in [11] gegebene Regel für die Abzählung zusammenfallender Schnittpunkte. Dort wie hier war die entsprechende Regel für die Abzählung der Schnittpunkte einer Kurve mit einer Geraden [10] vorausgesetzt.

Ersetzt man hier die Kurven c_1 und c_2 durch eine einzige Kurve c von der Ordnung n, und sind die entsprechenden Punkte P_1 und P_2 verschiedene Schnittpunkte einer Geraden durch einen festen, nicht auf c liegenden Punkt B, so wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = n(n-1) = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta.$$

Die Regel [106] 2 zeigt, daß jede einfache Tangente durch B eine dieser Koinzidenzen ergibt. Auf einer Geraden durch B, die mit der Tangente einen unendlich kleinen Winkel erster Ordnung bildet, wird nämlich eine Sehne abgeschnitten von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Sie ist aber zweimal zu zählen, weil jeder ihrer Endpunkte als Punkt P_1 betrachtet werden kann. Übrigens führt die Anwendung derselben Regel unmittelbar zu der in [12] aufgestellten Regel für die Abzählung der mit einer bestimmten Geraden durch B zusammenfallenden oder durch singuläre Punkte absorbierten Tangenten.

Wir werden in den folgenden Untersuchungen nur *Plücker*sche Singularitäten berücksichtigen, und sie wie in [70] bezeichnen. n ist also die Ordnung, n' die Klasse, d, e, d', e' die Anzahlen der Doppel-

punkte, der Spitzen, der Doppeltangenten und der Wendetangenten. Das schon bewiesene Resultat wird also durch die Gleichung

$$(1) \qquad n(n-1) = n' + 2d + 3e$$

ausgedrückt und daran schließt sich die dualistisch entsprechende Gleichung

$$(2) \qquad n'(n'-1) = n + 2d + 3e.$$

Um noch eine weitere Gleichung, die wir früher mittels des Geschlechtsatzes abgeleitet haben, zu finden, betrachten wir solche Punktepaare, in welchen P_1 ein willkürlicher Punkt der Kurve ist, P_2 einer der $n-2$ Schnittpunkte der Tangente in P_1 mit der Kurve. Die Korrespondenz zwischen den Punktepaaren P_1 und P_2 wird dann durch die folgenden Zahlen ausgedrückt:

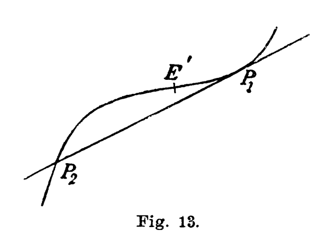


Fig. 13.

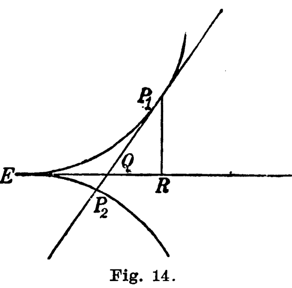


Fig. 14.

$$\alpha_1 = n(n-2), \qquad \alpha_2 = n(n'-2), \qquad \beta = n'(n-2).$$

Die Anzahl der Koinzidenzen ist also (1)

$$n^2 - 4n + 2n' = 3n(n-2) - 4d - 6e.$$

Zur Abzählung der verschiedenen, hierin inbegriffenen Koinzidenzen benutzt man am besten die mit der Hauptregel in [105] identischen Regeln [106]. Koinzidenzen finden in folgenden Punkten statt:

1. In den e' Wendepunkten E'. Befindet sich (Fig. 13) P_1 in einem unendlich kleinen Abstand $E'P_1$ erster Ordnung von einem Wendepunkt (also auch auf einer Geraden, die mit der Wendetangente einen endlichen Winkel bildet und einen unendlich kleinen Abstand erster Ordnung von E' hat), so wird auch eine Strecke P_1P_2 unendlich klein erster Ordnung. Dies sieht man leicht aus der analytischen Darstellung; man könnte es aber auch aus der Bemerkung schließen, daß es nur einen solchen Punkt P_2 gibt, die Ordnung also kein Bruch sein kann, und daß für eine reelle Figur $P_1P_2 > P_1E'$ ist, die Ordnung also nicht > 1 sein kann. e' ist daher unter die gefundenen Koinzidenzen nur einmal zu zählen.

2. In den d Doppelpunkten. Man sieht ohne Schwierigkeit (vgl. die Betrachtungen unter 3.), daß diese zweimal zu zählen sind.

3. In den e Spitzen. Eine (nicht mit der Tangente zusammenfallende) Gerade, die einen unendlich kleinen Abstand erster Ordnung von einer Spitze E hat, schneidet die Kurve in zwei Punkten P_1, deren Abstand (Fig. 14) EP_1 auch unendlich klein erster Ordnung wird, und

die Tangenten in diesen Punkten haben je einen solchen Schnittpunkt P_2, daß auch $P_1 P_2$ von derselben Ordnung ist. Stellen wir nämlich das Kurvenelement durch

$$y = A x^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

dar, so wird die Subtangente $QR = \frac{2}{3} x + \cdots$, also auch erster Ordnung, ebenso QP_1 und ebenso die Strecke $P_2 P_1$, da sie (für einen reellen Kurvenzug) größer als QP_1 und kleiner als ER ist. Auch e ist also zweimal zu zählen. Man findet somit

$$(3) \qquad 3n(n-2) = e' + 6d + 8e.$$

Alle andern Relationen unter den sechs genannten Zahlen lassen sich aus (1), (2), (3) herleiten. Um aber noch ein weiteres Beispiel zu liefern, betrachten wir noch die Paare P_1 und P_2, die von den $n-2$ Schnittpunkten einer beliebigen Tangente gebildet werden. Für solche ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n(n'-2)(n-3), \qquad \beta = n'(n-2)(n-3).$$

Die Abzählung der Koinzidenzen, die davon herrühren, daß die Tangente die Kurve nochmals berührt oder durch einen Doppelpunkt oder eine Spitze geht, geschieht ganz wie vorher, da man die n Schnittpunkte der durch einen festen Punkt gehenden Geraden betrachtete. Nur gibt jetzt jede Doppeltangente zweimal zu einer Koinzidenz Anlaß. Man findet also

$$(n-3)(n'(n+2) - 4n) = 2d' + 2d(n'-4) + 3e(n'-3).$$

[109] Schnittpunkte dreier Flächen, die alle durch eine Kurve gehen. Beispiele der Bestimmung von koinzidierenden Punktepaaren oder Ebenenpaaren im Raum liefert uns die Bestimmung der isolierten Schnittpunkte dreier Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, auf denen eine Kurve c von der Ordnung n und dem Range n' beziehungsweise eine ν_1-fache, eine ν_2-fache oder eine ν_3-fache Kurve ist. Wir bemerken erstens, daß man durch einen beliebigen Punkt A $n(m-\nu)$ Gerade ziehen kann, die eine Fläche φ mit der ν-fachen Kurve c in $\nu + 1$ auf c zusammenfallenden Punkten schneiden. Dies folgt schon daraus, daß diese Punkte in die Schnittpunkte von c mit der ν^{ten} Polare des Punktes A in Beziehung auf φ fallen müssen; diese Polare ist nämlich von der Ordnung $m - \nu$ [19]. Dasselbe läßt sich aber auch durch Abzählung der Koinzidenzen eines Punktes P_1 der Kurve c mit einem der $m-\nu$ anderen Schnittpunkte P_2 der Geraden AP_1 mit φ beweisen. Der Ort des Punktes P_2 ist nämlich, was man durch Abzählung der Schnittpunkte mit einer durch A gehenden Ebene sieht, von der Ordnung $n(m-\nu)$. Für das genannte Punktepaar ist also

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = n(m-\nu) = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta.$$

Die hier gefundenen $n(m-\nu)$ Punkte von c sind die Berührungspunkte der durch A gehenden Ebenen, die φ in einem Punkt von c be-

rühren; sie können zur Abzählung der s_{12} Punkte der Kurve c, in welchen die Flächen φ_1 und φ_2 sich berühren, benutzt werden. Betrachten wir nämlich das von den Tangentialebenen π_1 und π_2 an φ_1 und φ_2 in einem Punkte von c gebildete Paar, so wird für dieses

$$\alpha_1' = n(m_2 - \nu_2)\nu_1, \quad \alpha_2' = n(m_1 - \nu_1)\nu_2,$$

und da n' Tangenten von c eine willkürliche Gerade schneiden, so ist

$$\beta' = n'\nu_1\nu_2,$$

also ist die Anzahl der Koinzidenzen solcher Ebenenpaare

$$s_{12} = n(m_1\nu_2 + m_2\nu_1) - (n' + 2n)\nu_1\nu_2.$$

Die Schnittkurve der Flächen φ_1 und φ_2 besteht aus c, $\nu_1\nu_2$-mal gezählt, und einer Restkurve c_{12} von der Ordnung $m_1m_2 - \nu_1\nu_2 n$. Diese schneidet c in den gefundenen s_{12} Punkten und wird mit φ_3 $\nu_3 s_{12}$ in diese Punkte fallende Schnittpunkte haben. Ihre übrigen Schnittpunkte mit φ_3 sind die s nicht auf c fallenden Schnittpunkte der drei Flächen φ_1, φ_2 und φ_3. Diese Anzahl ist also

$$s = m_1m_2m_3 - n(m_1\nu_2\nu_3 + m_2\nu_3\nu_1 + m_3\nu_1\nu_2) + (n' + 2n)\nu_1\nu_2\nu_3.$$

[110] Dreifache Punkte einer abwickelbaren oder windschiefen Regelfläche. Ein anderes Beispiel gewährt uns die in [86] zurückgestellte Bestimmung der dreifachen Punkte einer abwickelbaren Fläche. Wir werden dabei dieselben Benennungen, wie in [86], benutzen, nämlich n für die Ordnung ihrer Rückkehrkurve, n' für ihre eigene Ordnung (Rang der Rückkehrkurve), x für die Ordnung ihrer Doppelkurve. Durch v bezeichnen wir auch hier die Anzahl der Erzeugenden, die die Rückkehrkurve schneiden, und durch v'' die Anzahl der Tangentialebenen der Fläche, die nicht nur Schmiegungsebenen der Rückkehrkurve sind, sondern sie auch in anderen Punkten berühren. Wir nehmen weiter an, daß die Rückkehrkurve e Spitzen, e' Wendetangenten und e'' stationäre Schmiegungsebenen hat.

Wir betrachten das Paar, das von zwei Schnittpunkten P_1 und P_2 einer Erzeugenden der Fläche mit ihrer Doppelkurve gebildet wird. Für diese Punkte hat man

$$\alpha_1 = 2x(n' - 5) = \alpha_2, \quad \beta = n'(n' - 4)(n' - 5).$$

Die $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta$ Koinzidenzen finden statt in den t dreifachen Punkten, in den v Schnittpunkten der Rückkehrkurve mit Erzeugenden, in den $e'(n' - 6)$ Schnittpunkten der Wendetangenten mit anderen Erzeugenden, in den v'' Berührungspunkten der Fläche mit Erzeugenden und in den Wendepunkten der Rückkehrkurve. Man findet dann unter Berücksichtigung der Multiplizitäten dieser Lösungen

$$(n' - 5)(4x - n'(n' - 4)) = 6t + 3v + 3e'(n' - 6) + v'' + 2e'.$$

Die zu benutzenden unendlich kleinen Werte von P_1P_2 werden nämlich



erster Ordnung sein mit Ausnahme der Fälle, in denen diese Punkte in den genannten v und $e'(n'-6)$ Punkten zusammenfallen. Hier werden die unendlich kleinen Strecken (da auch die Wendetangenten Rückkehrkanten der Fläche sind) von der Ordnung $\frac{3}{2}$ sein, ganz wie die Abstände $P_1 P_2$ der Punkte, die bei der Herleitung der ersten *Plücker*schen Formel [108] (1) in Spitzen zusammenfallen. Bei den Abzählungen werden übrigens die in [86] genannten Eigenschaften der e' Wendepunkte benutzt.

Durch das Dualitätsprinzip findet man die Anzahl der dreifachen Tangentialebenen einer Raumkurve.

Ganz ebenso bestimmt man die dreifachen Punkte einer windschiefen Regelfläche [87] von der Ordnung und Klasse m, von dem Range m', dem Geschlechte p, deren Doppelkurve von der Ordnung b und dem Geschlechte π ist; wir bezeichnen noch, wie in [87] (4), mit η_1 die Anzahl der Erzeugenden, die die Doppelkurve berühren. Wir benutzen dabei das Entsprechen zweier Schnittpunkte P_1 und P_2 einer Erzeugenden mit der Doppelkurve. Dann findet man

$$\alpha_1 = 2b(m-3) = \alpha_2, \quad \beta = m(m-2)(m-3),$$

und da jeder Berührungspunkt einer Erzeugenden mit der Doppelkurve eine, jeder der t dreifachen Punkte 6 Koinzidenzen ergibt,

$$6t + \eta_1 = (m-3)(4b - m(m-2)).$$

[111] Über die Anwendung des Korrespondenzsatzes zur Abzählung der Singularitäten einer Kurve oder Fläche. Die Bestimmung in [110] ist nur ein einzelnes Beispiel aus der großen Zahl der eine Raumkurve und die zu ihr gehörige abwickelbare Fläche betreffenden Bestimmungen, die man mittels des hier dargelegten einfachen Korrespondenzprinzips ausführen kann. Durch dieses hätte man auch solche in [84]—[86] vorkommende Formeln, die nicht unmittelbar das Geschlecht enthalten, beweisen können. Durch fortgesetzte Anwendung des Prinzips kann man ein weiteres System von Formeln aufstellen, die zwar je für sich mehrere neue Anzahlen enthalten, in ihrer Gesamtheit aber zur Bestimmung eben dieser dienen werden. Dabei kann uns jedoch die Schwierigkeit begegnen, daß die Zahl, die wir β genannt haben, selbst unbekannt ist, oder daß die so erhaltenen Gleichungen nicht zur Bestimmung aller durch sie eingeführten unbekannten Zahlen genügen. Neben dem Geschlechtsatz wird sich dann auch die im folgenden Abschnitt enthaltene Erweiterung des Korrespondenzprinzips auf Punkte solcher Kurven, die nicht vom Geschlecht $p = 0$ sind, als nützlich erweisen. Überzählige Gleichungen werden Bestimmungen von Koeffizienten durch Infinitesimalbetrachtungen ersetzen können (vgl. [62] und [114].)

Was eine Fläche betrifft, so läßt sich das Korrespondenzprinzip anwenden, um Gerade zu bestimmen, von denen eine oder mehrere Grup-

pen von Schnittpunkten mit einer algebraischen Fläche zusammenfallen. Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht in Übereinstimmung mit der Auflösung der entsprechenden Aufgaben für eine ebene Kurve; namentlich erhält man ganz übereinstimmende Abzählungen zusammenfallender Lösungen. Die Bestimmungen müssen aber sukzessiv ausgeführt werden. Zuerst findet man die Geraden, von denen zwei Schnittpunkte koinzidieren, die also die Fläche berühren oder mehrfache Kurven schneiden, sodann unter den Tangenten diejenigen, von denen entweder noch ein weiterer Schnittpunkt mit dem Berührungspunkt oder zwei Schnittpunkte unter sich koinzidieren usw., bis man zu den vierfachen Tangenten und den anderen Tangenten gelangt, die vier Berührungsbedingungen unterworfen sind. Da die *Schubert*sche Zeichensprache später einen besseren Überblick über diese sukzessive Einführung der verschiedenen Bedingungen geben wird, werden wir unsere Beispiele für die eben genannten Bestimmungen aufschieben, bis uns diese Zeichensprache zu Gebote steht. (Vgl. übrigens den Schluß von [112].)

[112] Zahlen, die ein ∞^1-faches System von ebenen Kurven charakterisieren. Um gleich hier ein Beispiel für die Anwendung des Korrespondenzsatzes zur Bildung eines ganzen Systems von Gleichungen zu geben, die verschiedene, unter sich abhängige Anzahlen miteinander verbinden, werden wir ein System von ∞^1 ebenen Kurven genauer untersuchen. Um das Beispiel, das uns hier die Methode erklären und die Mittel zu ihrer Einübung an die Hand geben soll[1]), nicht zu weitläufig zu gestalten, begrenzen wir die Untersuchung durch die Voraussetzung, daß die Kurven des Systems im allgemeinen Kurven n^{ter} Ordnung[2]) ohne mehrfache Punkte seien, so daß nur einzelne dieser Kurven einen Doppelpunkt bekommen. Diese Voraussetzung stimmt übrigens mit der allgemeinen Darstellung durch Punktkoordinaten überein und enthält also, wenn man diese festhält, keine Einschränkung. Nach den *Plücker*schen Formeln ist die Klasse n' der Kurven dann $n(n-1)$, die Anzahl d' ihrer Doppeltangenten $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$, die Anzahl e' ihrer Wendetangenten $3n(n-2)$. Wir nennen weiter die Charakteristiken der Systeme ([17] Note] μ und μ', die Klasse der Einhüllenden der Doppel-

1) Wir wählen übrigens dieselben Benennungen, wie in einer Abhandlung (Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver. K. danske Vidensk Selsk. Skrifter, naturv. math. Afd., 5 Räkke, 10 Bd., IV. Kjøbenhavn 1873; avec un résumé en français), wo mehr detaillierte Voraussetzungen gemacht werden, die (wie die *Plücker*schen Gleichungen) auch auf die Darstellung der Kurven durch Linienkoordinaten Bezug nehmen. Die auch hier beibehaltenen Striche in einigen der Benennungen beziehen sich auf die in der genannten Abhandlung berücksichtigte Dualität.

2) Diese Ordnung wird überall hinreichend hoch vorausgesetzt, so daß sie die hier vorausgesetzte allgemeinste Gestalt der auftretenden Singularitäten gestattet. Das mit der Bildung eines Doppelpunkts zusammenhängende Zusammenfallen von Wendetangenten tritt z. B. nur für $n > 3$ ein.

tangenten und Wendetangenten b' und c', die Ordnungen der Örter der Berührungspunkte dieser Tangenten beziehungsweise p' und q', die Ordnungen der Örter der Schnittpunkte derselben Tangenten mit den Kurven u' und v', die Ordnung des Ortes der Schnittpunkte zweier Doppeltangenten, einer Doppeltangente und einer Wendetangente oder zweier Wendetangenten beziehungsweise x', y', z'.

Wir bezeichnen weiter mit α die Anzahl der Kurven des Systems, die einen Doppelpunkt besitzen, mit $(3d')$ die Anzahl der Kurven, die eine dreifache Tangente, mit $(2d'e')$ die Anzahl derer, die eine Wendetangente besitzen, die die Kurve noch einmal berührt, und mit $(d'2e')$ die Anzahl derer, die eine Doppeltangente mit zusammenfallenden Berührungspunkten besitzen. Letztere drei Arten von Tangenten sind beziehungsweise dreimal als Doppeltangenten, zweimal als Doppeltangenten und einmal als Wendetangenten, einmal als Doppeltangenten und zweimal als Wendetangenten zu zählen [71]. Bei den folgenden Anwendungen des Korrespondenzprinzips werden die meisten Koeffizienten leicht zu bestimmen sein; nur die Bestimmungen der Koeffizienten K der Glieder $K\alpha$ werden wir in [114] näher begründen.

Wendet man fürs erste das Korrespondenzprinzip auf zwei Schnittpunkte P_1 und P_2 einer Kurve des Systems mit einer beliebigen Geraden an, so hat man

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \mu(n-1)$$

und findet

$$2\mu(n-1) = \mu'. \tag{1}$$

Die Korrespondenz zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden Tangenten einer Kurve des Systems ist durch die Zahlen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \mu'(n'-1)$$

charakterisiert, und man erhält durch Betrachtung der verschiedenen möglichen Arten von Koinzidenzen

$$2\mu'(n'-1) = \mu + 2b' + 3c' + \alpha. \tag{2}$$

Daß man nicht auch bei dem vorhergehenden, dem letzteren dualistisch entsprechenden Verfahren entsprechende Glieder in (1) fand, rührt von unseren nicht dualistischen Voraussetzungen über das System her. Die Bestimmung der Koeffizienten wird durch die Regel in [105] ausgeführt.[1])

Es sei sodann P_1 der Schnittpunkt einer Kurve des Systems, P_2 der Schnittpunkt einer ihrer Doppeltangenten mit einer festen Geraden; dann finden wir

$$\alpha_1 = b'n, \quad \alpha_2 = \mu d'$$

1) Da gewöhnlich die punktgeometrischen Eigenschaften mehr bekannt sind, als die tangentengeometrischen, fällt es wohl den meisten leichter, z. B. den Koeffizient 3 des Gliedes $3c'$, als den Koeffizient des Gliedes $3c$ zu finden, das man in die Gleichung (1) einführen müßte, wenn die Kurven des Systems alle Spitzen hätten und der Ort dieser Punkte von der Ordnung c wäre.



und damit

(3) $$b'n + \mu d' = 2p' + u'.$$

Ersetzt man hier die Doppeltangente durch eine Wendetangente, so findet man

(4) $$c'n + \mu e' = 3q' + v'.$$

Sind P_1 und P_2 die Schnittpunkte einer festen Geraden mit zwei Doppeltangenten derselben Kurve, so wird man

$$\alpha_1 = \alpha_2 = b'(d' - 1)$$

haben. Diese unmittelbare Anwendung des Korrespondenzprinzips fällt übrigens ganz mit der Untersuchung von Geradenpaaren zusammen, die dualistisch der Behandlung von Punktepaaren in [106] entspricht (s. die Schlußbemerkung in [107].) Dann hat man

$$\alpha_1' = \alpha_2' = b'(d' - 1), \quad \beta' = 2x'.$$

Unter Beachtung der verschiedenen Arten von Koinzidenzen, die möglich sind, findet man sodann

(5) $$2b'(d' - 1) - 2x' = 6(3d') + 3(2d'e') + (n' - 6)\alpha.$$

Ebenso findet man durch Abzählung der Koinzidenzen einer Doppeltangente und einer Wendetangente oder zweier Wendetangenten:

(6) $$b'e' + c'd' - y' = 2(2d'e') + 3(d'2e'),$$

und

(7) $$2c'(e' - 1) - 2z' = 3(d'2e') + 4\alpha.$$

Es sei weiter P_1 der Berührungspunkt einer von einem festen Punkt B ausgehenden Tangente an eine Kurve des Systems, P_2 einer der $(n-2)$ Schnittpunkte derselben Tangente mit derselben Kurve. Da der Ort der Berührungspunkte der durch B gehenden Tangenten in B einen μ-fachen Punkt hat und eine Gerade durch B in μ' anderen Punkten schneidet, so ist er von der Ordnung $\mu + \mu'$. Ganz auf dieselbe Weise findet man, daß die Ordnung des Ortes der Schnittpunkte (P_2) $\mu(n' - 2) + \mu'(n - 2)$ ist. Beides ließe sich auch durch das Korrespondenzprinzip beweisen. Man findet also für das Punktepaar $P_1 P_2$ [106]

$$\alpha_1 = \mu(n' - 2) + \mu'(n - 2), \quad \alpha_2 = (\mu + \mu')(n - 2), \quad \beta = \mu'(n - 2).$$

Da die $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta$ Koinzidenzen nur für die durch B gehenden Wendetangenten stattfinden, ist

(8) $$\mu'(n - 2) + \mu(n + n' - 4) = c'.$$

Durch das dualistisch entsprechende Verfahren findet man, da unsere Voraussetzungen über das System andersartige Koinzidenzen ergeben,

(9) $$\mu(n' - 2) + \mu'(n + n' - 4) = p' + 2q'.$$

Auf dieselbe Weise, wie letztere Gleichung, findet man die Koinzidenzen zweier anderen sich auf einer festen Geraden schneidenden Geraden, nämlich (10) die einer Doppeltangente und einer einfachen Tangente, und (11) die einer Wendetangente und einer einfachen Tangente:

$$(10)\quad b'(n'-2)+\mu'd'=p'+3(3d')+3(2d'e')+2(d'2e')+\alpha(n'-6),$$

$$(11)\quad c'(n'-2)+\mu'e'=2q'+(2d'e')+4(d'2e')+4\alpha.$$

Das zur Herleitung von (8) angewandte Verfahren kann auch benutzt werden, um die durch einen Punkt B gehenden Tangenten zu finden, die dieselbe Kurve nochmals in zusammenfallenden Punkten schneiden. Man findet

$$(12)\quad [\mu'(n-2)+2\mu(n'-2)](n-3)=2b'.$$

Das dualistisch entsprechende Verfahren ergibt

$$(13)\quad [\mu(n'-2)+2\mu'(n-2)](n'-3)=2u'+3v'+\alpha n.$$

Durch das letztere Verfahren findet man weiter die Anzahlen von Koinzidenzen zweier Tangenten, die eine Gerade b in demselben Punkt wie eine Doppeltangente (14) oder eine Wendetangente (15) schneiden:

$$(14)\quad [b'(n'-2)+2\mu'd'](n'-3)=u'+4x'+3y'+\alpha[d'-2(n'-6)],$$

$$(15)\quad [c'(n'-2)+2\mu'e'](n'-3)=v'+2y'+6z'+\alpha(e'-6).$$

Unter den hier gefundenen 15 Gleichungen läßt sich eine algebraisch aus den anderen herleiten. Auch andere Gleichungen, die aus den hier gefundenen folgen, kann man durch den Korrespondenzsatz direkt herleiten. Man findet z. B. durch Abzählung der Koinzidenzen der Berührungspunkte einer Doppeltangente

$$(16)\quad 2p'-2b'=(d'2e').$$

Eine andere Gleichung findet man dadurch, daß man zwei Ausdrücke für die Ordnung des Ortes der Punkte gleichsetzt, in welchen die Kurven von solchen Tangenten geschnitten werden, deren Berührungspunkte auf einer Geraden b liegen. Den einen Ausdruck findet man durch Anwendung des Korrespondenzprinzips auf die Abzählung der Schnittpunkte des Ortes mit einer beliebigen Geraden, den anderen durch unmittelbare Abzählung der Schnittpunkte mit der festen Geraden b. Man findet dadurch und durch das dualistisch entsprechende Verfahren

$$\mu n+(\mu+\mu')n-2\mu=q'+\mu'(n-2)$$

oder

$$(17)\quad 2\mu(n-1)+2\mu'=q'$$

und

$$(18)\quad 2\mu'(n'-1)+2\mu=2b'+2c'+2\alpha.$$

Die Bildung dieser algebraisch überflüssigen Gleichungen ist hier zur weiteren Übung geschehen. Man kann sie aber auch zur indirekten

Bestimmung [62] solcher Koeffizienten in den Gleichungen benutzen, deren direkte Bestimmung durch infinitesimale Betrachtungen schwieriger sein würde. Ein Beispiel dafür werden wir in [114] antreffen.

Aus den hier aufgestellten Gleichungen leitet man die folgenden Ausdrücke ab:

$$
\begin{aligned}
\mu' &= 2(n-1)\mu, \\
b' &= 2n(n-2)(n-3)\mu, \\
c' &= 3n(n-2)\mu, \\
\alpha &= 3(n-1)^2\mu, \\
p' &= (n-3)(2n^2+5n-6)\mu, \\
q' &= 6(n-1)\mu, \\
u' &= \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(5n^2+5n-6)\mu, \\
v' &= 3(n-3)(n^2+2n-2)\mu, \\
x' &= \tfrac{1}{2}(n-3)(2n^6-8n^5-16n^4+96n^3-40n^2-199n+90)\mu, \\
y' &= \tfrac{3}{2}(n-3)(n^5+3n^4-28n^3+20n^2+76n-40)\mu, \\
z' &= 3(3n^4-12n^3+39n-20)\mu, \\
(3d') &= (n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)\mu, \\
(2d'e') &= 3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)\mu, \\
(d'2e') &= 6(n-3)(3n-2)\mu.
\end{aligned}
$$

Dadurch, daß wir hier punktallgemeine Voraussetzungen aufgestellt haben, haben wir erreicht, daß die Formeln auf alle Spezialfälle, in denen die Anzahl der Lösungen nicht unendlich wird, anwendbar sind. Dann muß man aber die Lösungen, die man als uneigentlich ausschließen will, aufsuchen und ihnen die richtigen Multiplizitäten beilegen. Da kann es nun oft leichter sein, die bereits im allgemeinen Falle benutzten Methoden direkt auf solche Spezialfälle anzuwenden, um mit ihnen die eigentlichen Lösungen allein abzuzählen.

Ein wichtiger Spezialfall ist der, in dem das System aus den Projektionen der Kurven, in denen die Ebenen eines Büschels eine Fläche n^{ter} Ordnung schneiden, gebildet wird. Dann ist $\mu = n$ und die Kurven gehen alle durch n feste Punkte einer Geraden, die als n-fache Gerade selbst eine Kurve des Systems sein wird. Betrachtet man diesen Fall als Grenzfall, so wird es geschehen, daß bei dem Grenzübergang gewisse Teile der gefundenen Anzahlen absorbiert werden. Die übrig bleibenden Zahlen werden aber ohne Schwierigkeit durch die für den allgemeinen Fall vorgeschriebenen Anwendungen des Korrespondenzprinzips zu bestimmen sein; denn die unendlich kleinen Größen, die zur Abzählung

der von der n-fachen Geraden herrührenden Koinzidenzen dienen, werden hier alle von derselben Ordnung sein. Die übrig bleibenden Werte von α, $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$ werden beziehungsweise die Klasse der Fläche und die Ordnungen der Regelflächen sein, die durch dreifache Tangenten, durch Tangenten mit einer Berührung erster und einer zweiter Ordnung oder durch Doppeltangenten mit zusammenfallenden Berührungspunkten erzeugt werden (vgl. Schluß von [111]).

[113] Besondere Regel für die Abzählung der Koinzidenzen involutorisch zusammenfallender Punkte. Es ist oft der Fall, daß die einander entsprechenden Punkte P_1, P_2 einer Geraden einer einem variablen Parameter k entsprechenden Gruppe angehören. Stellt man hier k als Abszisse eines Punktes Q einer Geraden dar, so findet zwischen den Punkten P und Q ein Entsprechen von der in [65] untersuchten Beschaffenheit statt. Man fand damals einen Ausdruck (11) für die Differenz der Koinzidenzen der Punkte P unter sich und der Punkte Q unter sich. Was uns aber hier besonders interessiert, ist, daß wenn gleichzeitig β Punkte P in einem Punkt D und γ entsprechende Punkte Q in einem Punkt E zusammenfallen, nach [65] (10) die Differenz der Anzahlen der Koinzidenzen der Punkte P in D und der Koinzidenzen der Punkte Q in E gleich $\beta - \gamma$ ist. Kennt man also die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte Q in E oder die Anzahl der Koinzidenzen der Parameterwerte, die einem sich D nähernden Punkt P entsprechen, so braucht man dazu nur $\beta - \gamma$ zu addieren, um die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P zu finden, die im Punkte D stattfinden.

Hiervon kann man besonders Gebrauch machen, wenn $\gamma = 1$ ist, oder wenn der Parameter, für dessen Grenzwert β Punkte P in einem Punkt D zusammenfallen, durch einen sich D nähernden Punkt P eindeutig bestimmt ist. Ein solches Zusammenfallen werden wir involutorisch nennen (weil eine ganze Reihe von vollständigen Gruppen in Involution sind, wenn der einer Gruppe entsprechende Parameter durch einen Punkt der Gruppe eindeutig bestimmt wird, [98] Schluß). Wir sehen also, daß ein involutorisches Zusammenfallen von β Punkten einer Gruppe für $\beta - 1$ Koinzidenzen zweier Punkte der Gruppen zu zählen ist.

Dasselbe wird auch durch die analytische Abhängigkeit zwischen den vom Koinzidenzpunkt D aus gerechneten Abszissen $DP = x$ und dem Parameter k ausgedrückt. Bestimmen wir letzteren so, daß der Wert $k = 0$ der koinzidierenden Gruppe von Punkten entspricht, so wird diese für hinreichend kleine Werte von x und k durch die folgende Reihenentwicklung für k nach Potenzen von x mit ganzen und steigenden Exponenten ausgedrückt:

$$k = Ax^{\beta} + \cdots \tag{1}$$

Schon hieraus ersieht man, daß sowohl die unendlich kleinen Werte

von x, als auch ihre Differenzen mit $k^{\frac{1}{\beta}}$ proportional sind. Die Abszisse $DP_1 = x$ eines der Punkte einer Gruppe und die Abstände $P_1 P_2$ von ihren übrigen $\beta - 1$ Punkten sind also von derselben Ordnung. Die Regel in [105] gibt somit $\beta - 1$ zusammenfallende Koinzidenzen.

Diese Regel läßt sich auch z. B. auf ein involutorisches Zusammenfallen von Strahlen eines Büschels übertragen und dadurch (s. [106]) auch auf das involutorische Zusammenfallen von Punkten in der Ebene oder im Raume, z. B. von solchen, die auf Strahlen eines Büschels liegen.

[114] Anwendung zur Bestimmung der infinitesimalen Verhältnisse der konsekutiven Kurven der α Kurven eines ∞^1-fachen Systems, die einen neuen Doppelpunkt bekommen haben. — Wir können die in [113] bewiesenen Regeln zur Bestimmung der in [112] schon im voraus angegebenen Koeffizienten solcher Glieder, die α enthalten, anwenden. Dabei werden wir uns jedoch vorläufig auf die Untersuchung eines Büschels (also auf den Fall $\mu = 1$) beschränken, indem wir den Parameter k so wählen, daß er für die zu untersuchende Kurve, hier eine Grenzkurve mit dem Doppelpunkt D, null wird. Man sieht sogleich, daß eine Kurve des Büschels, die eine Gerade a in β zusammenfallenden Punkten schneidet, die nur nicht mit einem festen Punkt des Büschels zusammenfallen[1]), für $\beta - 1$ der durch [112] (1) bestimmten $2(n-1)$ Kurven zu zählen ist. Die unendlich kleinen Abstände des Berührungspunktes von β Schnittpunkten mit einer Nachbarkurve werden mit $k^{\frac{1}{\beta}}$ proportional sein. Geht z. B. a durch einen der α Doppelpunkte der Kurven des Büschels, so wird die diese enthaltende Kurve im allgemeinen einmal unter die $2(n-1)$ Kurven zu zählen sein, zweimal aber, wenn a den einen Zweig im Doppelpunkt berührt.

Die beiden Seiten der Formel [112] (2) geben die Anzahl der Koinzidenzen zweier Tangenten an eine Kurve des Büschels, die durch einen beliebigen Punkt A gehen. Unter den Kurven des Büschels, welche eine durch A gehende Gerade, die sich der Verbindungslinie AD des Punktes A mit einem der α Doppelpunkte D nähert, berühren, wird, wie wir eben sahen, nur eine sich der Kurve $k = 0$ nähern. Das Zusammenfallen zweier Tangenten an die einen Doppelpunkt besitzende Kurve $k = 0$ ist also involutorisch und gibt nur eine Koinzidenz. Daher hat in [112] (2) α den Koeffizient 1.

Wählt man (Fig. 15) A auf der Tangente d an einen der Zweige des Doppelpunkts, so fallen drei durch A gehende Tangenten derselben Kurve des Systems in d zusammen. d berührt aber, wie wir eben sahen, zwei zusammenfallende Kurven des Systems, ein d benachbarter Strahl des Büschels (A) also zwei benachbarte Kurven des Kurvenbüschels. Gleichzeitig fallen daher drei Tangenten l und zwei ihnen entsprechende

1) Über diesen Ausnahmefall können wir auf [15] verweisen.

Parameter k des Kurvenbüschels zusammen. Für dieses gleichzeitig eintretende Zusammenfallen haben wir mit den Bezeichnungen von [113] $\beta = 3$, $\gamma = 2$. Die Anzahl der Koinzidenzen der Tangenten l ist also um $\beta - \gamma = 1$ größer als die der Koinzidenzen der Werte von k. Um letztere zu bestimmen, bemerken wir, daß, wenn l sich der Geraden d nähert, ein involutorisches Zusammenfallen der zwei Berührungspunkte dieser Geraden mit Kurven des Büsches stattfinden wird, was eine Koinzidenz dieser Berührungspunkte ergibt; der Ort der Berührungspunkte hat also eine einfache Berührung mit d in D. Den durch kleine Werte von k bestimmten Kurven entsprechen aber je drei sich d nähernde Tangenten l. Die Anzahl der Koinzidenzen der derselben Geraden l entsprechenden Werte von k wird daher drei, und die der Geraden l, die demselben Werte k entsprechen, vier sein, oder $1 + 3$. Da nun in der Formel [112] (2) α und c' die Koeffizienten 1 und 3 haben, so drückt diese für den betrachteten Spezialfall geltende Abzählung aus, daß d sowohl durch den neuen Doppelpunkt geht, als auch einfache Tangente der Umhüllungskurve der Wendetangenten ist.

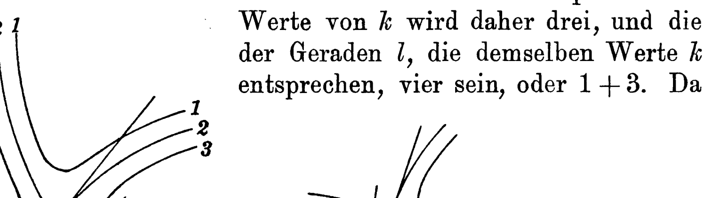
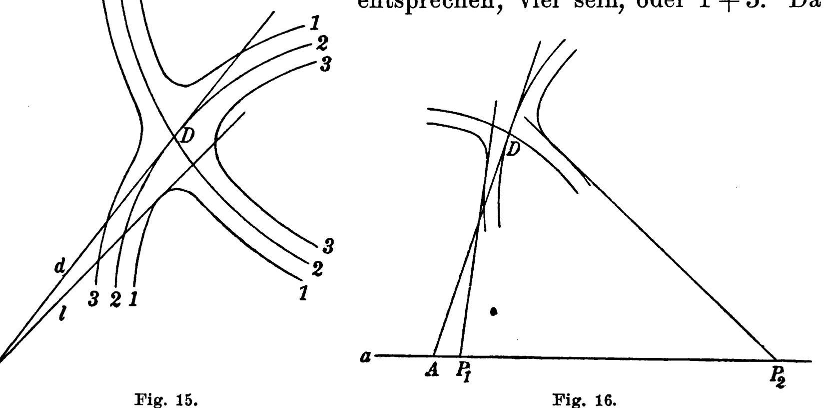



Fig. 15. Fig. 16.

Letzterer Umstand wird bei der Bestimmung des Koeffizienten des α enthaltenden Gliedes in der Gleichung [112] (7) benutzt. Bei der Herleitung dieser Gleichung zieht man (Fig. 16) durch einen Punkt P_1 einer Geraden a die c' Wendetangenten an Kurven des Systems; P_2 sind die Schnittpunkte der anderen $e' - 1$ Wendetangenten derselben Kurve. Nähert sich P_1 dem Schnittpunkte A der Tangente d an den einen Zweig im Doppelpunkt der Kurve $k = 0$, so wird sich nur eine durch P_1 gehende Wendetangente der Tangente d nähern; gleichzeitig werden sich aber zwei andere Wendetangenten derselben Kurve (die in der Figur imaginär sind und sein müssen) der Tangente d, also zwei andere dem Punkt P_1 entsprechende Punkte P_2 dem Punkt A nähern. Ein unendlich kleiner Wert von AP_1 bestimmt einen unendlich kleinen Wert von k, und ein solcher Wert von k gleichzeitig

drei Punkte, die je als Punkt P_1 gelten können, während dann die zwei anderen entsprechenden Punkte die Punkte P_2 werden. Das Entsprechen ist also involutorisch und gibt zwei Koinzidenzen. Solche finden auch im Schnittpunkte der Geraden a mit der Tangente an den anderen Zweig im Doppelpunkt statt. Die α mit Doppelpunkt versehenen Kurven veranlassen also vier Koinzidenzen, der Koeffizient von α in der Gleichung [112] (7) muß daher 4 sein. Gleichzeitig sieht man, daß die drei Wendetangenten, die sich für unendlich kleine Werte von k einer Tangente im Doppelpunkte nähern, mit dieser Winkel bilden, die mit $k^{\frac{1}{3}}$ proportional sind. Eben daher kann nur eine dieser Wendetangenten reell sein.

Der Koeffizient 1 der α enthaltenden Glieder in den Gleichungen (5), (10), (13), (14) und (15) beruht darauf, daß die Ordnungen unendlich kleiner Größen jenen, die dem Glied α in (2) denselben Koeffizienten gegeben haben, gleich sind. Dagegen haben wir die Ordnungen der unendlich kleinen Größen nicht bestimmt, von denen der Koeffizient 4 des Gliedes α in (11) abhängt. Wir haben aber bereits bemerkt, daß man diese eine Gleichung aus den übrigen herleiten kann. Daher kann man umgekehrt den Wert des Koeffizienten benutzen, um diese Ordnungen zu bestimmen.

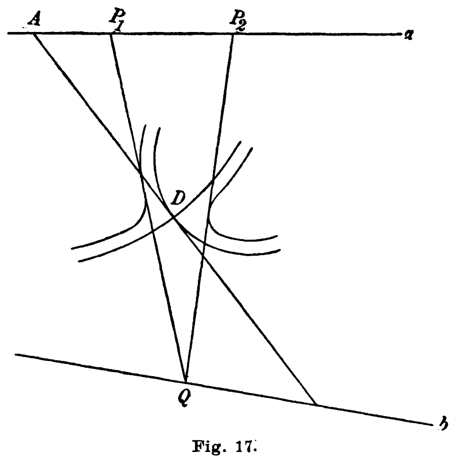


Fig. 17.

Die direkte Herleitung der Gleichung (11) beruhte auf der Abzählung der Koinzidenzen einer Wendetangente einer Kurve des Systems mit einer anderen Tangente derselben Kurve, die die Wendetangente in einem Punkt Q einer festen Geraden b schneidet. Die dazu dienende Korrespondenz findet (Fig. 17) zwischen den Schnittpunkten P_1 und P_2 einer anderen festen Geraden a mit den genannten Tangenten statt: QP_1 ist eine der c' von Q ausgehenden Wendetangenten, QP_2 eine der anderen $n' - 2$ Tangenten, die von Q aus an dieselbe Kurve gehen. Schneidet die Tangente an einen der Zweige im Doppelpunkt einer der α singulären Kurven a im Punkt A, so haben wir eben gesehen, daß diese Tangente als eine der durch A gehenden c' Wendetangenten $(P_1 Q)$ zu zählen ist, und mit einer der übrigen durch ihren Schnittpunkt Q gehenden Tangenten an dieselbe Kurve zusammenfällt. Ein dem Punkt A benachbarter Punkt P_1 von a wird also auch nur mit einem entsprechenden Punkt P_2 in A zusammenfallen. Da jedoch der für das

Glied α gefundene Koeffizient 4 uns zeigt, daß dieses Zusammenfallen für zwei Koinzidenzen zu zählen ist, so muß [105] die Ordnung der unendlich kleinen Strecke $P_1 P_2$ doppelt so groß werden als die der Strecke $A P_1$.

Da die Ordnungen der Winkel der verschiedenen Tangenten dieselben sind, wie die der von ihnen auf a abgeschnittenen Strecken, so sieht man, daß, wenn man von einem Punkt Q aus, der unendlich nahe bei einer der Tangenten im Doppelpunkt einer der α singulären Kurven liegt, die dieser Tangente benachbarte Wendetangente (QP_1) an eine Kurve des Systems zieht, eine andere von Q aus an dieselbe Kurve gehende Tangente (QP_2) einen Winkel mit der Wendetangente bilden wird, dessen Ordnung doppelt so groß ist, als die des Winkels, den die beiden Tangenten mit ihrer Grenzlage bilden, also mit $k^{\frac{2}{3}}$ proportional sein wird.

Ähnliche Untersuchungen könnte man an die ebenfalls von den übrigen Gleichungen in [112] abhängige Gleichung (18) anknüpfen.

Bisher haben wir in den vorausgehenden Untersuchungen über den Einfluß der auftretenden Doppelpunkte nur von einem Büschel gesprochen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich aber unmittelbar auf ein allgemeines ∞^1-faches System mit der Charakteristik μ übertragen, solange der Doppelpunkt nicht auf der Umhüllungskurve des Systems liegt. Sonst existiert nämlich für die einen Doppelpunkt besitzende Kurve und ihre Nachbarkurven das gegenseitig eindeutige Entsprechen der Kurven und eines Parameters k, das wir hier bewiesen haben, nicht. Einmal bewiesen müssen die allgemeinen Formeln in [112] aber auch auf solche Grenzfälle anwendbar sein, in welchen ein neuer Doppelpunkt auf der Umhüllungskurve des Systems liegt, und dies kann nur dadurch geschehen, daß eine solche Grenzkurve für zwei in der Zahl α gezählt wird. Überhaupt wird eine Kurve des Systems, die in einem Punkt P die Umhüllungskurve berührt, für zwei der durch ihn gehenden μ Kurven zu zählen sein. Dies gilt auch dann, wenn der Punkt eben der neue Doppelpunkt ist, und dies wird, wenn man unsere Bestimmungen durchgeht, überall eine Verdoppelung der Multiplizitäten, mit welchen diese Kurve in die verschiedenen Formeln eingeht, zur Folge haben.

[115] Übungsbeispiele. 1. Die folgenden Sätze zu beweisen: Der Büschel der durch eine Erzeugende einer windschiefen Regelfläche gehenden Ebenen ist projektiv auf die Reihe ihrer Berührungspunkte bezogen. Zwei windschiefe Regelflächen, die eine gemeinschaftliche Erzeugende haben, berühren sich in zwei Punkten dieser Geraden — die jedoch zusammenfallen können — oder in allen ihren Punkten.

2. Eine geschlossene Reihe von $2r$ Kegelschnitten $k_1, k_2 \ldots k_{2r}, k_1$ sei vorgelegt, in welcher jeder Kegelschnitt sowohl den vorhergehenden, als auch den nachfolgenden in zwei Punkten berührt; es sei nun unter

Benutzung dieser Kegelschnitte mit dem Lineal ein r-Eck zu konstruieren, dessen Ecken der Reihe nach auf $k_1, k_3 \ldots k_{2r-1}$ liegen, und dessen Seiten $k_2, k_r \ldots k_{2r}$ berühren. Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

3. Es gibt null oder unendlich viele r-Ecke, die einer Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind. Wie erklären sich die Koinzidenzen der bei dem Beweise für diesen Satz zu benutzenden Korrespondenzen? (Vgl. [137].)

4. Auf einer Regelfläche von der Ordnung m liegen zwei Kurven von den Ordnungen n_1 und n_2, die die Erzeugenden beziehungsweise in r_1 und r_2 Punkten schneiden. In wie vielen Punkten werden sich die Kurven schneiden?

5. Eine Fläche m^{ter} Ordnung hat eine Doppelkurve von der Ordnung n und dem Range n' (und sonst keine Singularitäten). Wie viele Pinchpunkte, d. h. solche Punkte der Doppelkurve, in welchen die Tangentialebenen zusammenfallen (so daß die zwei Mäntel verbunden werden), enthält die Doppelkurve?

6. Den in [29] gefundenen Ausdruck $n'\mu + n\mu'$ durch Abzählung der Koinzidenzen einer Tangente der gegebenen Kurve mit der Tangente an eine der durch den Berührungspunkt gehenden Kurven des Systems zu beweisen.

7. Suche die Anzahl der isolierten Schnittpunkte dreier Flächen von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, die sich längs einer Kurve von der Ordnung n und dem Range n' berühren (vgl. [109]).

8. Die Formeln [85] (8) mittels des Korrespondenzprinzips zu beweisen.

9. Die Koinzidenzen der Tangentialebenen einer Raumkurve, die durch die eine feste Gerade schneidenden Bisekanten hindurchgehen, abzuzählen und zu erklären. (Verschiedene Aufgaben entstehen, je nachdem die Ebenen die Kurven auf der Bisekante selbst oder in anderen Punkten berühren.)

10*. Die Multiplizitäten, mit denen eine Kurve eines Systems, die einen neuen Doppelpunkt auf der Umhüllungskurve hat, in die Formeln [112] eingeht, einzeln herzuleiten ([114] Schluß).

11. Wie muß man die Formeln in [103] ändern, wenn man der Kurve c e Spitzen beilegt?

12. Die Zahl t in [103] durch das Zusammenfallen zweier Schnittpunkte der Tangenten von c in den Punkten, in welchen ein und derselbe durch A gehende Strahl c trifft, zu bestimmen.

b) Korrespondenzen einstufiger Gebilde von beliebigem Geschlecht.

[116] Inhalt des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes. *Cayley* hat die folgende Verallgemeinerung des einfachen Korrespondenzsatzes aufgestellt, die *Brill* nachher algebraisch bewiesen hat:



Wenn die beweglichen Punkte P_1 und P_2 einer Kurve c_n^p vom Geschlecht p so aufeinander bezogen sind, daß jedem Punkt P_1 α_2 Punkte P_2, und jedem Punkt P_2 α_1 Punkte P_1 entsprechen, und wenn die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 auf c_n^p durch eine durch P_1 näher bestimmte Kurve c_r ausgeschnitten werden, die mit c_n^p noch k mit P_1 zusammenfallende und sonst nur feste Schnittpunkte hat, so wird die Anzahl γ der Koinzidenzen entsprechender Punkte P_1 und P_2 durch den Ausdruck

(1) $$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + 2kp$$

bestimmt.

Aus diesem Satz folgt, daß, wenn sich auch die einem beliebig gegebenen Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_1 auf dieselbe Weise bestimmen lassen, die dazu dienende Kurve die gegebene c_n^p in k mit P_2 zusammenfallenden Punkten schneidet.

Bei der Abzählung der γ Koinzidenzen ist noch zu bemerken:

1. Als koinzidierend werden (wie in [65]) nur solche zusammenfallende Punkte betrachtet, die konsekutiv sind, also demselben Kurvenelement angehören, nicht aber solche, die auf verschiedenen Elementen gleichzeitig in einen mehrfachen Punkt fallen.

2. Zusammenfallende Koinzidenzen sind, wenn sie auf einem einfachen Element der Kurve stattfinden, nach der für die Koinzidenzen der Punkte einer Geraden aufgestellten Regel [105] abzuzählen. Um diese Regel auch auf die in einem mehrfachen Element stattfindenden Koinzidenzen auszudehnen, kann man [10] die Koordinaten der Punkte eines solchen Elements mittels Potenzreihen mit ganzen Exponenten durch einen Parameter t ausdrücken und sie dadurch, innerhalb des Konvergenzbereichs, den Punkten einer Geraden entsprechen lassen. Die Anzahl der zusammenfallenden Koinzidenzen auf dem Kurvenelement wird dann der Zahl der Koinzidenzen der entsprechenden Punkte der Geraden gleich sein. Die in der Regel [105] benutzten Ordnungen der unendlich kleinen Abstände der Punkte sind also nur durch die Ordnungen der Differenzen der Parameter, die die Punkte des Kurvenelements bestimmen, zu ersetzen.

Die Richtigkeit dieser Regeln ist einleuchtend, wenn die Kurve rational ist ($p = 0$), so daß die ganze Kurve einer Geraden eindeutig entspricht. Daß sie nun auch für andere Werte von p gelten muß, folgt daraus, daß es jedenfalls bei der Abzählung der in einem Punkt zusammenfallenden Koinzidenzen nur auf die Ordnung der diesen Punkt charakterisierenden unendlich kleinen Größen ankommen kann, nicht darauf, ob die Kurve außer dem betrachteten Element mehr oder weniger Doppelpunkte hat. Daher dürfen wir uns bei den folgenden Beweisen des *Cayley-Brill*schen Satzes an den allgemeinen Fall halten, in welchem die Koinzidenzen getrennt auftreten.

Den aufgestellten Satz werden wir zuerst für die folgenden Fälle beweisen: 1. in [117] für den Fall $k = 0$, in welchem die Hilfskurve c_r gar nicht durch P_1 geht, und 2. in [118] für den Fall, in welchem c_r aus k durch P_1 gehenden Geraden besteht. Sodann wird man [120] den allgemeinen Satz aus dem in [119] zu beweisenden Satz über zusammengesetzte Korrespondenzen herleiten können.[1])

In den Beweisen brauchen wir die festen Punkte, in welchen die Kurven c_r die Kurve c_n^p schneiden, nicht besonders zu beachten; man kann sie nämlich in dem Satze sogleich in die Zahlen α_2 und γ einbeziehen oder nicht. Das erstere geschieht in [117]—[119], wo wir also $\alpha_2 = nr - k$ setzen.

[117] Beweis des Satzes [116] für den Fall $k = 0$. Wenn in [116] $k = 0$ ist, so werden die Koinzidenzen der Punkte P_1 der Kurve c_n^p mit den $\alpha_2 = nr$ entsprechenden Punkten P_2 derselben Kurve als solche Punkte P_1 bestimmt (Fig. 18), durch welche die ihnen entsprechenden Kurven c_r gehen. Ein solcher Punkt P_1 wird auch mit einem Punkt P_2' koinzidieren, in dem die ihm entsprechende Kurve c_r die Verbindungslinie von P_1 mit einem festen Punkt A schneidet. Die

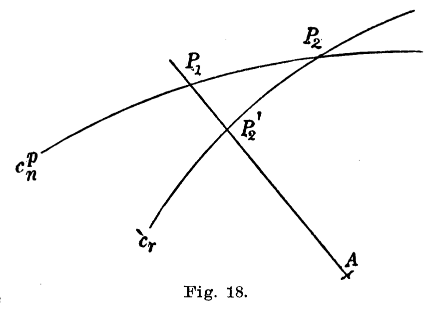


Fig. 18.

Anzahl dieser Koinzidenzen läßt sich durch den einfachen Korrespondenzsatz finden, und zwar unmittelbar durch die Form, die wir diesem Satz in [106] gegeben haben. Um die hiezu nötigen Zahlen zu bekommen, bemerken wir zunächst, daß durch einen beliebigen Punkt A der Ebene α_1 Kurven c_r gehen; denn diese Anzahl wird unverändert bleiben, wenn man A auf die Kurve c_n^p verlegt, und ein Punkt dieser Kurve ist ein Punkt P_2 der durch ihn gehenden Kurven c_r, die eben den α_1 dem Punkte P_2 entsprechenden Punkten P_1 zugehören. Dadurch findet man, daß der Ort der Punkte P_2', der eine Gerade durch A noch in nr Punkten schneidet, von der Ordnung $\alpha_1 + nr$ ist; jedem Punkt P_2' dieser Kurve entspricht ein Punkt P_1. Also wird, wenn wir die für das Punktepaar P_1, P_2' in [106] eingeführten Bezeichnungen von den jetzigen durch An-

1) Durch einige Abänderungen könnte man zwar schon den Beweisen in [117] und [118] eine viel größere Tragweite geben; dadurch würde jedoch nichts Wesentliches gewonnen, da man auch dann erst durch Anwendung von [119] einen vollständigen Beweis des allgemeinen Satzes erreichen könnte. Ich weise auf meine Beweisführung in den Mathematischen Annalen 40, S. 103—106 hin und benutze dabei die Gelegenheit, um eine Angabe in diesem Aufsatz richtigzustellen: es ist nicht erlaubt, vorauszusetzen, daß die S. 106 o. genannte Kurve von der Ordnung s fest sei. Die so entstehende Lücke läßt sich aber eben wie hier durch Benutzung des Satzes über zusammengesetzte Korrespondenzen ausfüllen.

wendung eines Striches unterscheiden, $\alpha_1' = \alpha_1 + nr$. Da jedem Punkte P_1 der Kurve c_n^p r Punkte P_2' entsprechen, so wird $\alpha_2' = nr$, und die Umhüllungskurve der Geraden P_1P_2' ist der Punkt A, nr-mal gezählt; also ist auch $\beta = nr$. Da nun gleichzeitig P_2 und P_2' mit P_1 koinzidieren, wird

$$\gamma = \alpha_1' + \alpha_2' - \beta' = \alpha_1 + nr + nr - nr = \alpha_1 + nr = \alpha_1 + \alpha_2,$$

was für $k = 0$ zu beweisen war.

[118] Beweis des Satzes [116] für den Fall, in welchem c_r aus k durch P_1 gehenden Geraden besteht. Wenn die Hilfskurve c_r aus k durch P_1 gehenden Geraden besteht, wird $r = k$ und $\alpha_2 = nr - k = k(n-1)$. Eine Koinzidenz von P_1 und P_2 wird in diesem Falle (Fig. 19) eintreten, wenn entweder die Tangente p_1' an die Kurve c_n^p in P_1 mit einer der k Geraden p_2' koinzidiert, aus denen die P_1 entsprechende Kurve c_r besteht, oder P_1 der Mittelpunkt eines mehrfachen Elementes der Kurve c_n^p ist.

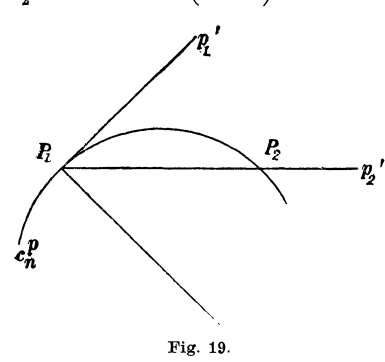


Fig. 19.

Die Klasse der Umhüllungskurve der Geraden p_2' findet man als die Anzahl solcher Geraden, die durch einen beliebigen Punkt der Kurve c_n^p gehen. Ein solcher Punkt kann entweder als ein Punkt P_1 oder als ein Punkt P_2 betrachtet werden. Im ersten Falle gehen durch ihn die k Geraden p_2', aus denen die ihm entsprechende Kurve c_r besteht, im zweiten die α_1 Verbindungslinien mit dem entsprechenden Punkte P_1. Mit den Bezeichnungen in [106], die wir wieder mit einem Strich versehen und auf das dualistisch entsprechende Gebilde übertragen wollen, hat man also $\alpha_1' = k + \alpha_1$. Da jeder Tangente p_1' der Kurve c_n^p k Gerade p_2' entsprechen, so ist $\alpha_2' = k \cdot n'$, wo n' die Klasse der Kurve c_n^p ist. Der Ort der Schnittpunkte P_1 der Geraden p_1' und p_2' ist c_n^p, k-mal gezählt; also ist $\beta' = kn$. Die Anzahl der Koinzidenzen der Geraden p_1' und p_2' ist also (nach [106] und da $\alpha_2 = (n-1)k$ ist)

$$\alpha_1' + \alpha_2' - \beta' = k + \alpha_1 + kn' - kn = \alpha_1 + \alpha_2 + k(n' - 2n + 2).$$

Nähert sich der Punkt P_1 dem Mittelpunkt eines ν-fachen Elements der Kurve c_n^p, so werden sich gleichzeitig $k(\nu - 1)$ der $n(k-1)$ entsprechenden Punkte P_2 demselben Mittelpunkt nähern (ohne daß damit im allgemeinen eine Koinzidenz von Geraden p_1' und p_2' verbunden wäre). Da die $k(\nu - 1)$ Punkte P_2 auf anderen Partialzweigen des Elementes als P_1 liegen, wird nach den Regeln in [116] jede dieser Koinzidenzen

einmal zu zählen sein. Also wird, wenn die Summe $\sum$ alle mehrfachen Elemente umfaßt [65]

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + k(n' - 2n + 2) + k\sum(\nu - 1) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2kp,$$

was zu beweisen war.

[119] Wertigkeit einer Korrespondenz; zusammengesetzte Korrespondenzen. Wenn eine ganz beliebige (α_1, α_2)-Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 einer Kurve c_n^p vom Geschlechte p vorliegt und die Anzahl der Koinzidenzen dieser Korrespondenz γ ist, so kann man immer durch die Gleichung

$$2kp = \gamma - \alpha_1 - \alpha_2 \tag{1}$$

eine Zahl k bestimmen, die jedoch keineswegs immer positiv und ganz wird. Diese Zahl wird die Wertigkeit der Korrespondenz genannt.[1]) Nach der Einführung dieser Benennung wird der in [116] ausgesprochene *Cayley-Brill*sche Satz, dessen Beweis wir in [120] vervollständigen werden, so ausgedrückt: Wenn die Punkte P_2 die $nr - k$ Punkte sind, in welchen eine durch einen beliebigen Punkt P_1 der Kurve c_n^p bestimmte Kurve c_r, die in P_1 k Schnittpunkte mit c_n^p hat, diese Kurve noch schneidet, so wird die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 die Wertigkeit k haben.

Eine Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 kann sich oft auf eine algebraisch ausdrückbare Weise so in Gruppen teilen, daß von den jedem Punkt P_1 von c_n^p entsprechenden α_2 Punkten P_2 i' in jedem von α_2' Punkten P_2', i'' in jedem von α_2'' Punkten P_2'' usw. zusammenfallen. Dann werden die Wertigkeiten k der Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und der Gesamtheit ihnen entsprechender Punkte P_2, k' der Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und den ihnen entsprechenden Punkten P_2', k'' der Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und den ihnen entsprechenden Punkten P_2'' usw. die Gleichung

$$k = i'k' + i''k'' + \cdots; \tag{2}$$

befriedigen. Dies folgt daraus, daß dies bereits mit den diesen Korrespondenzen zugehörigen Zahlen α_1, α_1', α_1'' usw.; α_2, α_2', α_2'' usw.; γ, γ', γ'' usw. der Fall ist.

[120] Vervollständigung des Beweises des *Cayley-Brill*schen Satzes. Setzen wir nun allgemein voraus, daß die Punkte P_2, die P_1 auf der Kurve c_n^p entsprechen, durch eine Kurve c_r ausgeschnitten werden, die schon in P_1 k zusammenfallende Schnittpunkte mit c_n^p hat. Die in P_1 zusammenfallenden k Schnittpunkte verbinden wir

1) Diese Erweiterung des Begriffs der Wertigkeit, den man sonst an den *Cayley-Brill*schen Satz geknüpft hat, betrifft nicht nur Korrespondenzen, die dadurch eine gebrochene Wertigkeit bekommen, sondern auch andere, die man früher als singulär bezeichnet hat, z. B. die auf einer harmonischen Kurve dritter Ordnung auftretende [129].

(Fig. 20) durch Gerade mit den k festen Punkten $A \ldots K$ und nehmen an, daß diese Geraden c_n^p noch in den Punkten P_3 treffen. Die P_1 entsprechenden Punkte P_2 verbinden wir durch Gerade mit einem festen Punkt L und nehmen an, daß diese Geraden LP_2 c_n^p noch in den Punkten P_4 treffen. Bezeichnen wir nun kurz durch $(P_2 + P_4)$ usw. die Gesamtheit der P_1 entsprechenden Punkte P_2 und P_4 usw., so hat die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_3 die Wertigkeit k [118], die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und den Punkten $(P_2 + P_4)$, die von den Geraden durch L ausgeschnitten werden, die Wertigkeit 0 [117], also [119] die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und $(P_2 + P_3 + P_4)$ die Wertigkeit k.

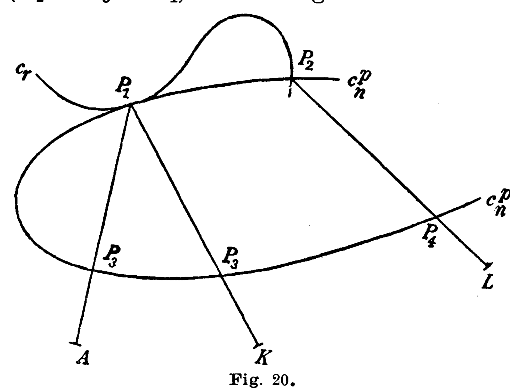


Fig. 20.

Da die Punkte (P_1 k-mal $+ P_2$) die nr Schnittpunkte der Kurven c_n^p und c_r sind, so werden die übrigen $n^2r - nr$ Schnittpunkte $(P_3 + P_4)$ der Kurve c_n^p mit der aus den Geraden AP_1, $\ldots KP_1$ und den Geraden LP_2 bestehenden Kurve nr^{ter} Ordnung auf einer Kurve c_{nr-r} von der Ordnung $nr - r$ liegen [37], die man dadurch genauer bestimmen kann, daß man sie noch durch eine hinreichende Anzahl fester Punkte gehen läßt. Da c_{nr-r} im allgemeinen nicht durch den sie bestimmenden Punkt P_1 geht, so hat die Korrespondenz zwischen P_1 und den Punkten $(P_3 + P_4)$ die Wertigkeit 0, und da die Korrespondenz der Punkte P_1 und $(P_2 + P_3 + P_4)$ die Wertigkeit k hat, so muß die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 die Wertigkeit k haben, was zu beweisen war.

[121] Negative und gebrochene Wertigkeiten; Beispiele negativer Wertigkeit. Den Satz [119] über zusammengesetzte Korrespondenzen kann man dazu verwenden, aus Wertigkeiten solcher Korrespondenzen, die den *Cayley-Brill*schen Bedingungen unterliegen, die Wertigkeiten neuer Korrespondenzen zu finden. Dies geschieht durch Subtraktion, wenn man sowohl die Wertigkeit einer eine gewisse Korrespondenz enthaltenden, zerlegbaren Korrespondenz als auch die ihrer übrigen Teilkorrespondenzen kennt; dabei kann man auch auf negative Wertigkeiten kommen. Es geschieht durch Division, wenn eine Korrespondenz mit gegebener Wertigkeit sich in solche Korrespondenzen zerlegen läßt, deren Gleichartigkeit zeigt, daß sie dieselbe Wertigkeit haben müssen (s. [122] und Schluß von [129]). Auf diese Weise kann man auch Korrespondenzen mit gebrochener Wertigkeit antreffen.

Das Vorkommen negativer Wertigkeiten werden wir sogleich durch ein Beispiel zeigen. Es sei gegeben eine Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2' mit der Wertigkeit k'; bestimmt man nun die Punkte P_2'' als die Punkte, in welchen die Kurven (z. B. Geraden) eines Büschels, die je durch P_2' gehen, die Kurve c_n^p noch weiter schneiden, so findet zwischen den Punkten P_1 und P_2'' eine Korrespondenz mit der Wertigkeit $k'' = -k'$ statt. Denn die zum Ausschneiden der Punkte P_1' und P_2'' dienenden Kurven c_r bestehen je aus α_2' Geraden des Büschels und gehen im allgemeinen nicht durch P_1. Also ist in der Gleichung [119] (2)

$$k = 0, \quad i' = i'' = 1.$$

Verbinden wir z. B. zwei feste Punkte der Ebene A und B mit einem beweglichen Punkt P der Kurve c_n^p, so findet zwischen den übrigen Punkten P_1, in denen AP, und den übrigen Punkten P_2, in denen BP die Kurve schneidet, eine Korrespondenz statt, deren Wertigkeit $k = -1$ ist; denn die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und P ist $+1$, weil die Geraden AP in P einen einfachen Schnittpunkt haben. Übrigens ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (n-1)^2.$$

Die Anzahl der Koinzidenzen ist also

$$2(n-1)^2 - 2p.$$

Von diesen fallen $n-1$ in jeden der n Schnittpunkte der Geraden AB. Die übrigen in der Anzahl

$$(n-1)(n-2) - 2p$$

müssen in die mehrfachen Punkte der Kurve fallen. Gibt es von solchen nur d Doppelpunkte und e Spitzen, so erhält man auf diese Weise, wie wir gleich zeigen werden, $2d + 2e$ Koinzidenzen, was mit dem Ausdruck für das Geschlecht

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - e \tag{1}$$

übereinstimmt.

Daß wirklich zwei Koinzidenzen der Punkte P_1 und P_2 in jeder Spitze stattfinden, wird aus der Regel [116] 2 folgen, wenn wir die Kurve in der Umgebung der Spitze durch

$$x = t^2, \quad y = at^3 + \cdots$$

darstellen. Ist nun t der unendlich kleine Parameter eines der Spitze benachbarten Punktes P, so werden die Parameter t_1 und t_2 der ihm entsprechenden Punkte P_1 und P_2 von derselben Ordnung sein, und die Ordnung der Differenz der Abszissen x_1 und x_2 wird (Fig. 21) eben-

so groß sein wie die der Ordinaten y der Punkte P, weil PP_1P_2 ein Dreieck mit endlichen Winkeln ist. Also ist

$$x_2 - x_1 = Ay + \cdots,$$
$$t_2^2 - t_1^2 = Aat^3 + \cdots,$$

und

$$t_2 - t_1 = \frac{Aat^3 + \cdots}{t_2 + t_1}$$

wird also von derselben Ordnung wie t_1^2 sein.

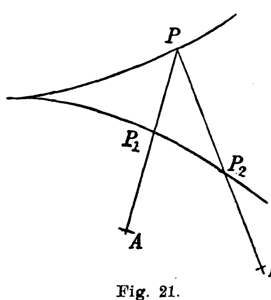


Fig. 21.

Gibt es andere mehrfache Punkte, so kann man auf dieselbe Weise ihren Einfluß auf das Geschlecht bestimmen, indem man nach unserer Regel die in diese Punkte fallenden Koinzidenzen abzählt. Die Hälfte dieser Anzahl wird dann als Subtrahend im Ausdruck (1) für p auftreten.

[122] Beispiele gebrochener Wertigkeiten. Um auch sofort ein Beispiel für das Vorkommen gebrochener Wertigkeiten zu geben, werden wir einige Korrespondenzen behandeln, die zwar Spezialfälle einiger später zu betrachtenden sind [130], bei welchen sich aber die in [121] angegebene Form des Auftretens der gebrochenen Wertigkeit deutlicher darbietet. Es knüpft sich an die analytisch-geometrische Darstellung[1]) der Kurven an, die die betreffenden Korrespondenzen enthalten. Dadurch werden wir auch ein Beispiel dafür bekommen, wie sich der Gebrauch abzählender Methoden an die analytisch-geometrische Darstellung anknüpfen läßt.

Wir betrachten die Kurve dritter Ordnung

$$y^2 = x^3 - 1.$$

Wenn die Koordinaten Parallelkoordinaten sind, so ist der unendlich ferne Punkt der y-Achse ein Wendepunkt, die unendlich ferne Gerade die Wendetangente, die Gerade $y = 0$ die sogenannte harmonische Achse des Wendepunktes[2]), die hier wegen der unendlichen Entfernung dieses

1) Auf diesen Umstand ward ich durch eine solche Darstellung dieser Kurve in einem Brief von *A. Brill* aufmerksam gemacht. Übrigens hatte *H. Burkhardt* schon 1898 (*Comptes rendus* 126) die Aufmerksamkeit auf die Zweckmäßigkeit der Anwendung des Begriffes gebrochener Wertigkeiten in solchen Fällen hingewiesen. *Cayley* und *Brill* hatten schon früher im Anschluß an den Satz über zusammengesetzte Korrespondenzen negative Wertigkeiten angewandt.

2) Die erste Polare eines Wendepunktes einer Kurve dritter Ordnung besteht aus der Wendetangente und einer weiteren Geraden [20], die wegen ihrer harmonischen Eigenschaften harmonische Achse genannt wird. — In einem [130] zu beweisenden allgemeinen Satz wird der Wendepunkt durch einen beliebigen Punkt der Kurve ersetzt.

Punktes die durch ihn gehenden Sehnen $x = c$ halbieren muß. Die vom Wendepunkt ausgehenden Tangenten sind, außer der Wendetangente $x = \infty$, die drei Geraden $x = 1$, $x = \alpha$, $x = \alpha^2$, wo

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

ist. Da diese vier Geraden einen äquianharmonischen Büschel bilden, so muß die Kurve eine äquianharmonische sein [51]. Ersetzt man die Parallelkoordinaten durch allgemeine Dreieckskoordinaten $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, so erhält man die Darstellung einer allgemeinen äquianharmonischen Kurve dritter Ordnung, die auf ein Dreieck bezogen ist, in welchem ein Scheitel Wendepunkt der Kurve, eine Nebenseite ($x_3 = 0$) Wendetangente, die andere Nebenseite $x_1 = 0$ Wendepunktslinie ([54] 5) und die Gegenseite $x_2 = 0$ harmonische Achse des Wendepunktes ist.

Hier bietet sich sogleich die (1, 1)-Transformation der Kurve in sich

$$x' = \alpha x, \quad y' = y$$

dar. Durch Wiederholung erhält man

$$x'' = \alpha^2 x, \quad y'' = y,$$

und durch abermalige Wiederholung kommt man wieder auf den ursprünglichen Punkt (x, y) zurück. Die Transformation ist also dreigliedrig zyklisch. Nennen wir die Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y'') beziehungsweise P, P', P'', so haben wir zwei (1,1)-Korrespondenzen, nämlich 1. zwischen P und P' und 2. zwischen P und P''. Da die erste den Punkt P dem Punkt P'' entsprechen läßt, so sind sie reziprok; sie müssen also dieselbe Wertigkeit k haben [119]. Da weiter die Punkte P' und P'', die in diesen zwei Korrespondenzen dem Punkt P entsprechen, von einer durch P gehenden Geraden $y = c$ ausgeschnitten werden, so ist die Summe ihrer Wertigkeiten 1. Jede hat also die Wertigkeit $\frac{1}{2}$. Daraus folgt [119] (1), daß jede drei Koinzidenzen hat. Von diesen findet die eine im unendlich fernen Wendepunkte statt, die anderen in den Schnittpunkten der Kurve mit der Geraden $x = 0$ (d. h. mit dem anderen entsprechend gemeinsamen Strahl der durch x und αx bestimmten projektiven Büschel). Auch diese Punkte sind Wendepunkte.

Dieselbe Kurve wird uns auch ein Beispiel dafür bieten, wie man gebrochene Wertigkeiten zur Bestimmung neuer Wertigkeiten benutzen kann. Bezeichnen wir mit P_1, P_1', P_1'' die Punkte $(x, -y)$, $(\alpha x, -y)$, $(\alpha^2 x, -y)$, so findet auch zwischen P und P_1' eine (1, 1)-Korrespondenz statt, die durch $x' = \alpha x$, $y' = -y$ bestimmt wird. In dieser werden sich die Punkte

$$P, P_1', P'', P_1, P', P_1'', P$$

der Reihe nach entsprechen, so daß auch diese Korrespondenz zyklisch wird, aber sechsgliedrig. Um ihre Wertigkeit zu bestimmen, bemerken

wir, daß die durch die Abszisse αx bestimmte Gerade sowohl durch den Punkt P' geht, der dem Punkt P in der vorhergehenden Korrespondenz entsprach, als auch durch den Punkt P_1', der ihm jetzt entspricht. Sie geht aber nicht durch P und schneidet sonst die Kurve nur in einem festen Punkt (dem unendlich fernen). Die Summe der Wertigkeiten der zwei Korrespondenzen ist also 0, und da die der vorigen $\frac{1}{2}$ war, muß die jetzt betrachtete die Wertigkeit $-\frac{1}{2}$ haben. Die Anzahl ihrer Koinzidenzen ist also 1. Die Koinzidenz findet im unendlich fernen Wendepunkt statt.

[123] Beispiele für die Anwendung des *Cayley-Brill*schen Satzes; neue Herleitung der *Plücker*schen Formeln. Bevor wir uns zu anderen Bestimmungen der Wertigkeiten wenden, werden wir gleich hier durch einige Beispiele die praktische Anwendbarkeit des *Cayley-Brill*schen Satzes zeigen. Der Einfachheit halber wollen wir ihn zu neuen Beweisen für die *Plücker*schen Formeln benutzen.

Sei c_n^p eine Kurve von der Ordnung n mit d Doppelpunkten und e Spitzen. Wir nennen ihre Klasse n' und die Anzahlen ihrer Doppeltangenten und Wendetangenten d' und e'. Dann ist

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - e, \tag{1}$$

was wir eben in [121] ebenfalls durch den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz bewiesen haben, nachdem wir beim Beweise dieses Satzes das Geschlecht durch die Gleichung

$$2(p-1) = n' + \sum(\nu - 1) - 2n$$

oder in dem jetzigen Fall, wo $\sum(\nu-1) = e$ ist, durch

$$2(p-1) = n' + e - 2n \tag{2}$$

definiert hatten. Wir betrachten nun

1. die Korrespondenz zwischen zwei Schnittpunkten P_1 und P_2 der Kurve mit einer beliebigen Geraden eines gegebenen Büschels mit dem Scheitel A. Die Kurve c_r, die die Punkte P_2 bestimmt, ist dann die durch P_1 gehende Gerade des Büschels. Also ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n - 1, \quad k = 1.$$

Die γ Koinzidenzen finden entweder in den Berührungspunkten der durch A gehenden n' Tangenten oder in den e Spitzen statt. Also wird

$$n' + e = 2(n-1) + 2p,$$

was nur eine Wiederholung der beim Beweis des Korrespondenzsatzes [120] benutzten Definition des Geschlechts ist.

2. Wir betrachten sodann die Korrespondenz zwischen dem Berührungspunkt P_1 einer Tangente der Kurve c_n^p und ihren Schnittpunkten P_2. Die Hilfskurven c_r sind dann die Tangenten; sie haben in P_1 zwei zu-

sammenfallende Schnittpunkte. Man hat dann, da $n'-2$ der von einem Punkt P_2 ausgehenden Tangenten c_n^p in anderen Punkten P_1 berühren,

$$\alpha_1 = n' - 2\,, \quad \alpha_2 = n - 2\,, \quad k = 2\,.$$

Die Koinzidenzen treten ein, wenn entweder die Tangente eine der e' Wendetangenten ist oder eine Kurve in einer der e Spitzen berührt. Daß auch die letzten Koinzidenzen einfach sind, geht daraus hervor, daß der Berührungspunkt und der der Spitze benachbarte Schnittpunkt, in dem eine zu der Tangente in einer Spitze benachbarte Tangente die Kurve trifft, verschiedenen Zweigen angehören und sich eindeutig bestimmen. Die Differenz der sie bestimmenden Parameter t (vgl. [116] 2) muß daher von derselben Ordnung wie die Parameter selbst sein. Aus der dualistischen Symmetrie folgt übrigens, daß die Glieder e und e' denselben Koeffizienten haben müssen. Man findet also die Gleichung

$$(3) \qquad e + e' = n + n' + 4(p-1)\,,$$

die in Verbindung mit (2) die dieser Gleichung dualistisch entsprechende ergibt.

In diesem Fall können wir die in [116] gemachte Bemerkung verwerten, daß, wenn ebenfalls die einem Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_1 sich durch Kurven c_r ausschneiden lassen, diese c_n^p in k in P_2 zusammenfallenden Punkten schneiden müssen. In der Tat werden die Berührungspunkte P_1 der von P_2 ausgehenden $n'-2$ Tangenten von den ersten Polaren der Punkte P_2 ausgeschnitten, und diese berühren eben c_n^p in P_2 [19] und schneiden sie sonst nur in festen Punkten.

3. Endlich betrachten wir die Korrespondenz zwischen zwei Schnittpunkten P_1 und P_2' einer Tangente von c_n^p. Die einem Punkt P_1 ententsprechenden Punkte werden ausgeschnitten durch die $n'-2$ von P_1 ausgehenden und nicht in P_1 berührenden Tangenten. Diese bilden eine Kurve, die in P_1 $n'-2$ mit P_1 zusammenfallende Schnittpunkte hat, die aber außerdem c_n^p nicht nur in den Punkten P_2' schneidet, sondern auch in Punkten P_2'' berührt. Nennen wir also die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2' k', die zwischen P_1 und P_2'' k'', so ist [119] (2)

$$n' - 2 = k' + 2k''\,.$$

Nun ist aber die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2'' eben jene, die wir im Falle 2. betrachteten, deren Wertigkeit $k'' = 2$ ist. Also wird

$$k' = n' - 6\,.$$

Außerdem wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (n'-2)(n-3)\,.$$

Die Koinzidenzen treten in den beiden Berührungspunkten der d' Doppeltangenten und $(n'-3)$mal in jeder der e Spitzen auf. Also findet man

$$(4) \qquad 2d' + e(n'-3) = 2(n'-2)(n-3) + 2(n'-6)p\,.$$



Die hier angegebene Herleitung dreier unter sich unabhängiger *Plücker*scher Gleichungen, an die sich die Definition des Geschlechts p anschließt, zeichnet sich dadurch aus, daß das Dualitätsprinzip dabei nicht benutzt wird, sondern die Herleitungen alle von den Eigenschaften der Kurve als eines Ortes ihrer Punkte ausgehen. Daher schließt sie sich eng an eine auch algebraisch ausführbare Bestimmung der durch einen Punkt gehenden Tangenten und der Wendetangenten und Doppeltangenten einer Kurve an, deren Gleichung in Punktkoordinaten gegeben ist. n', d' und e' sind eben die Grade der Gleichungen, von welchen diese Bestimmungen abhängen werden.

[124] Andere Bestimmung der Wertigkeit; neuer Beweis des *Cayley-Brill*schen Satzes. Die Anzahl der Koinzidenzen einer Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p und dadurch die Wertigkeit der Korrespondenz läßt sich auch durch die Methode der Erhaltung der Anzahl aus der [99] für eine rationale Kurve ($p = 0$) geltenden Formel $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ herleiten, was uns eine neue Begründung des Satzes [116] geben wird.

Sei eine solche Menge von Kurven c_n^p von der Ordnung n und dem Geschlechte p gegeben, in der die einzelnen Kurven noch von wenigstens p willkürlichen Parametern abhängen, die so gewählt werden können, daß die Kurven dadurch, ohne zu zerfallen, p neue Doppelpunkte erhalten und also rational werden. Drücken wir kurz diese Voraussetzung so aus, daß wir sagen: die Kurvenmenge enthält rationale Kurven. Natürlich werden die für die ganze Menge zu beweisenden Sätze auf jede einzelne der in der Menge enthaltenen Kurven anwendbar sein, wenn auch so, daß einzelne Kurven — darunter namentlich, wie wir sehen werden, die rationalen Kurven — und die ihnen zugehörigen Korrespondenzen als Grenzfälle aufzufassen sind. Unsere Voraussetzung schließt aber solche Korrespondenzen aus, die nur für enger begrenzte Kurvenmengen, z. B. nur für harmonische oder äquianharmonische Kurven dritter Ordnung [129] und [130], eine Bedeutung haben.

Auf der allgemeinen Kurve c_n^p dieser Menge betrachten wir eine (α_1, α_2)-Korrespondenz zwischen zwei Punktreihen P_1 und P_2 mit γ Koinzidenzen. Von diesen können entweder für alle Kurven der betrachteten Menge oder für einzelne Grenzkurven mehrere unter sich zusammenfallen; sie sind aber dann nach der gewöhnlichen Regel [116] abzuzählen Für einzelne Kurven kann es auch geschehen, daß, wenn P_1 (bzw. P_2) in einen Punkt A der Kurve fällt, einer der entsprechenden Punkte P_2 (bzw. P_1) unbestimmt wird. Beachtet man dann nur die übrigen Punkte P_2 (P_1), so wird α_2 (bzw. α_1) durch $\alpha_2 - 1$ (bzw. $\alpha_1 - 1$) zu ersetzen sein; aber gleichzeitig muß man γ durch $\gamma - 1$ ersetzen, weil man dann auch die in A stattfindende Koinzidenz nicht beachtet. Dadurch ändert sich aber die Differenz $\gamma - \alpha_1 - \alpha_2$ nicht. Wenn wir also nun denjenigen Wert von $\gamma - \alpha_1 - \alpha_2$, der der ganzen Menge, also auch den darin ent-

haltenen rationalen Kurven zugehört, insofern man sie als Grenzfälle dieser Menge betrachtet, dadurch finden wollen, daß für eine rationale Kurve $\gamma' - \alpha_1' - \alpha_2' = 0$ ist, wenn man diese und die auf ihr befindliche Korrespondenz (α_1', α_2') an und für sich betrachtet, so darf man, ohne beachten zu müssen, daß der eben berührte Fall eintreten kann, $\alpha_1' = \alpha_1$ und $\alpha_2' = \alpha_2$ setzen. γ' wird aber dann sehr wohl von γ verschieden sein können. Die rationalen Kurven sind nämlich durch Einführung von p neuen Doppelpunkten gebildet worden, und in vielen Fällen läßt es sich nachweisen, daß diese Einführung zu einem Verlust oder zu einem Gewinn von Koinzidenzen Anlaß gibt.

Ist dieser Verlust, wobei wir Gewinn als negativen Verlust bezeichnen, derselbe v für alle die p Doppelpunkte, die man einführen muß, um c_n^p rational zu machen, so wird

$$\gamma = \gamma' + vp = \alpha_1 + \alpha_2 + vp,$$

v also gleich $2k$, d. h. gleich der doppelten Wertigkeit der Korrespondenz sein.

Der Verlust tritt deutlich hervor, wenn die Punkte P_1 und P_2 so aufeinander bezogen sind, daß die homologen Punkte P_1 und P_2, die, wenn die Kurve einen Doppelpunkt D bekommt, in D fallen, je einem der Zweige — oder, wenn man *Riemann*sche Flächen benutzt, je einem der Blätter — angehören, die sich in diesem Falle trennen. Die dadurch entstehenden Koinzidenzen sind dann zwar unter die γ Koinzidenzen, die im allgemeinen vorkommen, mitzuzählen, wenn man die Kurve als Grenzfall betrachtet, aber nicht unter die γ', die der singulären Kurve an und für sich zugehören.

Diese Überlegung bestätigt unmittelbar die Richtigkeit des *Cayley-Brill*schen Satzes [116] in den Fällen, in welchen die k mit P_1 zusammenfallenden Schnittpunkte der Hilfskurve c_r mit der gegebenen Kurve c_n^p dadurch entstehen, daß c_r in P_1 einen k-fachen Punkt hat. Die k neuen Schnittpunkte P_2, die, wenn die Punkte P_1 auf dem einen Zweig eines Doppelpunkts liegen, mit dem Doppelpunkt zusammenfallen, gehören nämlich dem anderen Zweig an, koinzidieren also nicht mehr mit P_1, wenn man tatsächlich der Kurve einen Doppelpunkt beilegt. Die Koinzidenz findet dagegen statt, wenn man die Kurve als Grenzfall solcher Kurven betrachtet, die den Doppelpunkt noch nicht haben. Die Einführung des Doppelpunkts gibt also zum Verlust von $2k$ Koinzidenzen Anlaß, woraus folgt, daß die Korrespondenz die Wertigkeit k hat.

Der hier gegebene Beweis, der offenbar auch für den Fall $k = 0$ gilt, kann die Beweise in [117] und [118] ersetzen; sodann kann man den Beweis für [116] wie früher durch [119] und [120] vervollständigen. In anderen Fällen läßt sich ein Gewinn von Koinzidenzen — und also eine negative Wertigkeit — dadurch nachweisen, daß im Grenz-

falle selbst zwei entsprechende Punkte P_1 und P_2 sich auf demselben Zweig der mit dem Doppelpunkte D versehenen Kurve diesem Punkt nähern, während eine benachbarte Kurve der Menge keinen Koinzidenzpunkt hat, der im Grenzfalle nach D fällt. Auf diese Weise hätte man z. B. die in [121] gefundene Wertigkeit — 1 bestimmen können.

In diesen Fällen verschafft uns die neue Betrachtungsweise neue Beweise für Sätze, für die wir bereits einfachere Beweise besitzen. Daß sie überhaupt Beweise beibringt, beruht darauf, daß sich die Sätze auf solche Mengen allgemeiner Kurven beziehen, die rationale Kurven enthalten. Dies war, wie schon bemerkt, die Bedingung für die Anwendung der aufgestellten Regel, die auch voraussetzt, daß die Einführung jedes der p neuen Doppelpunkte denselben Einfluß ausübt. Dann wird die zu bestimmende Wertigkeit k, oder wenigstens $2k$, eine ganze, positive oder negative Zahl werden.

Die angegebene Methode läßt sich jedoch auch auf Korrespondenzen anwenden, die die genannten Bedingungen nicht erfüllen. Es gibt Korrespondenzen, die nur enger begrenzten Mengen von Kurven zugehören, die durch Einführung neuer Doppelpunkte nicht rational gemacht werden können, die aber dadurch zerfallen und dann oft mehr als p Doppelpunkte (beziehungsweise Schnittpunkte der Teilkurven) erhalten; die so einzuführenden neuen Doppelpunkte üben dann nicht immer alle denselben Einfluß auf die Anzahl der Koinzidenzen aus. Die beschriebene Methode läßt sich jedoch anwenden, wenn man nur der Einführung neuer Doppelpunkte der Kurve eine Gestalt geben kann, für die man die Anzahl der Koinzidenzen bestimmen kann, und wenn man sich für den durch die Einführung jedes neuen Doppelpunktes verursachten Verlust beziehungsweise Gewinn von Koinzidenzen Rechenschaft ablegen kann. In solchen Fällen kann die gesuchte Wertigkeit wohl eine gebrochene werden.

Sowohl für jene direkte Anwendung der aufgestellten Regel als auch für diese Benutzung derselben Methode wird die folgende Anwendung auf windschiefe Flächen Beispiele abgeben.

[125] Anwendung auf windschiefe Regelflächen. — Die in [124] angegebene Methode findet vorzugsweise dann Anwendung, wenn die einem Punkt P_1 der ebenen Kurve c_n^p entsprechenden Punkte P_2 weder allein noch in Verbindung mit Punkten schon bekannter Korrespondenzen durch Kurven in derselben Ebene ausgeschnitten werden, wenn man also den *Cayley-Brill*schen Satz nicht anwenden kann. Solche Fälle treten besonders dann ein, wenn die Beziehung durch räumliche Konstruktionen bewerkstelligt wird. P_1 und P_2 können z. B. die Punkte sein, in denen zwei Erzeugende einer windschiefen Regelfläche, die eine Doppelkurve oder mehrfache Kurve in demselben Punkt treffen, eine Ebene α schneiden. Sie werden entsprechende Punkte der Spur der Fläche in der Ebene α sein. Eine Koinzidenz von P_1 und P_2 bestimmt

zwei zusammenfallende Erzeugende, die sich auf der Doppelkurve (mehrfachen Kurve) schneiden und also einen Pinchpunkt auf dieser Kurve und ein damit verbundenes abwickelbares Element der Fläche bilden. Die Anzahl dieser Elemente haben wir in [87] η_2 genannt, schoben aber damals ihre Bestimmung bis zu dem vorliegenden Artikel auf. Die Benennung η_2 werden wir auch hier anwenden und wie dort die Ordnung und das Geschlecht der Fläche, die auch Ordnung und Geschlecht der Spur sind, m und p nennen. Zur Abzählung werden wir die Betrachtung der Grenzfälle verwenden, in welchen die Fläche doppelte Erzeugende bekommt, deren Spuren dann neben den Spuren der Doppelkurve Doppelpunkte der Spur der Fläche sind.

Zunächst werden wir einen gewissermaßen allgemeinen Fall betrachten; gewissermaßen sagen wir, weil der Grad der Allgemeinheit von der Art und Weise, auf die man die Flächen bestimmt, abhängt [5]. Hier denken wir uns die Fläche durch zwei ebene Schnitte bestimmt: Kurven von der Ordnung m, die die Schnittlinie der Ebenen in denselben m Punkten schneiden und deren Punkte sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Nehmen wir jedoch an, daß die b Doppelpunkte dieser Kurven sich nicht entsprechen, so werden diese Punkte die Schnittpunkte der zwei Ebenen mit der Doppelkurve der Fläche sein, deren Ordnung somit b ist. Wir werden ferner annehmen, daß diese Angaben so allgemeiner Natur sind, daß es möglich ist, die Kurven durch die Einführung p neuer, einander entsprechender Doppelpunkte rational zu machen.

Die Fläche wird dann p doppelte Erzeugende erhalten. Durch eine solche gehen zwei Mäntel der Fläche. Diese schneiden sich — wie überhaupt zwei Regelflächen mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden (s. [115], 1) — in zwei Punkten, die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der Doppelkurve der Fläche sind. Ihre übrigen $m-4$ Schnittpunkte [87] mit dieser Kurve sind Schnittpunkte mit anderen Mänteln der Fläche.

Betrachten wir nun zuerst die Korrespondenz zwischen den oben genannten Punkten P_1 und P_2 eines ebenen Schnittes der ursprünglichen Fläche. Die durch P_1 gehende Erzeugende trifft die Doppelkurve in $m-2$ Punkten [87]; P_1 entsprechen also $m-2$ Punkte P_2 und umgekehrt; man hat also:

$$\alpha_1 = m - 2 = \alpha_2 .$$

Um die Wertigkeit k der Korrespondenz zu finden, müssen wir die Koinzidenzen oder Pinchpunkte abzählen, die durch Einführung einer doppelten Erzeugenden verloren gehen oder gewonnen werden. Die eben genannten zwei Selbstberührungspunkte, die die Fläche auf der doppelten Erzeugenden erhält, werden je durch das Zusammenfallen zweier Pinchpunkte gebildet, was daraus ersichtlich ist, daß ein Pinchpunkt sich als Schnittpunkt der Doppelkurve mit der Berührungskurve eines willkürlichen umbeschriebenen Kegels darbietet, und daß die Ebene,



die die neue doppelte Erzeugende vom Scheitel des umbeschriebenen Kegels aus projiziert, zweimal als Teil des ursprünglichen umbeschriebenen Kegels zu zählen ist. Durch Einführung der neuen doppelten Erzeugenden, durch die p um 1 reduziert wird, gehen also 2-mal 2 der Pinchpunkte verloren. Also ist [124] $k = 2$ und man findet

$$(1) \qquad \eta_2 = 2(m-2) + 4p.$$

Man ersieht sogleich, daß das hier angewandte Verfahren, jedenfalls dann, wenn die Doppelkurve aus verschiedenen Kurven besteht, nicht unmittelbar dazu dienen kann, die jeder dieser Kurven angehörenden Pinchpunkte abzuzählen. Zwar kann man, wenn die Anzahlen der Schnittpunkte einer Erzeugenden mit jeder Kurve bekannt sind, eine ganz ähnliche Korrespondenz aufstellen; die durch die Einführung einer doppelten Erzeugenden absorbierten 2-mal 2 Pinchpunkte müssen aber dann auf die verschiedenen Doppelkurven verteilt werden, und diese Verteilung ist in jedem Fall besonders zu untersuchen. Und selbst dabei wird vorausgesetzt, daß die Fläche überhaupt einer solchen wenigstens p-fach unendlichen Menge von Regelflächen angehört, auf welche die hier benutzte Regel unmittelbar anwendbar ist. Daß dies nicht immer der Fall ist, kann man aus dem folgenden Beispiel ersehen.[1])

Wir werden die Regelfläche betrachten, deren Erzeugende eine Gerade a, einen Kegelschnitt k_2 und eine Raumkurve c_4^1 von der Ordnung vier und dem Geschlechte eins (Kurve erster Spezies) schneiden sollen, und nehmen an, daß diese drei Leitkurven sich nicht schneiden. Die Ordnung m dieser Fläche ist gleich der Ordnung eines durch a gehenden ebenen Schnittes, und dieser Schnitt besteht aus der (8-mal zu zählenden) Geraden a und 8 anderen Geraden. Also ist $m = 16$. — Die Fläche geht 8-mal durch a, 4-mal durch k_2 und 2-mal durch c_4^1. Die 4 Geraden in der Ebene des Kegelschnittes k_2, die a und c_4^1 schneiden, weiter die 16 Doppelsekanten von c_4^1 (vgl. [31]), die a und k_2 schneiden, sind doppelte Erzeugende. Die Fläche hat noch eine Doppelkurve, deren Ordnung man durch Abzählung ihrer Schnittpunkte mit einer durch a gehenden Ebene finden kann. Diese trifft sie in $\frac{8 \cdot 3}{2}$ Schnittpunkten, abgesehen von jenen, die auf a selbst liegen, die also Erzeugenden, die in anderen durch a gehenden Ebenen liegen, angehören. Für die Zahl der

1) Die hier folgende Untersuchung habe ich dem vierten Mathematikerkongreß in Rom vorgelegt (Atti del IV Congresso internationale dei Matematici 1908, Vol II, p. 227). Damals nannte ich jedoch solche Korrespondenzen, denen ich jetzt durch Erweiterung des Begriffs eine gebrochene Wertigkeit beilege, Korrespondenzen ohne Wertigkeit. Übrigens hatte schon *Max Bernhard* in seiner Inaugural-Dissertation: „Über lineare Scharen von Kurven und Flächen", Stuttgart 1897, auf welche ich daher in der Note 118 meines Encyklopädieartikels hätte hinweisen sollen, darauf aufmerksam gemacht, daß eben die Doppelkurven der Flächen Beispiele solcher Korrespondenzen abgeben.

letzteren findet man durch Anwendung des einfachen Korrespondenzprinzips $\frac{1}{2}(8 \cdot 3 + 8 \cdot 3) = 24$. Die gesuchte Ordnung der Doppelkurve, die die Regelfläche außer den gegebenen Leitkurven und den doppelten Erzeugenden hat, ist daher 36.

Man sieht also, daß die Gesamtzahl der Doppelpunkte eines willkürlichen ebenen Schnitts unserer Regelfläche, in welcher ein r-facher Punkt für $\frac{1}{2}r(r-1)$ Doppelpunkte zu zählen ist,

$$\frac{8 \cdot 7}{2} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 + 4 + 16 + 36 = 100$$

ist. Das Geschlecht des Schnittes (oder der Regelfläche) ist also

$$p = \frac{15 \cdot 14}{2} - 100 = 5.$$

Da die Erzeugenden der hier betrachteten Regelfläche die Doppelkurve c_4^1 je nur in einem Punkt schneiden, findet eine (1,1)-Korrespondenz statt zwischen den Schnittpunkten P_1 und P_2 eines ebenen Schnittes mit solchen Erzeugenden, die sich in einem Punkt M der Doppelkurve c_4^1 schneiden. Wäre es nun möglich die Wertigkeit dieser Korrespondenz so zu bestimmen, wie im eben betrachteten allgemeinen Fall, so müßte sie 2, 1 oder 0 sein, was auf die Anzahlen 22, 12 oder 2 von Koinzidenzen führen würde. Wir werden aber durch andere Betrachtungen finden, daß diese Anzahl 8 ist, was einer Wertigkeit $k = \frac{3}{5}$ entspricht.

Daß in dem behandelten Fall die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P_1 und P_2 wirklich 8 ist, ersieht man aus dem allgemeinen Geschlechtsatz [65] (11); denn zwischen den Punkten M einer Kurve vom Geschlecht 1 und den Punkten P_1 und P_2 einer Kurve vom Geschlecht 5 findet eine (1, 2)-Korrespondenz statt. — Übrigens werden die durch diese Koinzidenzen bestimmten Pinchpunkte der Kurve c_4^1 ihre acht Schnittpunkte mit den durch a gehenden Tangentialebenen an k_2 sein.

In diesem Fall kann man also eine Bestimmung der Wertigkeit und dadurch der Zahl von Koinzidenzen nicht durch unmittelbare Anwendung der Regel in [124] erhalten. Eine wirkliche, dem vorliegenden Fall angepaßte Durchführung derselben dort angestellten Betrachtung wird jedoch gleichzeitig erklären, warum die Bestimmung der Wertigkeit hier nicht unmittelbar gelingt, und auf die hier auf andere Weise gefundene Anzahl der Koinzidenzen führen. Versuchen wir es nämlich hier, wie im allgemeinen Fall, der Regelfläche doppelte Erzeugende beizulegen, so findet man, daß dies nur dadurch erreicht werden kann, daß der Kegelschnitt k_2 einen Doppelpunkt bekommt, so daß er in zwei Gerade zerfällt. Dadurch erhält die Regelfläche 4 doppelte Erzeugende, nämlich die Geraden, die durch den Doppelpunkt des Kegelschnittes gehen und sowohl a als auch c_4^1 schneiden. Jeder der Schnittpunkte mit c_4^1 absorbiert 2 Pinchpunkte; die Kurve c_4^1 verliert also 8 solche Punkte. Das Geschlecht eines ebenen Schnittes wird durch die Einführung der vier neuen

Doppelpunkte auf 1 reduziert; übrigens zerrällt eine solche ebene Schnittkurve in zwei Kurven, die je vom Geschlecht 1 sein müssen [67]. Ebenso wird die ganze Fläche in zwei Regelflächen zerfallen, und da die Kurve c_4^1 im Grenzfalle eine Schnittkurve dieser Teilflächen ist, bleibt in diesem Fall kein Pinchpunkt auf c_4^1 übrig. Im allgemeinen hat sie also nur die 8, die in diesem Grenzfalle wegfallen.

Durch die Betrachtung desselben Grenzfalles findet man, daß die Doppelkurve von der Ordnung 36 im allgemeinen gar keinen Pinchpunkt enthält, die Gerade a und der Kegelschnitt k_2 je 16. Auch die Gesamtzahl der Pinchpunkte der Fläche stimmt nicht mit der Formel (1) überein, die 48 ergeben würde. Eine solche Übereinstimmung war auch nicht zu erwarten, da die betrachtete Regelfläche — die übrigens schon im allgemeinen doppelte Erzeugende besitzt — sich durch Einführung neuer doppelter Erzeugender nicht auf eine Regelfläche vom Geschlecht 0 reduzieren läßt.

[126] Beziehungen zwischen dem allgemeinen Geschlechtsatz und dem *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz. Die Korrespondenzsätze haben vor dem allgemeinen Geschlechtsatz den wesentlichen Vorzug — den wir eben im Anfang von [125] benutzten —, daß jene unmittelbar die Anzahl der Koinzidenzen einer Korrespondenz liefern, dieser nur den Unterschied der Koinzidenzen zweier gegenseitig verbundener Korrespondenzen. Auf der anderen Seite haben wir schon als einen Vorzug des Geschlechtsatzes hervorgehoben [65], daß dabei die Abzählung zusammenfallender Koinzidenzen nach ganz bestimmten Regeln geschieht, ohne daß es nötig wäre, die oft schwierig zu bestimmenden Ordnungen unendlich kleiner Größen zu vergleichen. Dadurch kam uns der Geschlechtsatz in [113] bei Anwendungen des einfachen Korrespondensatzes zugute, und dies kann ebenso bei Anwendung des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzprinzips eintreffen. Zugunsten des allgemeinen Geschlechtsatzes ist aber besonders hervorzuheben, daß die Brauchbarkeit des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes von gewissen Voraussetzungen bedingt war, nämlich entweder von der Existenz der in [116] und [119] benutzten Hilfskurven oder von der Möglichkeit der in [124] benutzten Reduktion auf eine Kurve vom Geschlecht 0 oder, wie am Schluß von [125], auf andere Fälle, wo die Anzahl der Koinzidenzen schon bekannt ist, während der Geschlechtsatz solchen Bedingungen nicht unterworfen ist. Dieser Vorteil wurde am Schlusse von [125] benutzt.

Daher kann man auch nicht einen allgemeinen Beweis des sich auf mehrdeutiges Entsprechen beziehenden Geschlechtsatzes auf Anwendungen des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes stützen. Ein solcher Beweis wird nur dann möglich, wenn man sich auf solche Fälle beschränkt, in welchen man die Koinzidenzen beider im allgemeinen Geschlechtsatz betrachteten Korrespondenzen je für sich durch den *Cayley-Brill*schen Korre-

spondenzsatz bestimmen kann. Dies wird besonders dann eintreten, wenn die einem Punkt P_1 der Kurve c_1 entsprechenden α_2 Punkte P_2 der Kurve c_2 sich durch eine gewisse vom Punkt P_1 abhängige Kurve k_2 ausschneiden lassen, die die Kurve c_2 sonst nur in festen Punkten schneidet, und auch umgekehrt die einem Punkt P_2 der Kurve c_2 entsprechenden α_1 Punkte P_1 sich durch eine von P_2 abhängige Kurve k_1 ausschneiden lassen, die die Kurve c_1 sonst nur in festen Punkten schneidet. In diesem Fall werden die anderen Punkte P'_1, die zusammen mit einem gegebenen Punkt P_1 demselben Punkt P_2 entsprechen, α_2 Gruppen von $\alpha_1 - 1$ Punkten angehören, die je durch eine durch P_1 gehende Kurve k_1 ausgeschnitten werden, also zusammen durch die aus diesen α_2 Kurven zusammengesetzte Kurve, die α_2-mal durch P_1 geht. Zwischen den Punkten P_1 und P_1 findet also eine $(\alpha_2(\alpha_1 - 1), \alpha_2(\alpha_1 - 1))$-Korrespondenz von der Wertigkeit α_2 statt. Die η_1 Koinzidenzen dieser Korrespondenz werden daher durch die folgende Gleichung

$$(1) \qquad \eta_1 = 2\alpha_2(\alpha_1 - 1) + 2\alpha_2 p_2$$

bestimmt, wo p_1 das Geschlecht der Kurve c_1 ist. Ebenso findet man

$$(2) \qquad \eta_2 = 2\alpha_1(\alpha_2 - 1) + 2\alpha_1 p_2,$$

wo η_2 die Anzahl der Koinzidenzen zweier demselben Punkt P_1 ententsprechender Punkte P_2 und p_2 das Geschlecht der Kurve c_2 bezeichnet.

Subtrahiert man (1) von (2), so erhält man die Gleichung

$$(3) \qquad \eta_2 - \eta_1 = 2\alpha_1(p_2 - 1) - 2\alpha_2(p_1 - 1),$$

durch welche wir in [65] (11) den allgemeinen Geschlechtsatz ausgedrückt haben. Dieser wird natürlich überflüssig, wenn man die Ausdrücke (1) und (2) für die einzelnen Koinzidenzen bereits besitzt — es wäre denn, daß man ihre nicht aus (1) und (2) folgende Umbildung in [65] (10) zur Abzählung zusammenfallender Lösungen benutzen wollte.

Wegen der hier genannten wechselseitigen Vorteile kann es in zusammenhängenden Untersuchungen oft nützlich sein, von den hier besprochenen Hilfsmitteln bald das eine, bald das andere, und neben ihnen auch den einfachen Korrespondenzsatz für Punkte einer Geraden, Strahlen oder Ebenen eines Büschels zu benutzen. In den folgenden Beispielen, die namentlich die Anwendung der *Cayley-Brill*schen Korrespondenzformel beleuchten sollen, werden wir daher mehrmals auch die übrigen, oben angeführten Sätze heranziehen.

[127] (1, 1)-Korrespondenzen auf einer Kurve dritter Ordnung; *Steiner*sche Vielecke. Wir fangen die weiteren Anwendungen des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes mit einer Untersuchung darüber an, welche (1,1)-Korrespondenzen auf einer Kurve dritter Ordnung c_3 überhaupt möglich sind.



Seien P_1 und P_2 zwei entsprechende Punkte einer $(1, 1)$-Korrespondenz auf c_3. Durch x werden wir die Klasse der Umhüllungskurve der Geraden $P_1 P_2$ bezeichnen, so daß diese Kurve, wenn die Beziehung involutorisch ist, d. h. wenn man immer P_1 mit P_2 vertauschen kann, eine doppelt zu zählende Kurve von der Klasse $\frac{x}{2}$ ist; die Anzahl der Koinzidenzen nennen wir y.

Projizieren wir nun zunächst die Punktreihen von einem Punkt A der Kurve aus, so wird man zwischen den Geraden AP_1 und AP_2 eine $(2, 2)$-Korrespondenz erhalten. Ein Teil der vier Koinzidenzen dieser Korrespondenz rührt von den y Koinzidenzen der Punkte P_1 und P_2 her. Daraus folgt, daß $y \leqq 4$ ist, so daß wir im folgenden nur die Fälle $y = 4, 3, 2, 1, 0$ zu untersuchen haben. Bei den übrigen Koinzidenzen der korrespondierenden Büschel AP_1 und AP_2 wird die Gerade $AP_1 P_2$ eine der durch A gehenden x Tangenten an die Einhüllende der Geraden $P_1 P_2$ sein. Außerdem werden durch A zwei Tangenten an diese gehen, nämlich die Geraden, die den Punkt A selbst, je nachdem man ihn als einen Punkt P_1 oder einen Punkt P_2 betrachtet, mit dem entsprechenden verbinden. Also ist

$$(1) \qquad 4 = y + x - 2 \quad \text{oder} \quad x + y = 6.$$

Um den Fall $y = 4$ näher zu untersuchen, können wir den Punkt A im besondern als den dritten Schnittpunkt der Kurve c_3 mit einer Geraden $P_1 P_2$ wählen. Dann werden die korrespondierenden Büschel 5 Koinzidenzen enthalten, und da die Bestimmung dieser Koinzidenzen von einer Gleichung vierten Grades abhängt, so müssen alle Geraden $P_1 P_2$ durch A gehen. Die korrespondierenden Punkte werden also durch die Geraden eines Büschels, dessen Scheitel A auf c_3 liegt, ausgeschnitten; die 4 Koinzidenzen finden in den Berührungspunkten der diesem Büschel angehörenden Tangenten statt. Zwar wird $x = 2$; die Korrespondenz ist aber involutorisch und die Umhüllungskurve reduziert sich also auf einen Punkt (A). Dieser bekannten Art von Korrespondenzen gehört somit jede $(1, 1)$-Korrespondenz auf c_3 mit 4 Koinzidenzen an.

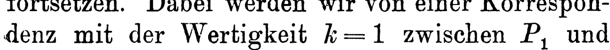
Da die Kurve c_3 vom Geschlecht $p = 1$ ist, so hat man für alle die hier betrachteten $(1, 1)$-Korrespondenzen

$$(2) \qquad y = 2 + 2k,$$

wo k die Wertigkeit der Korrespondenz ist. Also bekommt man für $y = 4, 3, 2, 1, 0$ die Werte $k = 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} -1$. Projiziert man den Punkt P_1 von einem festen Punkt B_1 der Kurve aus auf diese selbst in den Punkt P_3, so wird zwischen P_2 und P_3 eine neue $(1, 1)$-Korrespondenz von der Wertigkeit $-k$ stattfinden [121]. Auf diese Weise können wir die Korrespondenzen mit den negativen Wertigkeiten $-\frac{1}{2}$ und -1 auf jene mit den Wertigkeiten $\frac{1}{2}$ und 1 zurückführen. Im letzten Fall schneidet, wie wir sahen, $P_2 P_3$ die Kurve in einem festen Punkt B_2.

Eine (1, 1)-Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 mit der Wertigkeit -1, also mit 0 Koinzidenzen kann demnach immer dadurch entstehen, daß (Fig. 22) die Geraden, die P_1 und P_2 beziehungsweise mit zwei festen Punkten der Kurve B_1 und B_2 verbinden, sich in einem beweglichen Punkt P_3 der Kurve schneiden. Da der Punkt B_1 ganz willkürlich auf der Kurve gewählt werden konnte, so sieht man, daß auch eine Korrespondenz der hier genannten Art dadurch völlig bestimmt ist, daß man ein Paar entsprechender Punkte kennt.

Die hier benutzte Bildung neuer Korrespondenzen läßt sich weiter fortsetzen. Dabei werden wir von einer Korrespondenz mit der Wertigkeit $k = 1$ zwischen P_1 und



P_2 ausgehen, die dadurch bestimmt ist, daß $P_1 P_2$ die Kurve in einem festen Punkt A_1 schneidet. Ziehen wir die Gerade $P_2 P_3$ durch einen festen Punkt A_2 der Kurve, und ist P_3 ihr dritter Schnittpunkt, ziehen wir weiter $P_3 P_4$ durch den festen Punkt A_3 der Kurve, und ist P_4 ihr dritter Schnittpunkt, usw., bis man zu dem dritten Schnittpunkt P_{n+1} der Geraden $P_n A_n P_{n+1}$ kommt, so findet zwischen P_1 und P_{n+1} eine (1, 1)-Korrespondenz statt, deren Wertigkeit $+1$ oder -1 ist, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Im ersten Fall gibt es vier geschlossene n-Ecke $P_1 P_2 \ldots P_n$, die der Kurve c_3 einbeschrieben sind, und deren Seiten die Kurve der Reihe nach in $A_1, A_2, \ldots A_n$ schneiden. P_{n+1} wird mit P_1 in den vier Berührungspunkten der Tangenten zusammenfallen, die man von dem festen Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_{n+1}$ mit der Kurve aus ziehen kann. Im zweiten Fall kann P_{n+1} im allgemeinen nicht mit P_1 zusammenfallen, das Vieleck wird sich also im allgemeinen nicht schließen, es wäre denn, daß es unendlich viele geschlossene Vielecke $P_1 P_2 \ldots P_n$ gäbe, die c_3 einbeschrieben sind, und deren Seiten die Kurve in $A_1, A_2, \ldots A_n$ schneiden. Gibt es also ein solches Vieleck, so muß es unendlich viele geben. In diesem Fall ist A_n der feste Schnittpunkt der Geraden, die P_1 und P_n, zwischen denen dann eine Korrespondenz mit der Wertigkeit $+1$ stattfindet, verbindet. Die so konstruierten Vielecke heißen *Steiner*sche Vielecke.

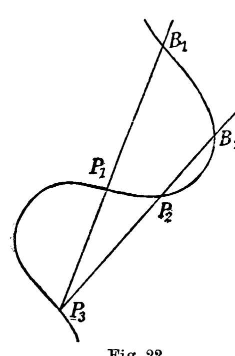


Fig. 22.

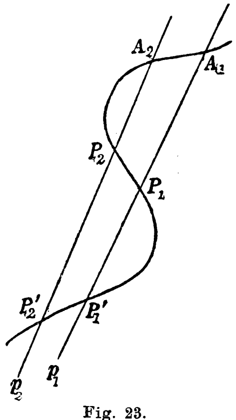


Fig. 23.

[128] (1, 1)-Korrespondenzen auf einer Kurve dritter Ordnung; Fortsetzung. Wir werden hier einen Satz beweisen und anwenden, der alle (1, 1)-Korrespondenzen zwischen Punkten P_1 und P_2 einer c_3 betrifft. Wir werden dabei (Fig. 23) die Korrespondenz zwischen den

Punkten P_2 und P_2' betrachten, die den beweglichen Schnittpunkten P_1 und P_1' einer durch einen festen Punkt A_1 der Kurve c_3 gehenden beweglichen Geraden p_1 entsprechen. Auch diese Korrespondenz wird eine (1, 1)-Korrespondenz sein; sie wird vier Koinzidenzen haben, nämlich in den Punkten, die den Berührungspunkten der von A_1 ausgehenden Tangenten entsprechen. Daraus folgt [127], daß die Geraden $P_2 P_2'$, die wir p_2 nennen werden, auch durch einen festen Punkt A_2 der Kurve gehen müssen. Die Geraden p_1 und p_2 entsprechen sich gegenseitig eindeutig, bilden also zwei projektive Büschel [98]. Da das Zusammenfallen der Punkte P_1 und P_1' das der Punkte P_2 und P_2' zur Folge hat und umgekehrt, so müssen sich die in den Büscheln enthaltenen Tangenten, die c_3 nicht in A_1 oder A_2 selbst berühren, entsprechen. Wenn die vorausgesetzten eindeutigen Beziehungen zwischen den Punkten auf c_3 überhaupt möglich sein sollen, so muß sich das (2, 2)-deutige Entsprechen der Schnittpunkte entsprechender Geraden p_1 und p_2 der projektiven Büschel so in zwei (1, 1)-deutige Beziehungen spalten, daß in der einen P_2, in der anderen P_2' dem Punkte P_1 entspricht (vgl. 101).

Wir wollen versuchen, durch die Wahl des festen Punktes A_1 die Erzeugung der Korrespondenz zu vereinfachen. Aus der Bestimmung von A_2 geht hervor, daß, wenn die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 gegeben ist und A_1 sich bewegt, eine (1, 1)-Korrespondenz zwischen A_1 und A_2 stattfindet. Bei dieser Bestimmung können P_1 und P_2 zwei feste Punkte sein, die sich in der vorgelegten Korrespondenz entsprechen. Die Wertigkeit dieser Korrespondenz, also auch der zwischen P_1' und P_2' haben wir k genannt. Die Summe der Wertigkeiten der Korrespondenzen zwischen P_2' und P_1' und zwischen P_2' und A_1 ist, da P_1 fest liegt, 0, weil A_1 und P_1' die beweglichen Schnittpunkte einer durch den Punkt P_2' bestimmten, aber nicht durch P_2' gehenden Geraden ist [119]. Also hat die Korrespondenz zwischen A_1 und P_2' die Wertigkeit $-k$. Ebenso wird, da P_2 fest liegt, die Summe der Wertigkeiten der Korrespondenzen zwischen A_1 und P_2' und zwischen A_1 und A_2 gleich 0 sein. Also hat die Korrespondenz zwischen A_1 und A_2 dieselbe Wertigkeit k wie die zwischen P_1 und P_2; sie wird daher auch, wie diese, y Koinzidenzen haben. Aus der Konstruktion des einem Punkt A_1 entsprechenden Punktes A_2 folgt übrigens, daß die Tangenten in den Koinzidenzpunkten der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 immer durch Koinzidenzpunkte der Korrespondenz zwischen A_1 und A_2 gehen; um dies einzusehen, genügt es, bei dieser Konstruktion koinzidierende Punkte P_1 und P_2 zu benutzen.

Also: Wenn auf einer Kurve c_3 eine (1, 1)-Korrespondenz mit y Koinzidenzen gegeben ist, so wird c_3 auch y solche Punkte A enthalten, welche Scheitel projektiver Büschel sind, die entsprechende Punkte P_1 und P_2 projizieren. Die durch A gehenden und nicht in A berührenden Tangenten werden ent-

weder den Büscheln entsprechend gemeinsam sein oder anderen dieser vier Tangenten entsprechen. Ein den Büscheln entsprechend gemeinsamer Strahl ist entweder eine solche Tangente, oder er schneidet c_3 in zwei Koinzidenzpunkten, oder er schneidet die Kurve in zwei Punkten, die sich gegenseitig entsprechen. Die Tangente in einem Koinzidenzpunkt geht immer durch einen der y Punkte A.

Wenden wir nun diesen Satz zunächst auf eine (1, 1)-Korrespondenz mit der Wertigkeit 1 an, so wird einer der ihr angehörenden Scheitel projektiver Büschel der Punkt A sein, der auf allen Geraden $P_1 P_2$ liegt, die entsprechende Punkte P_1 und P_2 verbinden. Die projektiven Büschel sind dann identisch und die Tangenten in allen vier Koinzidenzpunkten von P_1 und P_2, welche wir C, D, E, F nennen wollen, gehen durch diesen Punkt A. Durch die drei anderen Scheitel, die wir A', A'', A''' nennen wollen, geht also keine der Tangenten in C, D, E, F. Sie müssen dagegen Diagonalpunkte (Schnittpunkte der Gegenseiten) in dem von C, D, E, F gebildeten vollständigen Viereck sein, A' z. B. der Schnittpunkt der Seiten CD und EF, die dann den projektiven Büscheln $A'P_1$ und $A'P_2$ entsprechend gemeinsam sind. Wir sehen also (Fig. 24), daß diese Diagonalpunkte auf der Kurve c_3 liegen. In den genannten projektiven Büscheln $A'P_1$ und $A'P_2$ werden sich die vier durch A' gehenden Tangenten $A'G$, $A'H$, $A'I$, $A'K$ in zwei einander entsprechende Paare teilen; dies gilt also auch von ihren Berührungspunkten G, H, I, K in der gegebenen Korrespondenz. Wenn z. B. H dem Punkt G entspricht, K dem Punkt I, so folgt daraus, daß die Geraden HG und IK durch A gehen. Da die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 involutorisch ist, so wird auch die Projektivität der Geraden $A'P_1$ und $A'P_2$ eine Involution sein.

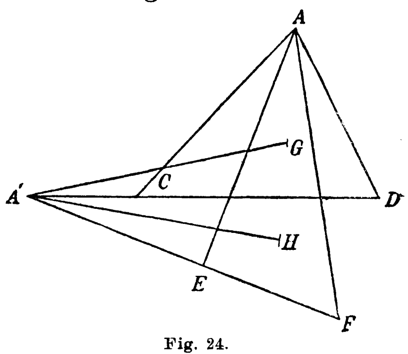


Fig. 24.

Wie wir gesehen haben, findet zwischen den Punkten P_1 und den dritten Schnittpunkten P_2' der Geraden $A'P_2$ eine Korrespondenz mit der Wertigkeit -1 statt, in welcher offenbar auch die Berührungspunkte H und G, I und K sich gegenseitig entsprechen. Nun ist A' Scheitel projektiver Büschel, die die korrespondierenden Punkte P_1 und P_2' projizieren. Solcher Scheitel gibt es aber im allgemeinen keinen für Korrespondenzen mit der Wertigkeit -1, da dann $y = 0$ ist; wenn es einen gibt, so müssen es also unendlich viele sein, und jeder Punkt der Kurve ist ein solcher Scheitel, also auch, wie A', Schnittpunkt der Tangenten in zwei Paaren entsprechender Punkte der Korrespondenz. Anders ausgedrückt: die hier betrachtete involutorische (1, 1)-Korrespondenz

ist zwischen P_1 und P_2' von Paaren solcher Punkte gebildet, deren Tangenten sich auf der Kurve schneiden. Da einem Punkt P_1 drei Punkte P_2' auf diese Weise entsprechen, so gibt es auf c_3 drei solche involutorische Korrespondenzen mit der Wertigkeit -1 und ohne Koinzidenzen.

Übrigens sieht man leicht, daß diese die einzigen involutorischen (1, 1)-Korrespondenzen auf c_3 mit der Wertigkeit -1 sind. Seien nämlich (Fig. 25) P_1 und P_2 zwei willkürliche, einander entsprechende Punkte einer (1, 1)-Korrespondenz mit der Wertigkeit -1. Sie können dann [127] dadurch bestimmt werden, daß die Geraden P_1B_1 und P_2B_2, die sie mit zwei festen Punkten der Kurve verbinden, sich in einem Punkt der Kurve schneiden, den wir P_1' nennen wollen. Ist die Korrespondenz involutorisch, so muß auch der Schnittpunkt der Geraden P_1B_2 und P_2B_1 auf c_3 liegen. Diesen Schnittpunkt nennen wir P_2', weil er nach der Konstruktion entsprechender Punkte dem Punkte P_1' entsprechen muß. Da den zwei beweglichen Schnittpunkten der Geraden $B_1P_1P_1'$ die beweglichen Schnittpunkte der Geraden $B_1P_2P_2'$ entsprechen, so ist B_1 Scheitel solcher projektiven Strahlenbüschel, die entsprechende Punkte projizieren. Die involutorische Korrespondenz gehört also den eben besprochenen an. Wenn P_1' in den Punkt B_1 fällt, muß P_2' in B_2 fallen. Die Punkte B_1 und B_2 sind also entsprechende Punkte derselben Korrespondenz.

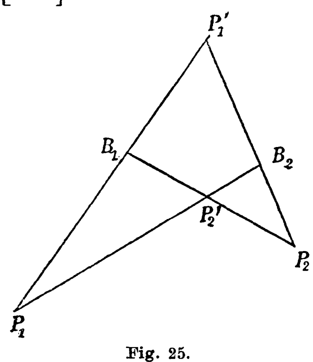


Fig. 25.

Gehen wir nun zu den (1, 1)-Korrespondenzen mit den Wertigkeiten $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$ oder mit $y = 3, 2, 1$ Koinzidenzen über. Die Tangente in einem Koinzidenzpunkt geht jedenfalls durch einen Punkt A, der Scheitel ist für projektive Büschel, deren entsprechende Gerade durch entsprechende Punkte P_1 und P_2 gehen. Die genannte Tangente entspricht sich selbst; da aber höchstens y der vier von A ausgehenden Tangenten sich selbst entsprechen können, so muß es zwei oder drei geben, die einander zyklisch entsprechen. Dann müssen die vier Tangenten beziehungsweise harmonisch oder äquianharmonisch verbunden, also die Kurve c_3 eine harmonische oder äquianharmonische Kurve dritter Ordnung sein. Die hier genannten Korrespondenzen nennen wir, da sie nur diesen singulären Kurven angehören, singulär. Wir werden die singulären Korrespondenzen jeder dieser Kurvenarten für sich betrachten.

[129] Singuläre Korrespondenzen auf einer harmonischen Kurve dritter Ordnung. Wie für eine allgemeine Kurve dritter Ord-

nung, so werden sich auch für eine harmonische Kurve c_3 dieser Ordnung (1, 1)-Korrespondenzen mit drei oder einer Koinzidenz als unmöglich erweisen. Wir werden daher nur versuchen, ihr eine (1, 1)-Korrespondenz mit zwei Koinzidenzen aufzuerlegen und nehmen an, daß in einer solchen dem Punkte P_1 ein Punkt P_2 entspricht. Sei C einer der zwei Koinzidenzpunkte. Der Schnittpunkt A der Tangente in C mit c_3 wird dann nach [128] Scheitel zweier projektiver Büschel sein, die entsprechende Punkte P_1 und P_2 projizieren. Diesen Büscheln wird der Strahl AC entsprechend gemeinsam sein, und das gegenseitige Entsprechen der drei anderen von A ausgehenden Tangenten wird nur dadurch möglich, daß die eine AD mit dem Berührungspunkt D auch den Büscheln entsprechend gemeinsam ist, während die anderen AE und AF mit den Berührungspunkten E und F sich gegenseitig entsprechen. Die Projektivität muß dann eine Involution mit den Doppelstrahlen AC und AD sein, was eben dadurch möglich wird, daß die Kurve harmonisch ist, und man also AC und AD unter den vier durch A gehenden Tangenten so wählen kann, daß die anderen AE und AF in Beziehung auf sie harmonisch verbunden sind. E und F werden sich in der Korrespondenz gegenseitig entsprechen.

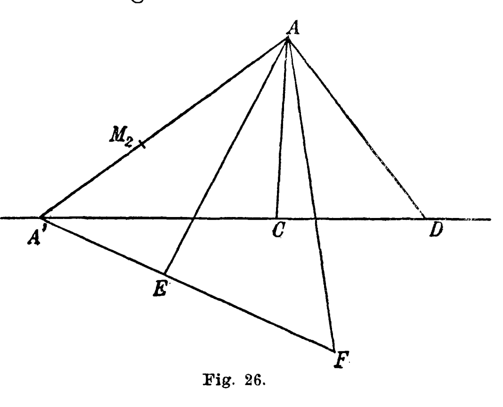


Fig. 26.

Der andere Scheitel A' projektiver Büschel, die die entsprechenden Punkte P_1 und P_2 projizieren (Fig. 26), liegt auf keiner der Tangenten in den Koinzidenzpunkten C und D. Die Gerade CD muß aber den Büscheln entsprechend gemeinsam sein. A' ist also der Schnittpunkt dieser Geraden mit c_3; daher wird auch EF durch diesen Punkt gehen [128] und der andere entsprechend gemeinsame Strahl der projektiven Büschel sein. Die vier durch A' gehenden Tangenten müssen sich in einer Ordnung entsprechen, die von der in [128] betrachteten, für Korrespondenzen mit der Wertigkeit 1 geltenden verschieden ist. Um aber eine Konstruktion des einem willkürlichen Punkt P_1 der Kurve entsprechenden Punktes P_2 zu bekommen, die auch zum Beweis der Existenz der hier betrachteten Korrespondenzen benutzt werden kann, wird es bequemer sein, zur Bestimmung der projektiven Büschel ihre entsprechend gemeinsamen Strahlen $A'CD$ und $A'EF$ und den Strahl zu benutzen, dem der Strahl $A'A$ entsprechen soll. Ist M_2 der dritte Schnittpunkt der Kurve mit AA', so muß er einem, M_1, der zwei Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden durch A entsprechen, die mit AA' in Beziehung auf AC und AD harmonisch verbunden ist. In den projektiven

Büscheln mit dem Scheitel A' muß dann $A'A$ dem Strahle $A'M_1$ entsprechen, also

(1) $$A'(C, E, M_1, P_1) = A'(C, E, A, P_2).$$

Wenn nun C ein willkürlicher Punkt der Kurve ist und die Punkte A, D, E, F, A', M_1 so, wie hier angegeben, konstruiert werden, wenn ferner P_1 sich auf der Kurve bewegt, während AP_1 und AP_2 in Beziehung auf AC und AD harmonisch verbunden sind, und die Strahlen $A'P_2$ durch (1) bestimmt werden, so kann man beweisen, daß auch P_2 sich auf der Kurve c_3 bewegt; die Existenz zweier $(1, 1)$-Korrespondenzen mit Koinzidenzen allein in C und D, nämlich derjenigen, die der verschiedenen Wahl des Punktes M_1 unter zwei Schnittpunkten derselben durch A gehenden Geraden entsprechen, wird damit bewiesen sein.

Um den Beweis zu führen, suchen wir den Ort der so konstruierten Punkte P_2. Daß er von der Ordnung 3 ist, findet man durch Abzählung seiner Schnittpunkte mit Geraden durch A oder A'. Wie c_3 geht er durch diese Punkte und berührt AC, AD, AE, AF in C, D, E, F, was 10 Schnittpunkte mit c_3 ergibt. Er muß also wirklich mit c_3 zusammenfallen.

Nennen wir nun die Punkte, in welchen die Strahlen AP_1, AP_2 und AM_1 die Kurve außer in P_1, P_2 und M_1 schneiden, P_1', P_2', M_1'. Dem Punkt P_1 entspricht der Punkt P_2. Dem Punkt P_2 wird ein Schnittpunkt der Geraden AP_1 entsprechen, aber nicht P_1, weil (1) keine Involution ist[1]), vielmehr P_1'. Man erhält auf diese Weise die viergliedrige Gruppe von Punkten, von denen jeder dem vorhergehenden entspricht

$$P_1 P_2 P_1' P_2' P_1.$$

Man sieht, daß dem Punkt P_1 der Punkt P_2 oder P_2' entsprechen wird, je nachdem man P_1 als der einen oder der anderen der korrespondierenden Punktreihen angehörig betrachtet. Man erhält die eine oder die andere dieser Korrespondenzen, je nachdem man bei der Konstruktion den Punkt M_1 oder den Punkt M_1' benutzt. Sie werden übrigens zueinander reziprok sein.

An die hier betrachtete singuläre $(1, 1)$-Transformation schließen sich auch mehrdeutige Transformationen an, deren Wertigkeiten sich aus der Wertigkeit 0 der $(1, 1)$-Transformationen herleiten lassen. Betrachten wir z. B., indem wir die Benennungen beibehalten, die Korrespondenz zwischen P_1 und dem dritten Schnittpunkt P_3 der Geraden P_1P_2. Einem Punkt P_1 entspricht wegen des eindeutigen Entsprechens des Punkts P_2 auch nur ein Punkt P_3. Die Umhüllungskurve der Ge-

1) Die Beziehung (1) kann ja jedenfalls keine Involution für die beiden Punkte M_1 und M_1' sein, und die eine Korrespondenz wird sogleich auf die andere führen.

raden $P_1 P_2$ ist ([127] (1)) von der Klasse 4. Ein beliebiger Punkt der Kurve c_3 ist der Punkt P_1 einer der durch ihn gehenden Geraden $P_1 P_2$, der Punkt P_2 der einer anderen, also der Punkt P_3 der zweier Geraden $P_1 P_2$. Als Punkt P_3 betrachtet, entsprechen ihm also zwei Punkte P_1. Also ist für diese Korrespondenz $\alpha_1 = 2$, $\alpha_3 = 1$. Der Punkt P_3 wird durch eine Gerade ausgeschnitten, die durch P_1 selbst und außerdem durch den ihm in unserer $(1, 1)$-Korrespondenz entsprechenden Punkt P_2 geht. Da die Wertigkeit letzterer Korrespondenz 0 ist, wird die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und P_3 gleich 1 sein [119]. Diese Korrespondenz hat also 5 Koinzidenzen. Übrigens wird die Umhüllungskurve der Geraden $P_1 P_2$ die Kurve c_3 in den folgenden Punkten berühren: 1. in den 2 Koinzidenzpunkten der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2, 2. in den 5 Koinzidenzpunkten der Korrespondenz zwischen P_1 und P_3 und 3. in den 5 Koinzidenzpunkten der Korrespondenz zwischen P_2 und P_3. Dieser Umstand hätte auch benutzt werden können, um die offenbar unter sich gleich großen Anzahlen der Koinzidenzen letzterer Korrespondenzen zu finden.

In ähnlicher Weise finden wir z. B. für die Korrespondenz zwischen P_1' und P_3 $\alpha_1' = 2$, $\alpha_3 = 1$ und die Wertigkeit -1, also nur eine Koinzidenz. Der Punkt, in dem diese stattfindet, wird dadurch bestimmt, daß der Punkt P_2 mit A auf der Tangente, die c_3 in diesem Punkt berührt, zusammenfällt, P_1 also in den diesem entsprechenden Punkt fällt, so daß sowohl P_1' als auch P_3 der dritte Schnittpunkt der Geraden $A P_1$ sein wird. Solche Übungsbeispiele kann man leicht mehrere bilden.

Wir bemerken noch, daß man die Wertigkeit 0 der singulären Korrespondenzen einer harmonischen Kurve dritter Ordnung auch aus dem *Cayley-Brill*schen Satze herleiten kann. Da die Punkte P_2 und P_2', die einem Punkt P_1 entsprechen, durch eine nicht durch P_1 gehende Linie $A P_2 P_2'$ bestimmt werden, ist die Summe dieser Wertigkeiten 0, und da die Korrespondenzen gleichartig, ja reziprok sind, haben sie dieselbe Wertigkeit, die also 0 sein muß.

[130] Singuläre Korrespondenzen auf äquianharmonischen Kurven dritter Ordnung. Wenden wir uns nun zu den Korrespondenzen mit der Wertigkeit $\frac{1}{2}$, die bei den äquianharmonischen Kurven und — wie sich gleich zeigt, wenn man versucht, die jetzt anzustellenden Betrachtungen auch auf andere Kurven anzuwenden — nur bei diesen denkbar sind, während ihre wirkliche Existenz nachher zu beweisen ist. Wie die Korrespondenz selbst 3 Koinzidenzen hat, so gibt es [128] auch auf der Kurve 3 Punkte A, A' und A'', die gemeinschaftliche Scheitel projektiver Büschel sind, die entsprechende Punkte P_1 und P_2 projizieren. Durch diese Scheitel gehen die Tangenten in den Koinzidenzpunkten C, C', C'' der gegebenen Korrespondenz. Geht nun die Tangente in C durch A, so wird keine der anderen genannten Tangenten auch durch A gehen, einmal weil das zyklische Entsprechen der übri-

gen durch A gehenden Tangenten AD, AE, AF nur dann möglich ist, wenn es deren drei sind, sodann eben wegen des äquianharmonischen Charakters des Büschels, wonach entweder

$$(1) \qquad A(C, D, E, F, P_1) \overline{\wedge} A(C, E, F, D, P_2),$$

oder

$$A(C, E, F, D, P_1) \overline{\wedge} A(C, D, E, F, P_2)$$

ist, wo jedoch letztere Beziehung nur eine Vertauschung der korrespondierenden Punktreihen P_1 und P_2 in derselben Korrespondenz, also eine Umkehrung, bedeutet. Es genügt also, die Projektivität (1) zu betrachten. Die so bestimmten projektiven Büschel haben die Tangente AC entsprechend gemeinsam und noch einen Strahl, der durch die anderen Koinzidenzpunkte der Korrespondenz gehen muß (Fig. 27). In ähnlicher Weise sieht man, daß bei geeigneter Wahl der Benennungen der Punkt A' der Schnittpunkt der Tangente in C' und der Geraden $C''C$, und der Punkt A'' der Schnittpunkt der Tangente in C'' und der Geraden CC' sein wird, und daß die Büschel der durch A' und A'' gehenden Geraden zu ähnlichen Projektivitäten, wie die durch (1) bestimmte, führen. Da es jedoch dabei nicht ersichtlich ist, in welcher Ordnung die Tangenten durch A' und A'' zu nehmen sind, um dieselbe und nicht die umgekehrte Korrespondenz zu erhalten, müssen wir einen dieser Büschel anders bestimmen, um eine eindeutige Konstruktion des einem Punkt P_1 entsprechenden Punktes P_2 und einen sich hieran anschließenden Existenzbeweis zu bekommen.

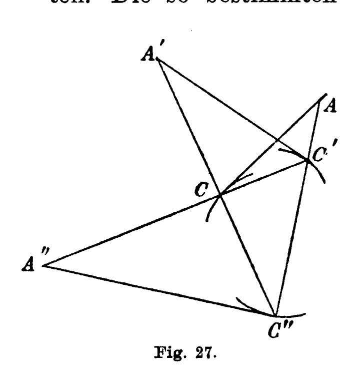


Fig. 27.

Um dies in allgemeinster Weise zu erreichen, möge C ein willkürlicher Punkt der Kurve sein; wir bestimmen sodann A, D, E, F, C', C'' in der bereits angebenen Weise und A' als den dritten Schnittpunkt der Geraden CC'', ohne daß wir wüßten, daß er auch auf der Tangente in C' liegt. Wir werden nun vorläufig beweisen, daß die Punkte A, D, E, F, C'', A' auf einem Kegelschnitt liegen. Dies gelingt, wenn man mittels eines durch A, D, E, F bestimmten Büschels von Kegelschnitten und eines durch C gelegten Strahlenbüschels eine Kurve erzeugt, indem man ein (1, 1)-deutiges Entsprechen der Büschel dadurch herstellt, daß man die Strahlen CD, CE, CF beziehungsweise den aus AD und EF, aus AE und FD, aus AF und DE zusammengesetzten Kegelschnitten zuordnet. Der Strahlenbüschel (C) und der Büschel der Tangenten der Kegelschnitte in A werden dann den Kegelschnitt $ACDEF$ erzeugen, der als Polarkegelschnitt des Punktes A die Kurve c_3 in A berührt [19]. Die durch den Büschel von Kegelschnitten und den Strahlenbüschel er-

zeugte Kurve ist von der Ordnung 3 und berührt c_3 in den Punkten A, C, D, E, F, was nur möglich ist, wenn sie mit c_3 identisch ist. In diesen Büscheln enspricht die Gerade CC'' dem Kegelschnitt $ADEFC''$. Dieser Kegelschnitt muß also auch den dritten Schnittpunkt A' dieser Geraden enthalten.

Daraus schließen wir, da $A'C''$ durch C geht und AC'' den Büscheln (1) entsprechend gemeinsam ist, daß

(2) $A'(C,D,E,F) = A(C'',D,E,F) = A(C'',E,F,D) = A'(C,E,F,D)$ ist

Lassen wir nun den Punkt P_1 die Kurve c_3 durchlaufen, und bestimmen dann den Punkt P_2 durch die Projektivität (1) und durch die Beziehung

$$A'(C,D,E,F,P_1) \barwedge A'(C,E,F,D,P_2), \tag{3}$$

so können wir beweisen, daß auch der Punkt P_2 dieselbe Kurve c_3 durchlaufen wird; zwischen den Punkten P_1 und P_2 dieser Kurve wird dann wirklich eine $(1,1)$-Korrespondenz von der vorausgesetzten Art stattfinden.

Um nun wirklich den Ort des Punktes P_2 zu bestimmen, bemerken wir erstens, das er sich wegen der $(2,2)$-Korrespondenz, die zwischen den Strahlen AP_2 und $A'P_2$ stattfindet, unmittelbar als eine Kurve von vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A und A' erweist [18]. In jeden dieser Punkte fallen also zwei Schnittpunkte mit c_3. Sucht man sodann seine Schnittpunkte mit den Geraden AC, AD, AE, AF, AC'', so zeigt die Konstruktion, daß er c_3 in C, D, E, F berührt und in C'' schneidet. Man erhält so im ganzen 13 Schnittpunkte, was nur bedeuten kann, daß der Ort die Kurve c_3 ganz enthalten, also aus dieser Kurve und der Geraden AA' bestehen muß. Die Existenz der $(1,1)$-Korrespondenz mit Koinzidenzen in C, C', C'' ist somit bewiesen.

Wegen des zyklischen Charakters der projektiven Büschel, die die entsprechenden Punkte der Korrespondenz bestimmen, muß auch diese 3-gliedrig zyklisch sein. Bezeichnen wir mit P_1, P_2, P_3 drei sich in dieser Korrespondenz zyklisch entsprechenden Punkte, so würde P_3 dem Punkt P_1 in der umgekehrten Korrespondenz entsprechen, die man durch Vertauschung der Punkte E und F erhalten würde. Die Punkte P_1', P_2', P_3', in welchen die Geraden AP_1, AP_2, AP_3 die Kurve noch weiter schneiden, bilden eine neue zyklische Folge entsprechender Punkte derselben Korrespondenz; denn wegen (1) muß der dem Punkt P_1' entsprechende Punkt auf AP_2 liegen, kann aber nicht P_2 sein.

Es gibt auf der äquianharmonischen Kurve noch Korrespondenzen mit der Wertigkeit $-\frac{1}{2}$. Da in einem solchen die Punkte, die den Punkten P_1 entsprechen, dadurch bestimmt werden können, daß man die den Punkten P_1 in einer Korrespondenz mit der Wertigkeit $+\frac{1}{2}$ entsprechenden Punkte P_2 von einem festen Punkt der Kurve aus projiziert [121], so ist hier kein besonderer Existenzbeweis nötig. Wählt man als Projek-

tionszentrum den einzigen Punkt A, von dem aus die entsprechenden Punkte in der Korrespondenz mit der Wertigkeit $-\frac{1}{2}$ (also mit einer Koinzidenz) durch projektive Büschel projiziert werden [128], so sieht man, daß auch jetzt die durch entsprechende Punkte gehenden Strahlen durch die Projektivität (1) bestimmt werden. Halten wir aber nun die Bezeichnungen P_1, P_2, P_3 für die sich in der früher betrachteten Korrespondenz entsprechenden Punkte fest, so erhalten wir jetzt die Folge von 6 sich zyklisch entsprechenden Punkten

$$P_1 P_2' P_3 P_1' P_2 P_3' P_1.$$

Die Koinzidenz findet im Punkte C statt.

Von anderen Korrespondenzen auf derselben Kurve betrachten wir zunächst jene, die vom Punkte P_1 und dem dritten Schnittpunkt P_4 der Geraden $P_1 P_2$ mit der Kurve gebildet wird. Dem Punkte P_1 entspricht 1 Punkt P_4. Die Umhüllungskurve der Geraden $P_1 P_2$ ist [127] (1) von der Klasse 3; also ist jeder Punkt der Kurve einmal Punkt P_1, einmal Punkt P_2 und einmal Punkt P_4 der durch ihn gehenden Tangenten an diese Umhüllungskurve. Die Korrespondenz ist also eine (1, 1)-Korrespondenz und ihre Wertigkeit wird $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Sie gehört also derselben Klasse von Korrespondenzen an wie jene, die zwischen P_1 und P_2 stattfindet. Die Umhüllungskurve der Geraden $P_1 P_2$ berührt c_3 in den drei Koinzidenzpunkten der drei Korrespondenzen zwischen P_1 und P_2, P_1 und P_4, P_2 und P_4. Es gibt drei Systeme von ∞^1 Dreiecken, die dieser Umhüllungskurve umbeschrieben und der Kurve c_3 einbeschrieben sind. Jede Tangente der Umhüllungskurve und ebenso jeder Punkt der Kurve c_3 gehört einem Dreiecke jedes Systems an. Da sich zwei Seiten eines Dreiecks, das ein System durchläuft, in einer (1, 1)-Korrespondenz mit drei Koinzidenzen entsprechen, so muß auch die Einhüllende dritter Klasse äquianharmonisch sein.

Wir haben früher [122] einen Spezialfall der hier behandelten (1, 1)-Korrespondenzen betrachtet, nämlich den, in welchem der Punkt A ein Wendepunkt, C der mit ihm zusammenfallende Berührungspunkt einer der vier von A ausgehenden Tangenten ist. D, E und F liegen dann in einer Geraden, nämlich der harmonischen Achse des Punktes A. Da C mit A zusammenfällt, so liegen (Fig. 27) die drei Koinzidenzpunkte der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2, nämlich C, C', C'' auch in einer Geraden und der Punkt A' wird mit C', der Punkt A'' mit C'' zusammenfallen. Darum werden auch C' und C'' Wendepunkte sein. Aus dem zyklischen Charakter der Korrespondenzen (1) und (2) folgt, da sowohl $A'C$ als auch AC'' mit AA' zusammenfällt, daß

$$A'(A, P_1, P_2, P_3) = A'(A, D, E, F) = A(A', D, E, F) = A(A', P_1, P_2, P_3)$$

ist, und daraus folgt wiederum, daß drei sich zyklisch entsprechende Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Geraden liegen. Eben dieser durch die in [122]

benutzte analytische Darstellung hervortretende Umstand ermöglichte die für diesen Spezialfall geltende, einfachere Bestimmung der Wertigkeit. In diesem Spezialfall wird der Punkt, den wir eben P_4 nannten, der Punkt P_3 selbst sein.

[131] Sukzessive (1,1)-Transformationen einer Kurve dritter Ordnung in sich. Es sei $(P_1 P_2)$ eine (1,1)-Korrespondenz, oder wie wir auch sagen können, eine (1,1)-Transformation einer Kurve dritter Ordnung, die dem Punkte P_1 den Punkt P_2 zuordnet, $(P_2 P_3)$ eine solche, die dem Punkt P_2 den Punkt P_3 zuordnet; dann wird die Folge der dadurch ausgedrückten (1,1)-Transformationen der Kurve in sich eine neue Transformation ergeben, die dem Punkt P_1 den Punkt P_3 zuordnet, was man, wenn man die Folge als Multiplikation bezeichnet, so schreiben kann:

$$\text{(I)} \qquad (P_1 P_2)(P_2 P_3) = (P_1 P_3).$$

Hat die eine gegebene Korrespondenz die Wertigkeit 1, in welchem Fall, wie wir in [127] gesehen haben, die entsprechenden Punkte mit einem festen Punkte der Kurve in einer Geraden liegen, die andere die Wertigkeit k, so hat die resultierende Korrespondenz die Wertigkeit $-k$ [121]. Da (I) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &(P_1 P_2)(P_2 P_3)(P_3 P_1) = 1 \quad \text{oder} \quad (P_1 P_2) = (P_1 P_3)(P_3 P_2) \\ &\qquad\qquad \text{oder} \quad (P_2 P_3) = (P_2 P_1)(P_1 P_3), \end{aligned}$$

so wird überhaupt, wenn eine der drei Korrespondenzen die Wertigkeit 1 hat, eine andere die Wertigkeit k, die dritte die Wertigkeit $-k$ haben. Bezeichnen wir nun mit (k) eine Korrespondenz mit der Wertigkeit k, so haben wir also, wenn wir nur die Wertigkeiten berücksichtigen,

$$(k)(1) = (1)(k) = (-k) \text{ und } (k)(-k) = (1).$$

Eine gegebene Korrespondenz (k) kann also durch die Folge einer beliebigen Korrespondenz (1) und einer Korrespondenz $(-k)$ oder solcher Korrespondenzen in umgekehrter Ordnung gebildet werden. Diese Einschiebung einer Korrespondenz (1), sowie der Umstand, daß zwei entgegengesetzte Transformationen $(P_1 P_2)$ und $(P_2 P_1)$ dieselbe Wertigkeit haben, und die durch unsere Gleichungen (II) ausgedrückten Abänderungen der Gleichung (I) lassen sich anwenden, um die Wertigkeit jeder durch sukzessive (1,1)-Korrespondenzen auf einer Kurve dritter Ordnung gebildeten Transformation zu erhalten. Für eine beliebige Kurve dritter Ordnung folgt aus den Gleichungen

$$(1)(1) = (-1) \text{ und } (1)(-1) = (1),$$

daß

$$(-1)(-1) = (-1)(1)(1) = (1)(1) = (-1) \text{ ist.}$$

Für eine harmonische Kurve gibt die Multiplikation einer Transformation (0) mit einer Transformation von der Wertigkeit (1) zwar nur eine

neue Transformation von der Wertigkeit (0). Diese unterscheidet sich jedoch von der ersteren, was man dadurch bezeichnen kann, daß man ihre Wertigkeiten $+0$ und -0 nennt. Entspricht nämlich in der ersten der Punkt P_2 einem beliebigen Punkt P_1, so wird ihm nach der Multiplikation mit einer Transformation (1) ein Punkt P_2' entsprechen, der der dritte Schnittpunkt der Kurve mit der durch einen festen Punkt der Kurve A gehenden Geraden AP_2 ist. Nach r-maliger Wiederholung dieser Operation wird ihm ein Punkt $P_2^{(r)}$ entsprechen, dessen Korrespondenz mit P_1 die Wertigkeit $(-1)^r \cdot 0$ haben wird. Man kann das letzte Projektionszentrum $A^{(r-1)}$ so wählen, daß der Punkt $P_2^{(r)}$, der einem bestimmten Punkt P_1 entspricht, mit dem ihm ursprünglich entsprechenden Punkt P_2 zusammenfällt. Immer wenn r eine gerade Zahl ist, und nur dann, wird sich das einbeschriebene *Steiner*sche r-Eck [127] $P_2 P_2' \dots P_2^{(r-1)}$ durch das Zusammenfallen von $P_2^{(r)}$ mit P_2 für alle Lagen der Punkte P_2, also für alle Punktepaare der gegebenen Korrespondenz $(P_1 P_2)$ schließen, die Korrespondenz ist also mit dieser identisch. Hieraus folgt, daß eine Korrespondenz $(+0)$ beziehungsweise (-0) aus einer Korrespondenz $(+0)$ nur durch Multiplikation mit einer geraden beziehungsweise ungeraden Anzahl von Korrespondenzen (1) gebildet werden kann.

Wählt man für die gegebene Korrespondenz $(P_1 P_2)$ das Projektionszentrum A in dem Punkt, den wir auch in [129] (Fig. 26) A nannten, so wird die Korrespondenz $(P_1 P_2')$ die umgekehrte von $(P_1 P_2)$ sein. Umgekehrte Korrespondenzen gehören dann den zwei verschiedenen Klassen an; es erscheint daher natürlich, den Transformationen $(+0)$ und (-0) einen verschiedenen Sinn beizulegen.

Man findet dann

$$(1)(\pm 0) = (\mp 0)$$

$$(-1)(\pm 0) = (1)(1)(\pm 0) = (1)(\mp 0) = (\pm 0),$$

wo die Vorzeichen von 0 entsprechend zusammengehören.

Da die Änderungen $(P_1 P_2)$ und $(P_1 P_2')$ entgegengesetzt sind, ersieht man aus $(P_2 P_2') = (P_2 P_1)(P_1 P_2')$, daß

$$(\pm 0)(\pm 0) = (1), \; (\pm 0)(\mp 0) = (1)(\mp 0)(\mp 0) = (1)(1) = (-1) \text{ ist.}$$

Für eine äquianharmonische Kurve findet man

$$(1)(\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2}) \text{ und } (1)(-\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}),$$

$$(-1)(\tfrac{1}{2}) = (1)(1)(\tfrac{1}{2}) = (1)(-\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})(-1)$$

$$(-1)(-\tfrac{1}{2}) = (1)(1)(-\tfrac{1}{2}) = (1)(\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})(-1)$$

und daraus, da entgegengesetzte Korrespondenzen dieselbe Wertigkeit haben,

$$(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) = (-1), \; (\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}) = (1) = (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}).$$

Man sieht, daß überhaupt immer, wenn es sich, wie hier, nur um die Bestimmung der Wertigkeit handelt $(k)(l) = (l)(k)$ ist.

[132] Andere Begründung der Existenz der (1,1)-Korrespondenzen auf Kurven dritter Ordnung. Die Existenz der $(1,1)$-Korrespondenzen, die sich als die einzig möglichen mit den Wertigkeiten $+1, 0$ und $\pm \frac{1}{2}$ erwiesen haben, läßt sich auch anders als durch die in [129] und [130] angegebenen Konstruktionen begründen. Seien zwei Punkte A_1 und A_2 der Kurven c_3 Scheitel zweier projektiven Büschel, in welchen die von ihnen ausgehenden vier Tangenten sich in irgend einer für die vorgelegte Kurve möglichen Anordnung entsprechen; schneiden weiter die Strahlen p_1 des ersten Büschels die Kurve in den Punkten P_1 und P_1', die entsprechenden Strahlen p_2 des zweiten Büschels die Kurve in P_2 und P_2': dann wird sich die $(2,2)$-Korrespondenz, die dem Punkt P_1 die zwei Punkte P_2 und P_2' zuordnet, in zwei $(1,1)$-Korrespondenzen spalten, in welchen beziehungsweise P_2 oder P_2' dem Punkt P_1 entspricht. Um dies einzusehen, stellen wir c_3 durch eine *Riemann*sche Fläche dar, welche von dem Punkt P_1 durchlaufen werden soll und deren Verzweigungspunkte man, um Komplikationen zu vermeiden, so legt, daß die ihnen entsprechenden Punkte P_2 und P_2' nicht zusammenfallen. Diese *Riemann*sche Fläche überdeckt man mit einer anderen, auf welcher die P_1 entsprechenden Punkte P_2 und P_2' über P_1 auf verschiedene Blätter fallen. Die Verzweigungspunkte dieser neuen Fläche sind, außer jenen Punkten, in welchen sie nur je für sich dieselben Verzweigungen wie die *Riemann*sche Fläche für P_1 hat, die Punkte, in welchen zwei einem Punkt P_1 entsprechende Punkte P_2 und P_2' zusammenfallen. Diese Verzweigungspunkte sind aber doppelt; denn wenn P_2 in einen solchen fällt, so werden, da die Tangenten in A_1 und A_2 sich entsprechen, zwei ihm entsprechende Punkte P_1 und P_1' und dadurch auch die beiden anderen, diesen Punkten entsprechenden Punkte P_2' zusammenfallen. Da außerdem die Abstände aller entsprechenden Punkte von dieser Grenzlage unter sich gleichzeitig unendlich klein von derselben Ordnung werden, so geschieht ganz dasselbe, wie wenn zwei Verzweigungspunkte, die zwei Blätter einer gewöhnlichen *Riemann*schen Fläche verbinden, zusammenfallen: es entsteht eine Trennung der Blätter. Die zwei Blätter der *Riemann*schen Fläche, auf welcher P_2 und P_2' sich bewegen, bleiben also ganz getrennt. Es entstehen dann zwei Korrespondenzen, in welchen beziehungsweise P_2 und P_2' dem Punkt P_1 entsprechen.

[133] Bestimmung von Kurven, die eine gegebene Kurve in denselben Punkten wie die Kurven eines Büschels treffen. Wir werden jetzt eine Kurve c_n^p betrachten, die nur d Doppelpunkte und sonst keine mehrfachen Punkte hat; also ist $d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$. Die übrigen Kurven, die wir c_1 und c_2 nennen, sollen der Kurve c_n^p

adjungiert sein, d. h. durch ihre Doppelpunkte gehen.[1]) Wir nehmen weiter an, daß die Kurven c_1 von der Ordnung n_1 einen Büschel bilden und außer in festen Punkten, von welchen $2d$ in die Doppelpunkte fallen, die Kurve c_n^p in m_1 beweglichen Punkten P_1 schneiden. Durch s von diesen Punkten, die wir dann besonders mit S bezeichnen, durch die d Doppelpunkte und durch eine zur vollständigen Bestimmung einer Kurve c_2 von der Ordnung n_2 hinreichende Anzahl von anderen festen Punkten, die auch teilweise auf c_n^p liegen können, legen wir eine solche Kurve c_2, die c_n^p außer in den Punkten S noch in $m_2 - s$ beweglichen Punkten P_2 schneidet. Wir suchen die Anzahl ξ_{s+1} der Kurvenpaare c_1 und c_2, die mit c_n^p $s+1$ gemeinschaftliche, außerhalb der gegebenen festen Punkte liegende Schnittpunkte haben.[2]) Wir setzen vorläufig voraus, daß die s Punkte S unter sich unabhängige Bedingungen für die durch sie gehenden Kurven c_2 ergeben.

Diese Aufgabe wird durch die Abzählung der Koinzidenzen der nicht schon in den Punkten S zusammenfallenden Schnittpunkte P_1 und P_2 der Kurve c_n^p mit entsprechenden Kurven c_1 und c_2 gelöst: die Anzahl dieser Koinzidenzen wird $(s+1)\,\xi_{s+1}$ sein.

Durch einen willkürlichen Punkt P_1 der Kurve c_n^p geht eine Kurve c_1, die c_n^p noch in $m_1 - 1$ der beweglichen Punkten schneidet. Von diesen kann man auf $\frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,s!}$ Weisen s Punkte S zusammenfassen, die ebensoviele Kurven c_2 ergeben, deren $m_2 - s$ von den Punkten S verschiedene, bewegliche Schnittpunkte die dem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 sind. Mit unseren gewöhnlichen Bezeichnungen hat man also

$$\alpha_2 = \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,s!}\,(m_2-s).$$

Die Anzahl der durch einen willkürlichen Punkt der Ebene gehenden Kurven c_2 wird ξ_s sein; damit wollen wir die Zahl bezeichnen, die aus der gesuchten Zahl ξ_{s+1} dadurch gebildet wird, daß wir für unveränderte Werte von m_1 und m_2 s durch $s-1$ ersetzen. Verlegt man den Punkt auf die Kurve c_n^p, so kann er entweder ein Punkt S oder ein nicht auf die entsprechende Kurve c_1 fallender Punkt P_2 sein. Im ersteren Fall bestimmt er die entsprechende Kurve c_1, die noch $m_1 - 1$ Schnittpunkte hat; er tritt also $\frac{(m_1-1)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}$ mal als Punkt S auf. Ein von den Punkten S verschiedener Punkt P_2 ist er also auf $\xi_s - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}$

1) Die Fälle, in welchen die Kurve c_n^p außer den d Doppelpunkten, durch welche die Kurven c_1 und c_2 gehen, noch andere Doppelpunkte oder singulären Punkte hat, sind als Spezialfälle zu betrachten.

2) Als einfache Übung könnte man damit anfangen, unabhängig von unserer allgemeinen Darstellung die Zahl ξ_2 und die Zahl ξ_3 im speziellen, in [134] behandelten Fall (siehe Note S. 242) zu bestimmen.

Kurven c_2 und entspricht jedesmal $m_1 - s$ Punkten P_1. Also ist

$$\alpha_1 = \left(\xi_s - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}\right)(m_1 - s) = \xi_s\,(m_1 - s) - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}$$

Um nun auch die Wertigkeit k zu bestimmen, bemerken wir, daß die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 durch eine aus $\frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,s!}$ Kurven c_2 zusammengesetzte Kurve ausgeschnitten werden, die nicht durch P_1 geht und c_n^p $\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}$ mal in jedem der $m_1 - 1$ Punkte schneidet, die durch die durch P_1 gehende Kurve c_1 außer P_1 selbst ausgeschnitten werden. Die Wertigkeit der Korrespondenz des Punktes P_1 mit diesen $m_1 - 1$ Punkten ist 1, und wegen [119] wird die Wertigkeit der Korrespondenz der entsprechenden (von den Punkten S verschiedenen) Punkte P_1 und P_2 also

$$k = -\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die die Wertigkeit definierende Formel findet man

$$(1)\qquad \begin{aligned}(s+1)\,\xi_{s+1} &= \xi_s\,(m_1 - s) - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}\\ &\quad + \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s-1)!\,s!}\,(m_2 - s) - 2\,\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}\,p.\end{aligned}$$

Indem offenbar $\xi_1 = m_2$ ist, wird die Integration dieser Differenzengleichung den Wert von ξ_{s+1} geben. Man findet, was sich leicht nachher durch Übergang von s zu $s+1$ verifizieren läßt,

$$(2)\qquad \xi_{s+1} = \frac{(m_1-2)!}{(m_1-s-1)!\,s!}\,((m_1-1)\,(m_2-s) - sp).$$

Selbstverständlich ist jedoch dieses Resultat denselben Bedingungen unterworfen, wie alle Resultate der abzählenden Geometrie: es ist bedeutungslos, wenn die Gleichung, deren Grad es angibt, identisch wird und die gestellte Aufgabe also in der Tat unendlich viele Auflösungen hat [4]; mehrere der gefundenen ξ_{s+1} Auflösungen können auch demselben Kurvenpaar c_1 und c_2 entsprechen. Ersteres tritt dann ein, wenn s so groß ist, daß sich die Kurven c_1 und c_2, die sich in s Punkten von c_n^p schneiden, von selbst noch in weiteren Punkten derselben Kurve schneiden, letzteres dann, wenn dies erst von Gruppen von $s+1$ Punkten gilt. Bekanntlich tritt solches auch unabhängig von den nicht auf c_n^p liegenden gegebenen Punkten von c_1 und c_2 für hinlänglich große Werte von s oder $s+1$ ein (wie groß diese Werte in diesem Fall sein müssen, das hängt von den auf c_n^p liegenden festen Punkten der Kurven c_1 und c_2 ab). In solchen Fällen nennen wir die ganzen Gruppen ihrer gemeinschaftlichen Schnittpunkte mit c_n^p, die bei der Bestimmung von c_2 nur

für eine geringere Zahl gegebener Punkte dieser Kurve zählen, Spezialgruppen.[1])

In dem letzten der genannten Hauptfälle kann man zwar ξ_{s+1} aus der Formel (2) bestimmen. Diese Zahl kann sich aber in mehrere Zahlen teilen, die Multipla der Anzahlen solcher verschiedenartiger Kurvenpaare c_1 und c_2 sind, die sich in mehr als s Punkten auf c_n^p schneiden. Diese Anzahlen werden in fortgesetzten Untersuchungen statt der Zahl ξ_s in der Formel (1) auftreten. Gleichzeitig werden die vorläufig gemachten Voraussetzungen, auf der die rein kombinatorische Bildung der übrigen in diese Formel eingehenden Zahlen beruhte, wegfallen; diese Formel selbst wird also unbrauchbar. Bei der Bildung der Formel, die dann (1) ersetzen soll, kann man jedoch immer auf entsprechende Weise verfahren.

Auf diese Weise kann man die Anzahlen der durch gegebene Punkte bestimmten Spezialgruppen einer gegebenen Kurve finden. Da es aber hier mehr auf die Einübung der Methode als auf die Ableitung von vollständigen Reihen von Resultaten ankommt, die einer besonderen Theorie angehören, werden wir uns in dieser Beziehung auf die folgende Untersuchung beschränken.

Die Kurven c_1 und c_2 mögen von derselben Ordnung n_1 sein, die größer als $n-1$ ist; weil sie durch alle die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-p$ Doppelpunkte der Kurve c_n^p gehen, schneiden sie diese noch in $nn_1 - (n-1)(n-2)+2p$ Punkten, unter welchen im allgemeinen p durch die übrigen bestimmt sind [37]. Von den Schnittpunkten nehmen wir an, daß eine gewisse Anzahl fest und den Kurven c_1 und c_2 gemeinschaftlich ist, die übrigen $m_1 = m_2$ beweglich, weiter, daß $s = m_1 - p - 1$ ist; auch setzen wir voraus, daß die Anzahl der festen und unabhängig gewählten, gemeinschaftlichen Schnittpunkte so groß (s also entsprechend klein) ist, daß nicht schon diese selber zusammen mit s passend gewählten Punkten eine Spezialgruppe bilden. Diese Bedingung ist jedenfalls für $s = 1$ erfüllt, wenn nicht auch ein Punkt S fest ist.

Läßt man die Kurven c_1 und c_2 außer durch die festen noch durch dieselben $s+1$ Punkte der Kurve c_n^p gehen, so müssen, da $m_1 - s - 1 = p$ ist, diese Kurven entweder c_n^p noch in denselben p Punkten schneiden, oder die genannten Schnittpunkte müssen (vielleicht in Verbindung mit einigen der übrigen Schnittpunkte der Kurven c_1 und c_2) eine kleinere Spezialgruppe bilden. Der erste Fall tritt für ein Kurvenpaar c_1 und c_2 ein, was man aus der Betrachtung des Spezialfalles ersehen kann, in welchem man einen der die Kurven c_2 bestimmenden und im allgemeinen nicht auf c_n^p liegenden Punkte auf c_n^p verlegt; derselbe Punkt bestimmt

1) Diese Benennung wenden *Brill* und *Nöther* in ihrer für die Theorie der Punktgruppen einer algebraischen Kurve grundlegenden Abhandlung in den Mathematischen Annalen VII auf solche Gruppen an, die durch adjungierte Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden.

nämlich dann eine Kurve c_1 und eine Kurve c_2, die durch alle ihre Schnittpunkte geht. Da man unter den m_1 Schnittpunkten des also auch im allgemeinen existierenden Kurvenpaares, das die genannten Bedingungen erfüllt, auf

$$\frac{m_1!}{(m_1 - s - 1)!\,(s+1)!}$$

Weisen $s + 1$ zusammenfassen kann, so muß man sie ebenso vielmal unter die durch die Formel (2) gefundenen ξ_{s+1} zählen. Der andere Fall wird also auf

$$\xi_{s+1} - \frac{m_1!}{(m_1 - s - 1)!\,(s+1)!}$$

Weisen eintreten können. Diese Zahl ist, da $m_1 = m_2 = s + p + 1$ ist, gleich

$$\frac{(s+p-1)!}{p!\,(s+1)!} \cdot s \cdot p(p-1),$$

sie ist also, was auch selbstverständlich ist, für $p = 1$ null. Für $p > 1$ kann man durch $p(p-1)$ kürzen und findet

$$(3) \qquad \frac{(s+p-1)!}{(p-2)!\,(s+1)!} \cdot s.$$

Für $p = 3$, $s = 1$ hat man $m_1 = m_2 = 5$ und findet also, daß es auf drei Weisen möglich ist, aus den 5 beweglichen Schnittpunkten 2 solche auszuwählen, die einander bestimmen, während die übrigen 3 Schnittpunkte der Kurven c_1 und c_2 verschieden sein können.

[134] Anwendung auf Kurven vierter Ordnung. Sei c_4 eine allgemeine Kurve vierter Ordnung, also vom Geschlecht $p = 3$. Wenden wir auf diese das letztgefundene Resultat an, so finden wir, daß man 11 willkürlichen Punkten einer Kurve vierter Ordnung c_4 drei solche verschiedene Paare von Punkten der Kurve hinzufügen kann, daß die aus den 11 gegebenen und einem solchen Paar bestehende Gruppe von 13 Punkten nicht, wie gewöhnlich, die übrigen 3 Schnittpunkte einer durch die Punktgruppe gehenden Kurve vierter Ordnung k_4 mit c_4 bestimmt; die durch die Gruppe gehenden Kurven k_4 werden vielmehr eine Reihe von Gruppen von je 3 Punkten ausschneiden.

Man überzeugt sich leicht, daß eine solche Unbestimmtheit eintreten wird, wenn von den 16 Schnittpunkten einer nicht zusammengesetzten Kurve k_4 3 in einer Geraden a liegen, während man dann die Gruppe der übrigen 13 auswählt. Ist nämlich b eine andere Gerade, die c_4 in dem nicht auf k_4 liegenden Schnittpunkt der Geraden a schneidet, dann wird die aus b und k_4 znsammengesetzte Kurve fünfter Ordnung c_4 in einer Gruppe von 20 Punkten schneiden, durch welche man ∞^3 Kurven fünfter Ordnung legen kann [37]. Diejenige dieser Kurven, die durch zwei Punkte von a, die von den Schnittpunkten mit c_4 verschieden sind, und durch einen weiteren nicht auf c_4 oder a liegenden Punkt geht,

wird in a und eine von c_4 verschiedene Kurve k'_4 zerfallen. Letztere geht durch die 13 nicht auf a liegenden Schnittpunkte der Kurve k_4 mit c_4; ihre 3 anderen Schnittpunkte sind die drei nicht auf a liegenden Schnittpunkte der Geraden b. Die Reihe der den verschiedenen Kurven k_4 angehörigen, verschiedenen Gruppen von 3 Schnittpunkten wird also durch einen Büschel von Geraden ausgeschnitten, dessen Scheitel der vierte Schnittpunkt derselben Geraden ist.

Daß der hier betrachtete Fall der einzige ist, in welchem man durch 13 Punkte einer Kurve c_4, von welchen 11 willkürlich gegeben sind, Kurven vierter Ordnung legen kann, die c_4 in verschiedenen Gruppen von 3 Punkten schneiden, kann man mittels einer Anwendung der Formel (2) in [133] bestätigen. Diese ist auf den Fall anzuwenden, in welchem die Kurven des Büschels vierter Ordnung c_1 alle durch die 11 gegebenen Punkte gehen und die Kurven c_2 willkürliche Gerade sind. Dann ist $m_1 = 5$, $m_2 = 4$, und da im vorliegenden Fall eine Kurve des Büschels aufzusuchen ist, die c_4 in drei Punkten einer Geraden schneidet, ist ξ_3 zu suchen, also $s = 2$ in die genannte Formel einzusetzen. Da außerdem $p = 3$ ist, findet man[1]) $\xi_3 = 3$. Diese Zahl hat aber denselben Wert, wie in dem Fall, in dem es, wie wir eben gefunden haben, überhaupt möglich ist, die 11 Punkte zu einer Gruppe von 13 Punkten, die die übrigen nicht bestimmt, zu ergänzen.

Im Spezialfall, wo die elf gegebenen Punkte Schnittpunkte der Kurve c_4 mit einer Kurve dritter Ordnung sind, werden die zwei weiteren Punkte der Gruppe aus dem zwölften Schnittpunkt dieser Kurve und einem willkürlichen Punkt A der Kurve c_4 bestehen, und die anderen Schnittpunkte der durch die 13 Punkte gehenden Kurven vierter Ordnung werden von Geraden durch A ausgeschnitten. In diesem Fall hat unsere Aufgabe unendlich viele Lösungen, weil A unbestimmt ist. Diese Ausnahme ist ja aber ein für allemal für die Resultate der abzählenden Geometrie angegeben worden.

In diesem Spezialfall geht die Gerade, der die Gruppe von 3 Schnittpunkten angehört, durch einen Punkt der Gruppe von 13 Schnittpunkten. Man kann den *Cayley-Brill*schen Satz anwenden, um zu erfahren, wie oft dies eintreten wird, wenn nur 10 Punkte der letzteren größeren Gruppe gegeben sind. P_1 sei ein willkürlich gewählter elfter Punkt dieser Gruppe. Er bestimmt, wie wir gesehen haben, drei vollständige Gruppen von 13 Punkten, also auch 3 ihnen entsprechende Punkte P_2, durch welche die die Gruppen von drei Punkten ausschneidenden Ge-

1) Es wird eine sehr nützliche Übung der abzählenden Methoden sein, sie unmittelbar auf die hier die Kurven vierter Ordnung betreffende Aufgabe anzuwenden. Zwar geschieht dies durch dieselben Betrachtungen, denen wir in [133] eine allgemeinere Darstellung und Anwendung gegeben haben. Das eigentlich abzählende Verfahren eignet man sich aber besser an, wenn die Verallgemeinerung die Aufmerksamkeit nicht zu sehr beansprucht.

raden gehen. Ist umgekehrt P_2 gegeben, so wird eine durch ihn und einen willkürlichen festen Punkt gehende Gerade eine Gruppe von drei Schnittpunkten bestimmen, und eine durch diese und die 10 gegebenen Punkte der größeren Gruppe gehende Kurve vierter Ordnung wird die Kurve c_4 in 3 dem Punkt P_2 entsprechenden Punkten P_1 schneiden. Aus der Art dieser Bestimmung geht hervor, daß die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 -1 ist. Die Anzahl der Koinzidenzen wird somit 0 sein. Abgesehen also von solchen Spezialfällen, wie dem oben betrachteten, in dem es unendlich viele Lösungen gibt, kann der Punkt, den wir hier P_2 genannt haben, überhaupt nicht mit einem der 13 Punkte der Gruppe koinzidieren. Dies folgt übrigens schon daraus, daß, wenn vier Schnittpunkte zweier Kurven vierter Ordnung in einer Geraden liegen, die übrigen auf einer Kurve dritter Ordnung liegen müssen. Der oben betrachtete Spezialfall ist also der einzige, in welchem die Geraden, auf denen die Gruppen von drei Punkten liegen, durch einen Punkt der Gruppe von 13 Punkten gehen.

Statt vierter Ordnung könnten die die Gruppen ausschneidenden Kurven auch von einer höheren Ordnung n sein, wenn man nur die Zahl 13 durch $4n - 3$ usw. ersetzt.

[135] Berührungsfragen. Da eine einfache Berührung durch das Zusammenfallen zweier Schnittpunkte entsteht, eine Berührung von der Ordnung $r + s - 1$ durch das Zusammenfallen zweier Berührungspunkte, in welchen die Berührung beziehungsweise von der Ordnung $r - 1$ und $s - 1$ ist, so kann man den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz vielfach bei der Bestimmung von Berührungskurven benutzen. Man kann die Anzahl der Kurven eines ∞^1-fachen Systems bestimmen, die gewisse neue Berührungen mit einer festen Kurve c_n^p haben, mit der bereits alle Kurven des Systems Berührungen niedrigerer Ordnung oder in geringerer Anzahl haben mögen. Auf diese Weise kann man sukzessive zur Bestimmung einer Kurve gelangen, die, außer anderen Bedingungen, jene erfüllen, mit c_n^p mehrere Berührungen verschiedener Ordnung zu haben. Beispiele hievon haben wir schon in [123] für den Fall angegeben, daß die gesuchten Kurven Gerade sind. Auch der in [29] auf andere Weise bewiesene Satz über Berührungskurven läßt sich durch Anwendung des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes leicht herleiten und wird dann ein neues Beispiel für diese Methode abgeben.

Bei solchen Bestimmungen muß man natürlich beachten, daß Koinzidenzen von Schnittpunkten und von Berührungspunkten auch auf andere Weise als durch Berührungen erster oder höherer Ordnung entstehen können. Sie können von mehrfachen Elementen der festen Kurve oder von mehrfachen Punkten der Systemkurven herrühren, die entweder allen diesen angehören mögen und im Falle der Koinzidenz auf die feste Kurve fallen, oder sich für einzelne Systemkurven auf der festen Kurve bilden. Auch können einzelne Kurven des Systems vielfache Zweige

haben. Letztere Möglichkeit wird sich — was auch bei den sukzessiven Bestimmungen in [133] der Fall war — einer induktiven Aufstellung ganz allgemeiner Formeln durch alleinige Berücksichtigung der ersten und einfachsten Resultate entgegenstellen. Da wir aber darauf in [162] zurückkommen werden, werden wir hier nur Beispiele dafür angeben, wie man verfahren kann, solange diese Schwierigkeit nicht eintritt.

Ein solches Beispiel können wir an die Untersuchung in [133] anknüpfen. Soll eine der Kurven, die wir dort c_2 genannt haben, c_n^p in einem der Punkte S berühren, so muß S mit einem anderen Schnittpunkte derselben Kurve c_2 zusammenfallen. Setzen wir voraus, daß die entsprechende Kurve c_1 c_n^p nicht in demselben Punkte berührt, so ist dieser andere Schnittpunkt nicht selbst ein Punkt S, sondern muß einer der anderen $m_2 - s$ Punkte P_2 sein. Diese werden wir besonders als Punkte P_2' bezeichnen. Jedem Punkt S entsprechen, wie wir in [133] gesehen haben,

$$\frac{(m_1 - 1)!}{(m_1 - s)!\,(s - 1)!}\,(m_2 - s)$$

Punkte P_2' und jedem Punkt P_2'

$$\left(\xi_s - \frac{(m_1 - 1)!}{(m_1 - s)!\ (s - 1)!}\right) s$$

Punkte S.

Um die Wertigkeit dieser Korrespondenz zu finden, bemerken wir, daß die einem Punkt S entsprechenden Punkte P_2' durch eine zusammengesetzte Kurve ausgeschnitten werden, die $\frac{(m_1 - 1)!}{(m_1 - s)!\ (s - 1)!}$-mal durch S geht und $\frac{(m_1 - 2)!}{(m_1 - s)!\ (s - 2)!}$-mal durch jeden der anderen $m_1 - 1$ Schnittpunkte der durch S gehenden Kurve c_1. Die gesuchte Wertigkeit ist also die Differenz dieser Zahlen oder

$$\frac{(m_1 - 2)!}{(m_1 - s - 1)!\ (s - 1)!}.$$

Die gesuchte Anzahl ist daher

$$\text{(1a)}\quad \xi_s \cdot s + \frac{(m_1 - 2)!}{(m_1 - s)!\ (s - 1)!}\left[(m_1 - 1)(m_2 - 2s) + 2(m_1 - s)p\right].$$

In den Fällen, in welchen s hinreichend klein ist (um die Möglichkeit von Spezialgruppen auszuschließen) und also ξ_s sich durch die Formel [123] (2) ausdrücken läßt, ist die gesuchte Anzahl

$$\text{(1b)}\quad \frac{(m_1 - 2)!}{(m_1 - s)!\ (s - 1)!}\left[(m_1 - 1)(s + 1)(m_2 - s) + (2m_1 - s(s + 1))p\right].$$

Man kann diesen Ausdruck benutzen, um unter den Kurven vierter Ordnung, die durch 12 feste Punkte einer gegebenen Kurve vierter Ordnung c_4 (und noch einen festen Punkt) gehen, die Anzahl derjenigen zu bestimmen, die durch den Berührungspunkt und einen Schnittpunkt

einer Tangente an c_4 gehen. Dazu genügt es, $m_1 = 4$, $m_2 = 4$, $s = 2$, $p = 3$ zu setzen. Man findet dann, daß die Aufgabe 24 Lösungen hat. Dasselbe Resultat würde sich auch aus anderen Anwendungen der *Cayley-Brill*schen Formel ergeben, z. B. durch Betrachtung der Korrespondenz zwischen einem beweglichen Schnittpunkt der Kurve c_4 mit einer Kurve des Büschels und einem ihrer Schnittpunkte mit der Tangente in einem andern beweglichen Schnittpunkt der Kurve des Büschels. Diese Bestimmung wird als Übungsbeispiel vorgeschlagen. — Die Bestimmung bleibt übrigens ganz unverändert, wenn die Ordnung der Kurven des Büschels > 4 ist, wenn diese nur immer 4 bewegliche Schnittpunkte haben.

Sucht man die Kurven c_2, die c_n^p in Punkten berühren, die nicht Punkte S sind, so muß man die Koinzidenzen zweier der Punkte, die wir eben P_2' nannten, bestimmen. Einem solchen Punkte P_2' entsprechen

$$\left(\xi_s - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}\right)(m_2 - s - 1)$$

andere Punkte P_2'. Diese werden durch eine zusammengesetzte Kurve bestimmt, die

$$\left(\xi_s - \frac{(m_1-1)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}\right)\text{-mal}$$

durch den gegebenen Punkt P_2' geht, und außerdem c_n^p in den Punkten S einfach schneidet. Da, wie wir eben sahen, die Korrespondenz zwischen den Punkten P_2' und S die Wertigkeit

$$\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s-1)!\,(s-1)!}$$

hat, so wird die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen den Punkten P_2' die Differenz der beiden letztgenannten Zahlen sein; sie ist also:

$$\xi_s - \frac{(m_1-2)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}(2m_1 - s - 1).$$

Die gesuchte Anzahl von Berührungen ist daher

$$\text{(2a)}\qquad 2\xi_s(m_2 - s - 1 + p) - 2\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}[(m_1-1)(m_2-s-1) + p(2m_1 - s - 1)].$$

In den Fällen, in welchen ξ_s sich durch die Formel [133](2) bestimmen läßt, wird dieselbe Anzahl gleich

$$\text{(2b)}\qquad 2\frac{(m_1-2)!}{(m_1-s)!\,(s-1)!}[(m_1-1)((m_2-s)^2 - m_2 + s) + p((m_1-s)(m_2-s) - m_1 + 2s - 1) - (s-1)p^2].$$

Setzt man hier, wie früher in dem Ausdruck (1), $m_1 = 4$, $m_2 = 4$, $s = 2$, so bekommt man die Anzahl 12. Also: Unter den Kurven eines Büschels, die eine Kurve vierter Ordnung in vier beweglichen Punkten schneiden, gibt es zwölf, für welche die Sehne, die zwei dieser Punkte

verbindet, die Kurve in einem anderen Punkt berührt. — Auch dieses Resultat ließe sich durch andere Anwendungen des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes herleiten, z. B. durch Betrachtung der Korrespondenz zwischen den Punkten, in welchen eine Kurve des Büschels und eine Tangente der Kurve c_4, die schon beide diese Kurve in demselben beweglichen Punkt schneiden, sie nochmals schneiden. Die Bestimmung der Koinzidenzen dieser Korrespondenz wird als Übung dienen können.

[136] ***Jonquières'* Formel.** Ein anderes Beispiel von Berührungsaufgaben, wird der Beweis einer sehr allgemeinen Formel von *Jonquières* abgeben. Sie dient dazu, die Anzahl der Kurven c_r von der Ordnung r zu bestimmen, die mit einer gegebenen Kurve c_n^p in α_1 Punkten i_1, in α_2 Punkten $i_2 \ldots$ in α_ϱ Punkten i_ϱ Punkte gemein haben (die auf c_n^p konsekutiv sind), und die sonst c_n^p nur in gegebenen Punkten treffen und außerdem lediglich durch die Bedingung bestimmt werden, durch gegebene Punkte der Ebene zu gehen. Ist z. B. $i_1 = 1$, so hat c_r mit c_n^p α_1 nicht gegebene einfache Schnittpunkte. Vorläufig werden die Zahlen i unter sich verschieden angenommen. Bezeichnen wir die gesuchte Anzahl durch

$$\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\varrho!},$$

so erhält man durch die Anwendung der *Cayley-Brill*schen Formel auf das Entsprechen eines neuen, aus i_1 früher festen Schnittpunkten gebildeten i_1-fachen Schnittpunktes mit den verschiedenen beweglichen Schnittpunkten eine Formel, die sich, wenn z. B.

$$2i_1 = i_2, \quad i_1 + i_2 = i_\varrho$$

ist, während $i_1 + i_\varrho$ sich nicht unter den gegebenen Zahlen i findet, folgendermaßen schreiben läßt:

$$2pi_1 \frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\varrho!}$$

$$= i_1\left(\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1-1} \dot{i}_2^{\alpha_2+1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{(\alpha_1-1)!\,(\alpha_2+1)!\,\alpha_3!\ldots\alpha_\varrho!}(\alpha_2+1) - 2\,\alpha_1 \frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\varrho!}\right)$$

$$+ i_2\left(\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2-1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho+1}\right]}{\alpha_1!\,(\alpha_2-1)!\,\alpha_3!\ldots(\alpha_\varrho+1)!}(\alpha_\varrho+1) - (\alpha_1+1)\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1+1} \dot{i}_2^{\alpha_2-1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{(\alpha_1+1)!\,(\alpha_2-1)!\,\alpha_3!\ldots\alpha_\varrho!}\right.$$

$$\left. - \alpha_2 \frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\varrho!}\right)$$

. . . .

$$+ i_\varrho\left(\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho-1}(i_1+i_\varrho)\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots(\alpha_\varrho-1)!} - (\alpha_1+1)\frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1+1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho-1}\right]}{(\alpha_1+1)!\,\alpha_2!\ldots(\alpha_\varrho-1)!}\right.$$

$$\left. - \alpha_\varrho \frac{\left[\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \ldots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}\right]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\varrho!}\right)$$

oder

$$2 p i_1 [\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}]$$

$$= \alpha_1 i_1 \left([\dot{i}_1^{\alpha_1 - 1} \dot{i}_2^{\alpha_2 + 1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}] - 2 [\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}] \right)$$

$$+ \alpha_2 i_2 \left([\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2 - 1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho + 1}] - [\dot{i}_1^{\alpha_1 + 1} \dot{i}_2^{\alpha_2 - 1} \dot{i}_3^{\alpha_3} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}] - [\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}] \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \alpha_\varrho i_\varrho \left([\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho - 1} (i_1 + i_\varrho)] - [\dot{i}_1^{\alpha_1 + 1} \dot{i}_2^{\alpha_2} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho - 1}] - [\dot{i}_1^{\alpha_1} \dot{i}_2^{\alpha_3} \dots \dot{i}_\varrho^{\alpha_\varrho}] \right).$$

Hier haben wir voraussetzen können, daß die Zahlen $i_1, i_2 \dots i_\varrho$ unter sich verschieden sind. Es wird aber bequem sein, die Gestalt der Formel dadurch zu ändern, daß man diese Voraussetzung fallen läßt, dagegen jedem einfachen oder mehrfachen Schnittpunkt seinen Wert i zuteilt. Dann möge $[i_1\, i_2 \dots i_\varrho]$ *die Anzahl der Kurven, die die gegebene Bedingung erfüllen, multipliziert mit dem Produkt der Anzahl von Permutationen der unter sich gleichen Zahlen i bedeuten.* Bezeichnen wir nun mit i die Multiplizität des einzuführenden neuen Schnittpunkts, die wir bisher i_1 genannt haben, so läßt sich die gefundene Formel (die ja auch für $\alpha_1 = 0$ gilt) so schreiben:

$$(1) \begin{cases} 2pi[i_1 i_2 \dots i_\varrho] = i_1([(i + i_1) i_2 \dots i_\varrho] - [i i_2 \dots i_\varrho] - [i_1 i_2 \dots i_\varrho]) \\ \qquad\qquad + i_2([i_1 (i + i_2) \dots i_\varrho] - [i_1 i \dots i_\varrho] - [i_1 i_2 \dots i_\varrho]) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad + i_\varrho [i_1 i_2 \,.\,.\, (i + i_\varrho)] - [i_1 i_2 \dots i] - [i_1 i_2 \dots i_\varrho]. \end{cases}$$

Diese Formel läßt sich zur sukzessiven Bestimmung der Werte aller $[i_1 i_2 \dots i_\varrho]$ anwenden.

Ist nämlich erstens $i_1 = i_2 = \dots i_\varrho = 1$, so muß die gesuchte Kurve durch ihre gegebenen Punkte ganz bestimmt sein, und man hat also $[11 \dots 1] = \varrho!$, wo ϱ die Anzahl der in diesem Fall einfachen Schnittpunkte bezeichnet. Setzt man sodann in (1) $i_1 = i_2 = i_3 = \dots i_\varrho = 1$ und nacheinander $i = 1, 2, 3 \dots$, so findet man $[21 \dots 1]$, $[31 \dots 1]$ usw. Dadurch kann man für alle Werte der Zahl q und der Anzahl $\varrho - 1$ der nicht gegebenen einfachen Schnittpunkte die Zahl $[q 11 \dots 1]$ finden. Benutzt man nun diese Werte, für die man auch $[1 q 1 \dots 1]$ usw. schreiben kann, so kann man aus (1) sukzessive die Werte von $[2 q 1 \dots 1]$, $[3 q \dots 1] \dots [s q 1 \dots 1]$ bestimmen für alle Werte von s und q (wobei jedoch z. B. der Wert von $[1(q + 1) 1 \dots 1]$ vor dem Wert von $[2 q 1 \dots 1]$ bestimmt wird). In ähnlicher Weise kann man einen dritten Wert i an die Stelle von i_1 setzen und (1) benutzen, um die Werte $[i_1 i_2 \dots i_\varrho]$ zu bestimmen, wo drei i beliebige Werte annehmen, während die übrigen noch 1 sind, usw.

Jonquières hat (mit anderen Bezeichnungen) die folgende allgemeine Formel aufgestellt

$$(2)\begin{cases} [i_1 i_2 \ldots i_\varrho] \\ = i_1 i_2 \ldots i_\varrho (\varrho! + (\varrho-1)! \sum (i_1 - 1) \cdot p + (\varrho - 2)! \sum (i_1 - 1)(i_2 - 1) \cdot p(p-1) \\ \quad + (\varrho - 3)! \sum (i_1 - 1)(i_2 - 1)(i_3 - 1) \cdot p(p-1)(p-2) \\ \quad + \cdots + (i_1 - 1)(i_2 - 1) \ldots (i_\varrho - 1) \cdot p(p-1) \ldots (p - \varrho + 1)) \end{cases}$$

wo in den Summen $\sum$ die Faktoren $i_1 - 1$, $i_2 - 1 \ldots$ durch alle Kombinationen der Größen i zu ersetzen sind.[1]) Übersichtlicher wird die besonders für $p \gtreqless \varrho$ bequeme Gestalt derselben Formel:

$$(2')\begin{cases} [i_1 i_2 \ldots i_\varrho] \\ = i_1 i_2 \ldots i_\varrho p(p-1) \ldots (p-\varrho) \left(\frac{i_1 i_2 \ldots i_\varrho}{p - \varrho} - \frac{\Sigma i_1 i_2 \ldots i_{\varrho - 1}}{p - \varrho + 1} + \cdots (-1)^{\varrho - 1} \frac{\Sigma i_1}{p - 1} + (-1)^\varrho \frac{1}{p} \right). \end{cases}$$

Die Formel (2) ist offenbar richtig für $i_1 = i_2 = \cdots i_\varrho = 1$. Ihre allgemeine Gültigkeit wird dann dadurch bewiesen, daß man den aufgestellten Ausdruck [oder seine Form (2′)] in die Rekursionsformel (1) einsetzt. Man findet dann die Gleichung

$$2 i_1 i_2 \ldots i_\varrho p(p-1) \ldots (p - \varrho)(i_1 - 1)(i_2 - 1) \ldots (i_\varrho - 1) = 0,$$

die erfüllt ist, wenn wenigstens eine der Zahlen $i_1, i_2 \ldots i_\varrho = 1$, oder $p \leqq \varrho$ ist.

Die erstere Bedingung haben wir aber eben bei unserer sukzessiven Bildung der Zahlen $[i_1 i_2 \ldots i_\varrho]$ immer von denjenigen dieser Zahlen vorausgesetzt, die bei dieser Bildung wie die in (1) eingehenden Werte $i_1, i_2 \ldots i_\varrho$ benutzt wurden. Die aus ihnen neugebildeten Zahlen werden ebenfalls die Form (2) haben, so daß dieser Ausdruck die Auflösung der gestellten Aufgabe in allen Fällen enthält, in welchen sie wirklich lösbar ist und eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt.

Algebraisch betrachtet kann es freilich vorkommen, daß Ausdrücke von der Form (2) die Bedingung (1) nicht erfüllen, nämlich dann, wenn keine der Zahlen $i_1 \ldots i_n = 1$ und $p > \varrho$ ist. Dann können also solche Zahlen $[i_1 i_2 \ldots i_n]$ nicht die hier verlangte Bedeutung haben, was darauf beruhen muß, daß den Schnittpunkten der Kurve c_r mit c_n^p mehr Bedingungen auferlegt würden, als sie befriedigen können. Man könnte sich auch direkt davon überzeugen, daß dies wirklich der Fall ist.

Da wir zum Beweise den *Cayley-Brill*schen Satz benutzt haben, kann die Abzählung der zusammenfallenden Lösungen, die entstehen, wenn c_n^p mehrfache Elemente hat, mittels der in [116] erörterten Regeln ge-

---

1) Siehe *Jonquières*' Abhandlung in Crelles Journal, Bd. 66 (1866), S. 289—321. Schon in Formel (2) ist eine größere Übersichtlichkeit dadurch erreicht, daß hier, nach einer Anweisung von *Cayley* (Comptes rendus t. 63, S. 666—670, Papers VII, S. 41—43), auch die einfachen Schnittpunkte mitgenommen werden. Auf entsprechende Weise ist die Beweisführung von *Brill* (Math. Annalen, 6 [1873], S. 607—622) modifiziert.

schehen. Übrigens wird c_r in Punkten, in denen diese Kurve einfach ist und c_n^p in i konsekutiven Punkten eines einfachen Elementes schneidet, eine Berührung $(i-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben. Eine andere Art von Koinzidenzen trifft man, wenn eine Kurve c_r aus Teilen besteht, von welchen zwei zusammenfallen und eine Doppelkurve bilden. Die hiervon herrührenden Lösungen muß man ausscheiden, wenn man Berührungskurven sucht. Gehen unendlich viele solcher Kurven durch die gegebenen Punkte, so hat die gestellte Aufgabe unendlich viele Lösungen und die gefundene Zahl wird dann bedeutungslos. Auf solche Fälle werden wir in [162], wo wir Berührungen mit mehreren Kurven behandeln, näher eingehen.

[137] Ein- und umbeschriebene Vielecke. Den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz kann man zur Lösung der folgenden Aufgabe anwenden: Ein n-Eck zu konstruieren, dessen Ecken sich auf gegebenen Kurven befinden, und dessen Seiten gegebene Kurven berühren. Die erstere Reihe von Kurven kann durch Gerade, die letztere durch Punkte ersetzt werden; auch können mehrere der Kurven identisch sein. Daher umfaßt die Aufgaben die in [45] und [46] genannten *Poncelet*schen Schliessungsaufgaben, die Aufgaben [115] 2. und 3. und die in [127] genannte *Steiner*sche Aufgabe. Wie diese löst man sie dadurch, daß man versucht, die erste Ecke in einen willkürlichen Punkt P_1 der ersten Kurve zu legen, und sodann die Seiten und die übrigen Ecken konstruiert. Die letzte Seite wird dann die erste Kurve in einem Punkt Q treffen, der mit P_1 zusammenfallen soll. Die Lösung der Aufgabe beruht also auf der Bestimmung der Koinzidenzen von P_1 und Q, und der *Cayley-Brill*sche Korrespondenzsatz wird die Anzahl der Lösungen ergeben. Ist die Kurve rational, so genügt der einfache Korrespondenzsatz; daher könnten wir schon in [115] die Aufgabe 3. als eine Anwendung dieses Satzes stellen.

Die Methode wird man kennen lernen durch die Behandlung der folgenden Aufgabe, die zwar dadurch vereinfacht wird, daß sie sich nur auf Dreiecke bezieht, andererseits aber dadurch erschwert wird, daß eine einzige gegebene Kurve alle die oben genannten $2n$ (oder im vorliegenden Falle 6) Kurven ersetzt. Eben dadurch wird sie ein lehrreiches Beispiel für die sukzessive Bestimmung verschiedener Wertigkeiten und für das Auftreten verschiedenartiger Koinzidenzen abgeben.

Wir werden für eine Kurve c_n^p, der wir *Plücker*sche Singularitäten beilegen, die Anzahl solcher gleichzeitig ein- und umbeschriebener Dreiecke suchen, deren Ecken nicht mit den Berührungspunkten zusammenfallen. Versuchen wir eine Ecke eines solchen Dreiecks in einen beliebigen Punkt P_1 der Kurve zu legen. Durch P_1 gehen außer der Tangente in diesem Punkt selbst $n'-2$ Tangenten, die c_n^p in den $n'-2$ Punkten P_2 berühren (Fig. 28) und sie noch in $(n'-2)(n-3)$ Punkten P_3 schneiden. Von diesen Punkten gehen im ganzen, außer der Tangente in P_3 und der Tangente P_1P_3, $(n'-2)(n-3)(n'-3)$ Tangenten aus, die

c_n^p in ebensovielen Punkten P_4 berühren und noch in $(n'-2)(n-3)^2(n'-3)$ Punkten P_5 schneiden; dadurch werden auf dieselbe Weise

$$(n'-2)(n-3)^2(n'-3)^2$$

Tangenten P_5P_7 bestimmt mit ebensovielen Berührungspunkten P_6 und

$$(n-3)^3(n'-2)(n'-3)^2$$

Schnittpunkten P_7. Soll wirklich dadurch ein ein- und umbeschriebenes Dreieck entstehen, so muß P_7 mit P_1 zusammenfallen.

Die gesuchte Anzahl η ist also unter den Koinzidenzen der entsprechenden Punkte P_1 und P_4 zu suchen, und zwar, da sich in jeder der drei Ecken allemal zwei Sehnen schneiden, 6-mal.

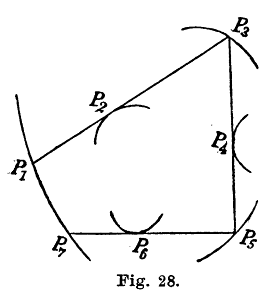


Fig. 28.

Die dieser Korrespondenz zugehörigen Zahlen α_1 und α_2 haben den eben gefundenen Wert. Ihre Wertigkeit k_7 finden wir durch sukzessive Bestimmung der Wertigkeiten $k_2, k_3 \ldots$ der Korrespondenzen zwischen P_1 und $P_2, P_3 \ldots$ Die Wertigkeit k_2 ist, wie wir schon in [123] gefunden haben 2; wie auch in [123] findet man dann, daß $k_3 = n'-6$ ist. Die erste Polare des Punktes P_3 wird c_n^p in P_3 berühren und sie sowohl in dem Punkt P_2 als auch in den Punkten P_4 schneiden. Da durch jeden Punkt P_2 $n-3$ dieser Polaren gehen, die nicht durch P_1 gehen, so wird die Wertigkeit k_4 der Korrespondenz zwischen P_1 und P_4 durch

$$2k_3 + (n-3)k_2 + k_4 = 0$$

bestimmt. Also ist

$$k_4 = -2(n'-6) - 2(n-3) = -2(n'+n-9).$$

Die Punkte P_5 werden durch eine aus Geraden bestehende Kurve ausgeschnitten, die nicht durch P_1 geht, sondern in jedem Punkt P_3 $n'-3$, und in jedem Punkt P_4 zwei zusammenfallende Schnittpunkte hat. Die Wertigkeit k_5 der Korrespondenz zwischen P_1 und P_5 wird also durch

$$(n'-3)k_3 + 2k_4 + k_5 = 0$$

bestimmt. Also ist

$$k_5 = -(n'^2 - 13n' - 4n + 54).$$

Ebenso werden die Wertigkeiten k_6 der Korrespondenz zwischen P_1 und P_6 und k_7 der zwischen P_1 und P_7 durch

$$2k_5 + (n-3)k_4 + k_6 = 0$$

und

$$(n'-3)k_5 + 2k_6 + k_7 = 0$$

bestimmt; somit erhält man:

$$k_6 = 2(n'^2 + nn' + n^2 - 16n' - 16n + 81),$$
$$k_7 = n'^3 - 20n'^2 - 8nn' - 4n^2 + 157n' + 76n - 486.$$

Die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P_1 und P_7 ist also

$$2(n-3)^3(n'-2)(n'-3)^2$$
$$+ 2(n'^3 - 20n'^2 - 8nn' - 4n^2 + 157n' + 76n - 486)p.$$

Von diesen Koinzidenzen rühren wie schon bemerkt, 6η von den gesuchten ein- und umbeschriebenen Dreiecken her. Koinzidenzen können aber auch auf andere Weise entstehen. Erstens können schon die Punkte P_3 und P_5 zusammenfallen, und zwar in einem Berührungspunkt einer Doppeltangente oder, da wir der Kurve die *Plücker*schen Singularitäten (d, d', e, e', s. [70]) beigelegt haben, in einem Doppelpunkt oder in einer Spitze. Im ersten Falle ist P_4 der andere Berührungspunkt der Doppeltangente, im zweiten der Berührungspunkt einer von dem singulären Punkt ausgehenden, aber nicht in diesem berührenden Tangente. In diesen Fällen fallen zwei entsprechende Gerade $P_3 P_1$ und $P_5 P_7$ zusammen in jeder anderen von $P_3 (P_5)$ ausgehende Tangente, im Falle einer Spitze (aber nicht im Falle eines Doppelpunkts) auch in der Tangente in diesem Punkt selbst. In den anderen Schnittpunkten dieser Tangenten werden Koinzidenzen von P_1 und P_7 entstehen. Die Anzahl der auf diese Weisen entstehenden Koinzidenzen, deren Koeffizienten sich nach den gewöhnlichen Regeln leicht bestimmen lassen, ist

$$2d'(n'-3)(n-3) + 2d(n'-4)(n'-5)(n-4)$$
$$+ 3e(n'-3)(n'-4)(n-4) + e(n'-3)(n-3).$$

Ferner können alle Seiten des Dreiecks mit einer Doppeltangente oder einer Wendetangente zusammenfallen und zwar so, daß die Koinzidenz zwischen P_1 und P_7 entweder in einem der Schnittpunkte oder in einem Berührungspunkte einer solchen Tangente stattfindet. Auf diese Weise erhält man

$$2d'(n-4)(n-5)(n-6) + 4d'(n-4)(n-5)$$
$$+ 3e'(n-3)(n-4)(n-5) + 2e'(n-3)(n-4)$$

Koinzidenzen.

Daß sich die hier betrachteten Dreiecke nicht in jeder Beziehung als Spezialfälle der gesuchten betrachten lassen, daß sie also aus diesen ausgeschieden werden müssen, zeigt sich z. B. dadurch daß nicht alle dualistisch entsprechenden Fälle durch Koinzidenzen der hier betrachteten Korrespondenz zwischen P_1 und P_7 bestimmt werden können, was man erkennt, wenn man P_1 einem Doppelpunkte oder einer Spitze nähert (denn die Fälle, in welchen P_1 und P_7 auf verschiedenen Zweigen eines Doppelpunktes liegen, ergeben ja keine Koinzidenzen). Eine wirkliche Koinzidenz von P_1 (P_3, P_5) und P_7 entsteht jedoch in einer Spitze, wenn P_2 und

P_4 die Berührungspunkte zweier von der Spitze ausgehender, aber nicht in der Spitze berührender Tangenten sind, und wenn P_6 entweder der Berührungspunkt einer dritten solchen Tangente ist oder mit P_2 zusammenfällt. Auf diese Weise entstehen

$$e(n'-3)(n'-4)^2$$

Koinzidenzen.

Setzt man die oben gefundene Gesamtzahl von Koinzidenzen gleich der Summe der hier aufgeführten Anzahlen der verschiedenen Arten von Koinzidenzen, so findet man einen Ausdruck für die gesuchte Anzahl η. Dieser wird, wenn wir d, d', e, e' durch n, n' und p ausdrücken (s. [70]) die folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}6\eta = {} & 2n^3n'^3 - 18n^2n'^3 - 18n^3n'^2 \\ & + n'^4 + 52nn'^3 + 162n^2n'^2 + 52n^3n' + n^4 \\ & - 64n'^3 - 462nn'^2 - 462n^2n' - 64n^3 + 509n'^2 + 1268nn' + 509n^2 \\ & - 1298n' - 1298n + 1200 \\ & - 2p(9n'^2 + 12nn' + 9n^2 - 135n' - 135n + 600).\end{aligned}$$

Wie sich voraussehen ließ, ist dieser Ausdruck symmetrisch in n und n'. — Wie der *Cayley-Brill*sche Korrespondenzsatz (s. [124]), wird die so gefundene Formel auch auf zusammengesetzte Kurven anwendbar sein, wenn sich nur keine Gerade oder kein Punkt unter den die Kurve zusammensetzenden Teilen befindet. Die Ausnahme folgt daraus, daß weder das benutzte Verfahren noch die *Plücker*schen Formeln auf Gerade oder Punkte anwendbar sind.[1])

Als einfache Beispiele für das aufgestellte Resultat sind die Fälle $n = n' = 4$ zu nennen. Hier wird $\eta = 0$, unabhängig von dem Wert von p, also sowohl für $p = 0$, d. h. wenn die Kurve einen Doppelpunkt und zwei Spitzen hat, als auch für $p = -1$, d. h., wenn sie aus zwei Kegelschnitten zusammengesetzt ist. Dadurch erhält man die früher erwähnten Schließungssätze [115] 3 und [45].

1) *Cayley* hat (Philosophical Transactions of the Royal Society of London 161 S. 369—412, 1871. Collected Papers VIII S. 212—257) den hier mittels des *Cayley-Brill*schen Satz hergeleiteten Ausdruck für η auf andere Weise gefunden, nämlich durch Anwendung seiner funktionellen Methode [34], in Verbindung mit den einfacheren Resultaten, die solche Fälle betreffen, in welchen die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 nicht alle derselben Kurve angehören. Gleichzeitig gibt er auch die hier vorliegende Bestimmung insofern an, als er die gesamte Anzahl der Koinzidenzen von P_1 und P_7 findet (wobei sich nur in die Bestimmung der Wertigkeit k_7 ein Rechenfehler eingeschlichen hat). Dagegen findet er nur ganz summarisch, durch Abziehen des auf andere Weise gefundenen Ausdrucks der Zahl 6η von der Gesamtzahl von Koinzidenzen die Anzahl derjenigen, die nicht von ein- und umbeschriebenen Dreiecken herrühren, und spezifiziert nicht, wie es hier, wo wir uns allein auf das *Cayley-Brill*sche Prinzip stützten, geschehen mußte, die verschiedenen Entstehungsarten dieser fremden Lösungen.

Zur Übung empfehlen wir die Bestimmung und Erklärung der Koinzidenz von P_1 mit P_5. Da die Anzahl dieser Koinzidenzen nur aus bereits bekannten Anzahlen zusammengesetzt ist, kann man selbst die Richtigkeit der Auflösung prüfen. — Dasselbe gilt von den Koinzidenzen von P_1 und P_4. Dagegen führt die Abzählung der Koinzidenzen von P_1 und P_6 auf ein neues Resultat. — Von Dreiecken kann man weiter zu Vierecken usw. übergehen. Die Abzählung der zu diesen Untersuchungen dienenden Koinzidenzen wird zwar keine neue Schwierigkeiten darbieten. Dagegen wird die schon für Dreiecke weitläufige Unterscheidung zwischen verschiedenen Arten von Koinzidenzen noch beschwerlicher werden.

[138] Über die Anwendung auf Raumkurven. Da die Punkte einer Raumkurve eindeutig auf eine ebene Projektion derselben Kurve abgebildet werden, kann eine (α_1, α_2)-Korrespondenz auf der Raumkurve unmittelbar durch eine auf einer ebenen Kurve stattfindende ersetzt werden, wodurch der *Cayley-Brill*sche Korrespondenzsatz auch auf sie anwendbar wird. Es handelt sich jedoch darum, eine sich unmittelbar an die Raumkurve anschließende Bestimmung der Wertigkeit zu finden. Dies gelingt dadurch, daß die Raumkurve auf einer gewissen Fläche liegt, deren Punkte durch dieselbe Projektion wie die der Raumkurve selbst eindeutig auf die Ebene abgebildet werden, nämlich auf einem zu der Kurve gehörigen sogenannten Monoid.

Nehmen wir, wie in [84], an, daß die Raumkurve c_n^p von der Ordnung n ist und keine mehrfachen Punkte hat. Ist p ihr Geschlecht, so hat sie $h = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$ scheinbare Doppelpunkte, oder ebenso viele von einem willkürlichen Punkt A ausgehende Bisekanten. Diese werden Doppelerzeugende des Kegels φ_n sein, der c_n^p vom Punkte A aus projiziert. Durch sie legen wir einen willkürlichen Kegel ψ_r von der Ordnung r (wo $r \geqq n-2$ ist) mit dem Scheitel A, sodann durch die Raumkurve und die Spuren der genannten h Doppelerzeugenden und der übrigen gemeinschaftlichen $nr - 2h$ Erzeugenden der beiden Kegel φ_n und ψ_r in einer beliebigen Ebene α eine Fläche ω_{r+1} von der Ordnung $r+1$. Die Existenz einer solchen Fläche folgt [39] daraus, daß, weil $r \geqq n-2$, und weil $h = 1$ für $n = 3$ und $h > 1$ für $n > 3$ ist[1]),

$$\frac{1}{6}(r+2)(r+3)(r+4) - 1 - (nr - h) > n(r+1)$$

wird. Der Kegel χ_{r+1} $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der die Spur der Fläche ω_{r+1} in α vom Scheitel A aus projiziert, wird dann alle die $nr - h$ den Kegeln φ_n und ψ_r gemeinschaftlichen Erzeugenden und somit alle

1) Dies kann man z. B. daraus schließen, daß die Kurve auf ihre Projektion von einem Punkt der Kurve aus, also auf eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, eindeutig bezogen ist. Ihr Geschlecht $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - h$ ist also $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$. Also ist $h \overline{\overline{>}} n-2$. Das so erhaltene Minimum von h wird übrigens nur für $n = 3$ oder $n = 4$ erreicht.



nr Schnittpunkte der Raumkurve mit diesen Erzeugenden (von welchen die *h* sie in zwei Punkten schneiden) enthalten und weiter durch die Spuren der Raumkure in α gehen. Alle Flächen des Büschels

$$\alpha \psi_r + k \chi_{r+1} = 0$$

schneiden also die Raumkurve in $n(r+1)$ festen Punkten. Bestimmt man also k so, daß die gefundene Fläche (Monoid) noch durch einen weiteren Punkt von c_n^p geht, so wird sie diese Kurve ganz enthalten. Da der Kegel φ_n und das Monoid sich außerdem nur in Geraden durch A schneiden, so wird die Raumkurve c_n^p durch den Kegel und das Monoid völlig bestimmt.

Die Punkte des Monoids werden durch Projektion vom singulären Punkt A aus eindeutig auf eine Ebene abgebildet. Nur die Punkte der durch A gehenden Geraden des Monoids werden alle in den Spuren dieser Geraden abgebildet. Da der Punkt A willkürlich im Raume gewählt werden kann, kann man es vermeiden, daß die Koinzidenzpunkte einer zu betrachtenden (α_1, α_2)-Korrespondenz auf c_n^p in Schnittpunkte dieser Kurve mit den genannten Geraden fallen. Nehmen wir nun an, daß bei dieser Korrespondenz die α_2 einem willkürlichen Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 durch eine Fläche ω ausgeschnitten werden, die in P_1 k zusammenfallende Schnittpunkte mit c_n^p hat, so wird diese Fläche das Monoid in einer Kurve schneiden, deren Projektion auch die Projektion von c_n^p in k zusammenfallenden Punkten und außerdem nur in den Projektionen der dem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2, sowie in den festen Spuren der Geraden des Monoids nebst den Projektionen etwaiger fester Schnittpunkte von ω und c_n^p schneidet. In der Projektion hat man somit eine (α_1, α_2)-Korrespondenz mit der Wertigkeit k. Diese hat $\alpha_1 + \alpha_2 + 2kp$ Koinzidenzen. Dies ist also auch der Fall mit der (α_1, α_2)-Korrespondenz auf der Raumkurve. Wenn somit die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 durch eine Fläche ausgeschnitten werden, die in P_1 k zusammenfallende Schnittpunkte mit der Kurve und keine anderen mit P_1 beweglichen Schnittpunkte als die Punkte P_1 und P_2 hat, so ist k die Wertigkeit der Korrespondenz. Wenn die sich mit P_1 ändernde Fläche verschiedenartige Schnittpunkte hat, kann man den Satz [119] über Zusammensetzung von Korrespondenzen unmittelbar auf diesen Fall übertragen.

Um diese Methode sogleich durch ein Beispiel zu erläutern, können wir sie zur Bestimmung der Anzahl e'' von stationären Schmiegungsebenen anwenden, die wir in Art. [84] — dessen Benennungen wir auch hier benutzen werden — durch Anwendung der *Plücker*schen Formeln gefunden haben.

Im Berührungspunkt einer solchen Ebene fallen vier Schnittpunkte zusammen. Wir können sagen, daß die Ebene eine Schmiegungsebene

ist, deren Berührungspunkt P_1 mit einem ihrer $n-3$ Schnittpunkte P_2 zusammenfällt. Zwischen den Punkten P_1 und P_2 findet dann eine $(n''-3, n-3)$-Korrespondenz mit der Wertigkeit 3 statt. Die Anzahl e'' der Koinzidenzen ist also

$$e'' = n + n'' - 6 + 6p.$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht mittels der übrigen Gleichungen in [84] auf die daselbst angegebenen Formen reduzieren oder in

$$e'' = 2\,(3n^2 - 7n - 6h)$$

umformen.

Die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 kann sodann zu einer indirekten Bestimmung der Wertigkeit der Korrespondenz zwischen zwei Schnittpunkten P_2 und P_2' derselben Schmiegungsebene mit dem Berührungspunkt P_1 benutzt werden. Die einem Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_2' (oder umgekehrt) sind die von P_1 und P_2 verschiedenen Schnittpunkte der $n''-3$ durch P_2 gehenden und nicht in P_2 berührenden Schmiegungsebenen. Ihre Anzahl ist also $(n''-3)(n-4)$ und sie werden von einer aus $n''-3$ Ebenen bestehenden Fläche ausgeschnitten, die die Kurve $(n''-3)$-mal in P_2 und dreimal in jedem Punkt P_1 trifft. Da die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 drei war, wird also die Wertigkeit k der Korrespondenz zwischen P_2 und P_2' durch die Gleichung

$$n'' - 3 = k + 3 \cdot 3$$

bestimmt, und es ist somit $k = n'' - 12$.

Die Anzahl v'' der Koinzidenzen und also der Schmiegungsebenen, die je noch eine weitere einfache Berührung mit der Kurve haben, ist somit, wie wir schon anders gefunden haben [84],

$$v'' = 2\,(n''-3)\,(n-4) + 2\,(n''-12)\,p$$

oder

$$v'' = 3\,[n\,(n^3 - 3n^2 - 8n + 22) - 2h\,(2n^2 + 3n - 10) + 4h^2].$$

[139] Weitere Beispiele; mehrfache Sekanten. In [33] haben wir die Anzahlbestimmungen für Trisekanten und Quadrisekanten einer Raumkurve als Beispiel einer Methode benutzt, die wir ausdrücklich als unvollständig bezeichneten, weil sie voraussetzte, daß die betreffenden Zahlen allein von n und h abhängen. Die Richtigkeit dieser Voraussetzung ergab sich zwar aus [64], wo gleichzeitig eine Anleitung zu einer anderen Bestimmung gegeben ist. Einfacher und direkter geschieht jedoch die Bestimmung durch Anwendung des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes. Es wird genügen hier zu zeigen, wie man die Anzahl t_4 der Quadrisekanten der Raumkurve c_n^p finden kann, wenn man nicht nur den schon in [31] bewiesenen Ausdruck für die Anzahl t_2 der zwei Gerade schneidenden Bisekanten

$$t_2 = h + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1),$$

sondern auch den Ausdruck für die Anzahl t_3 der eine Gerade schneidenden Trisekanten

$$t_3 = (n-2)\left(h - \tfrac{1}{6}\, n\,(n-1)\right)$$

kennt. Die ganz entsprechende, aber einfachere Herleitung dieses Ausdrucks wird nämlich dann ein gutes Übungsbeispiel abgeben.

Zum Gebrauch für unsere Bestimmung erinnern wir noch daran, daß die Anzahl der durch einen Punkt M der Kurve c_n^p gehenden Geraden, die die Kurve noch in zwei Punkten schneiden, $h - n + 2$ ist. Diese sind Doppelerzeugende des Kegels von der Ordnung $n - 1$ und dem unveränderten Geschlecht p, der die Kurve vom Punkt M aus projiziert (siehe [84]).

Verbinden wir (Fig. 29) einen beweglichen Punkt P_1 der Raumkurve mit einem festen Punkt A_1 des Raumes, so gibt es, außer den durch P_1 gehenden, $t_3 - (h - n + 2)$ Trisekanten, die $A_1 P_1$ schneiden. Die Ebene, die eine dieser Trisekanten mit einem anderen festen Punkt des Raumes A_2 verbindet, wird, außer in den Schnittpunkten der Trisekante, die Kurve in $n - 3$ Punkten P_2 schneiden. Da die einem Punkt P_2 entsprechenden Punkte P_1 ganz auf dieselbe Weise bestimmt werden, so ist für die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2

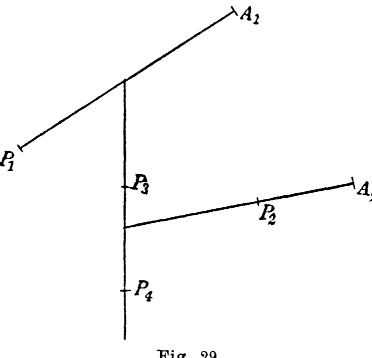


Fig. 29.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (t_3 - h + n - 2)\,(n - 3).$$

Um die Wertigkeit k_{12} dieser Korrespondenz zu finden, müssen wir im voraus die zweier anderen Korrespondenzen kennen, nämlich die Wertigkeit k_{34} der Korrespondenz zwischen zwei Schnittpunkten P_3 und P_4 der Trisekante und die Wertigkeit k_{13} derjenigen zwischen P_1 und einem dieser Punkte P_3.

Die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_3 und P_4 findet man leicht, da man bereits die Anzahl ihrer Koinzidenzen kennt. Für diese Anzahl v, die wir auch in [84] benutzten, haben wir in [64] den folgenden Wert gefunden, den man übrigens leicht mittels des einfachen Korrespondenzsatzes bestimmen könnte (vgl. [115] 8):

$$v = n(n-2)(n-5) - 2h(n-6).$$

Dasselbe Resultat muß sich durch Anwendung des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes ergeben. Jedem Punkt P_3 der Kurve entsprechen nun $2(h - n + 2)$ Punkte P_4 und umgekehrt. Also ist

$$n(n-2)(n-5) - 2h(n-6) = 4(h - n + 2) + 2k_{34}p.$$

Da $2p = (n-1)(n-2) - 2h$ ist, so findet man hieraus $k_{34} = n - 4$.

Da weiter die einem Punkt P_3 entsprechenden Punkte P_1 zusammen mit den ihm entsprechenden Punkten P_4 durch $h - n + 2$ durch P_3 gehende Ebenen ausgeschnitten werden, so ist

$$h - n + 2 = k_{13} + k_{34},$$

und da die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 zusammen mit den ihm entsprechenden Punkten P_3 durch $t_3 - h + n - 2$ nicht durch P_1 gehende Ebenen ausgeschnitten werden, so ist

$$0 = k_{12} + k_{13}.$$

Daraus findet man für die uns hier besonders beschäftigende Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 die Wertigkeit

$$k_{12} = 2(n-3) - h.$$

Sollen die Punkte P_1 und P_2 koinzidieren, so müssen entweder die zwei Ebenen, die sie mit A_1 und A_2 verbinden und sich in einer Trisekante schneiden, zusammenfallen oder diese Trisekante muß die Kurve c_n^p noch in einem vierten Punkt schneiden Im ersten Fall ist die Trisekante eine der t_3, die $A_1 A_2$ schneiden, und die Koinzidenz findet dann in den übrigen $n-3$ Schnittpunkten der durch die Trisekante und durch $A_1 A_2$ bestimmten Ebene statt. Im zweiten Fall findet die Koinzidenz in jedem der vier Schnittpunkte der Quadrisekante statt.

Die *Cayley-Brill*sche Formel liefert uns also

$$2(t_3 - h + n - 2)(n-3) + 2(2(n-3) - h)p = t_3(n-3) + 4t_4.$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für p und t_3 findet man

$$t_4 = \tfrac{1}{24}[12h(h - 4n + 11) - n(n-2)(n-3)(n-13)].$$

Die hier nebenbei gefundene Wertigkeit k_{13} kann dazu benutzt werden, um die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte zu bestimmen, die wir hier P_1 und P_3 genannt haben, d. h. um die Klasse der Einhüllenden der Ebenen zu finden, die den Ort der Trisekanten in den Punkten der gegebenen Kurve berühren. Man findet für diese Anzahl z den Wert

$$z = -\tfrac{5}{2}n(n-2)(n-3) + h(n^2 + 5n - 22) - 2h^2.$$

Übrigens gelang uns ja die Bestimmung der verschiedenen Wertigkeiten nur dadurch, daß wir die Anzahl der Koinzidenzen einer der untersuchten Korrespondenzen, nämlich der zwischen den Punkten P_3 und P_4 stattfindenden, durch ein anderes Hilfsmittel als den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz gefunden hatten. Dies war notwendig, wenn man nicht weiter bis zu einer noch einfacheren Korrespondenz zurückgehen wollte, weil es wahrscheinlich keine Fläche gibt, die c_n^p, außer in festen Punkten, allein in P_3 und den Schnittpunkten (P_4) der von diesem Punkt ausgehenden Trisekanten schneidet. Es wäre wenigstens schwierig, eine solche aufzufinden. Gäbe es eine solche Fläche von der

Ordnung r, so müßte man nämlich zur Bestimmung der Wertigkeit k_{34} die Gleichung

$$rn = k_{34} + 2(h - n + 2) + f$$

aufstellen, wo f die Anzahl der festen, d. h. der von P_3 unabhängigen Schnittpunkte ist; da $k_{34} = n - 4$ ist, wäre also

$$f = rn - 2h + n.$$

Wie würde man aber auf solche festen Punkte kommen?

Dagegen kann man zwar die dem Punkte P_3 entsprechenden Punkte P_4 durch eine Fläche ausschneiden, die die Kurve noch in anderen beweglichen Punkten P_5 schneidet, nämlich durch den ersten Polarkegel eines beliebigen Punktes A in Beziehung auf den Kegel mit dem Scheitel P_3, der die Kurve projiziert (Fig. 30). Da dieser Kegel von der Ordnung $n - 1$ ist, so ist sein Scheitel P_3 ein $(n - 2)$-facher Punkt des Polarkegels. Es besteht also zwischen der Wertigkeit k_{34} und der Wertigkeit k_{35} der Korrespondenz zwischen P_3 und P_5 die Gleichung

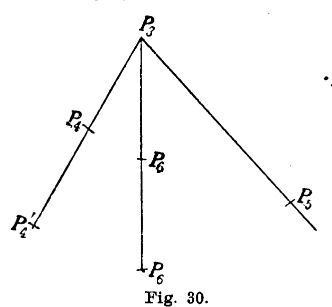


Fig. 30.

$$n - 2 = k_{34} + k_{35}.$$

Die Wertigkeit k_{35}, die somit 2 sein muß, hätte man anders bestimmen können, da man bereits die Anzahl der Koinzidenzen von P_3 und P_5, die eine $(n - 2, n' - 2)$-Korrespondenz bilden, kennt. P_3 fällt nämlich in den n'' Punkten, deren Schmiegungsebenen durch A gehen, mit P_5 zusammen, und wir wissen [84], daß $n'' = 3n' - 3n$ ist. Es soll also

$$n + n' - 4 + 2k_{35}\,p = 3n' - 3n$$

sein, und da $2(p - 1) = n' - 2n$ ist, ergibt diese Gleichung $k_{35} = 2$.[1])

Man wird die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen den Punkten P_4 und P_5 finden können, da man bereits die Anzahl ihrer Koinzidenzen kennt. Soll nämlich P_4 mit P_5 zusammenfallen, so muß die Ebene, die die Trisekante $P_3 P_4 P_4'$ mit dem festen Punkt A verbindet, den Kegel, der die Kurven vom Punkt P_3 aus projiziert, im Punkte P_4, der in diesem Fall nicht mit P_3 zusammenfällt, berühren. Dies geschieht erstens, wenn die Gerade $P_3\ P_4$ selbst die Kurve im Punkte P_4 (der dann mit P_4' zusammenfällt) berührt. $P_3 P_4$ ist dann eine der die Kurve schneidenden Tangenten, deren Anzahl v wir schon gefunden haben:

$$v = n(n - 2)(n - 5) - 2h(n - 6).$$

Sonst muß die durch die Trisekante $P_3 P_4 P_4'$ und A gehende Ebene

1) Dies folgt übrigens schon daraus, daß die Punkte P_3, die einem Punkt P_5 entsprechen, durch eine Ebene ausgeschnitten werden, die durch A geht und die Kurve in P_5 berührt.

den Ort der Trisekanten im Punkt P_4 der Kurve berühren, und wir haben eben gesehen, daß die Einhüllende solcher Ebenen von der Klasse

$$z = -\tfrac{5}{2}n(n-2)(n-3) + h(n^2 + 5n - 22) - 2h^2$$

ist. Im letzteren Fall fällt P_4 zweimal mit einem entsprechenden Punkt P_5 zusammen, da jeder der zwei anderen Schnittpunkte der Trisekante als Punkt P_3 betrachtet werden kann. Da nun in der Korrespondenz zwischen P_4 und P_5 einem Punkt P_5

$$2(n-2)(h-n+2)$$

Punkte P_4 und einem Punkt P_4

$$2(h-n+2)(n'-2)$$

Punkte P_5 entsprechen, so hat man

$$\begin{aligned} 2(n-2)(h-n+2) + 2(h-n+2)(n'-2) + 2k_{45}p \\ = n(n-2)(n-5) - 2h(n-6) - 5n(n-2)(n-3) \\ + 2h(n^2+5n-22) - 4h^2. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $k_{45} = -2(n-4)$.

Diese Wertigkeit zusammen mit der schon im voraus gefundenen Wertigkeit k_{34} kann weiter benutzt werden, um die Wertigkeit k_{46} der Korrespondenz zwischen den anderen Schnittpunkten P_4 und P_6 zweier von dem Punkt P_3 der Kurve ausgehenden Trisekanten zu finden. Es sei P_3P_4 eine der durch P_4 gehenden $h-n+2$ Trisekanten, P_3 einer der anderen zwei Schnittpunkte dieser Trisekante. Projizieren wir nun die Raumkurve vom Punkt P_3 aus, so liegen die dem Punkte P_4 entsprechenden Punkte P_6 auf den ersten Polarkegeln eines willkürlichen Punktes A in Beziehung auf diese $2(h-n+2)$ projizierenden Kegel. Diese gehen je einmal durch P_4. Ein Schnittpunkt P_3 einer durch P_4 gehenden Trisekante ist Scheitel eines dieser Kegel $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und einfacher Schnittpunkt eines anderen, nämlich desjenigen, dessen Scheitel der andere Schnittpunkt derselben Trisekante ist. Die übrigen (einfachen) Schnittpunkte dieser Polarkegel sind außer den Punkten P_6 die Berührungspunkte P_5 der durch A und die Scheitel der Kegel gehenden Tangentialebenen der Kurve. Also ist

$$k_{45} + k_{46} + (n-1)k_{34} = 2(h-n+2),$$

und da $k_{45} = -2(n-4)$, $k_{34} = n-4$ ist, wird

$$k_{46} = -n^2 + 5n - 8 + 2h.$$

Die Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P_4 und P_6 wird also

$$2 \cdot 4(h-n+2)(h-n+1) + 2k_{46} \cdot p.$$

Diese Koinzidenzen können auf doppelte Weise entstehen:

1. P_4 kann einer der 4 Schnittpunkte der t_4 Quadrisekanten sein. 3 der von P_4 ausgehenden Trisekanten fallen dann mit der Quadrise-

kante zusammen, und der Punkt P_3 ist dann einer der 2 anderen Schnittpunkte dieser Trisekante; für eine der anderen von einem solchen Punkt P_3 ausgehenden und mit der Quadrisekante zusammenfallenden Trisekanten wird P_4 als einer der anderen Schnittpunkte P_6 auftreten. Die Quadrisekante gibt also zu 24 Koinzidenzen Anlaß.

2. Fällt der Koinzidenzpunkt von P_4 und P_6 nicht auf eine Quadrisekante, so muß die Ebene der zwei zusammenfallenden Trisekanten $P_3 P_4$ und $P_3 P_6$ die Kurve berühren, sowohl in dem Punkte, in dem P_4 und P_6 zusammenfallen, als auch im dritten Schnittpunkt der zusammenfallenden Trisekanten, in welchem also eine weitere Koinzidenz stattfindet. Bezeichnen wir mit ζ die Anzahl solcher Doppeltangentialebenen, für welche die Verbindungslinie der Berührungspunkte eine Trisekante ist, so wird die gefundene Anzahl der Koinzidenzen der Punkte P_4 und P_6 gleich

$$24 t_4 + 2\zeta.$$

Da t_4 schon bekannt ist, findet man sodann für ζ den Ausdruck

$$\zeta = -n(n-2)(5n-17) + 2h(n^2+4n-22) - 4h^2.$$

[140] Schließungssatz für Raumkurven vierter Ordnung erster Gattung; Beziehung auf *Poncelets* allgemeinen Schliessungssatz [46]. Eine Raumkurve c_4^1 von der Ordnung 4 und vom Geschlecht 1 (also mit zwei scheinbaren Doppelpunkten) ist die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung [7] und somit eines ganzen Büschels solcher Flächen. Jede dieser Flächen hat zwei Scharen von Erzeugenden. n dieser Scharen $R_1, R_2 \ldots R_n$, unter denen etwa auch die beiden einer der Flächen angehörigen ein- oder mehrmals auftreten können, seien gegeben. Sei P_1 ein beliebiger Punkt der Kurve, $P_1 P_2$ die durch ihn gehende Erzeugende der Schar R_1 und P_2 deren anderer Schnittpunkt mit der Raumkurve, $P_2 P_3$ die durch P_2 gehende Erzeugende der Schar R_2 und P_3 deren anderer Schnittpunkt mit c_4^1 usw., $P_n P_{n+1}$ also Erzeugende der Schar R_n. Fällt P_{n+1} nun mit P_1 zusammen, so wird von Erzeugenden der n Scharen ein geschlossenes n-Eck gebildet.

Um aufzufinden, wie viele derartige n-Ecke es gibt, müssen wir demnach die Anzahl der Koinzidenzen der korrespondierenden Punkte P_1 und P_{n+1} suchen. Wegen der Eindeutigkeit unserer Konstruktion hat man — mit unseren gewöhnlichen Benennungen —

$$\alpha_1 = \alpha_{n+1} = 1.$$

Die Wertigkeit k_{n+1} der den verschiedenen Werten von n entsprechenden Korrespondenzen zwischen P_1 und P_{n+1} kann man sukzessive für $n = 1, 2, 3 \ldots$ bestimmen.

Der einem Punkt P_1 entsprechende Punkt P_2 wird durch eine Ebene ausgeschnitten, die durch P_1 und irgend eine feste Erzeugende der anderen Schar von Erzeugenden, die der durch die Schar R_1 er-

zeugten Fläche angehört, gelegt werden kann. Da diese Ebene durch P_1 geht, ist $k_2 = 1$. Man findet so, daß die Schar R_1 4 Erzeugende enthält, die c_4^1 berühren.

Der einem Punkt P_1 entsprechende Punkt P_3 wird durch die Ebene bestimmt, die durch P_2 und irgend eine feste Erzeugende der anderen Schar von Erzeugenden, die der durch die Schar R_2 erzeugten Fläche angehört, gelegt werden kann. Da aber diese Ebene durch P_2 im allgemeinen nicht durch P_1 geht, ist $k_2 + k_3 = 0$. Auf dieselbe Weise bestimmt man die folgenden Wertigkeiten und findet dann, daß

$$1 = k_2 = -k_3 = k_4 = -k_5 \ldots$$

ist. Durch Anwendung des Korrespondenzsatzes findet man also, daß die gestellte Aufgabe 0 oder 4 Auflösungen hat, je nachdem die Seitenzahl des in c_4^1 einzubeschreibenden Vielecks gerade oder ungerade ist. Hier ist jedoch die ein für allemal gemachte Ausnahme zu beachten, daß die Anzahl von Lösungen unendlich werden kann. Dadurch findet man den folgenden Satz:

Ist n eine gerade Zahl und $P_1 P_2 \ldots P_n$ ein geschlossenes, der Kurve c_4^1 einbeschriebenes n-Eck, so wird es eine stetige Folge solcher einbeschriebenen n-Ecke geben, deren Seiten der Reihe nach denselben Scharen von Erzeugenden derselben Flächen zweiter Ordnung wie $P_1 P_2$, $P_2 P_3 \ldots$, $P_n P_1$ angehören.

Dieser Satz steht in gewisser Beziehung zu einigen anderen, früher bewiesenen Schließungssätzen. Projiziert man die Kurve c_4^1 von einem ihrer Punkte A aus auf eine Ebene, so erhält man eine ebene Kurve dritter Ordnung und die Projektionen der einbeschriebenen Vielecke werden *Steiner*sche Vielecke sein [127]. Die hier gefundenen Wertigkeiten sind auch dieselben, die wir für die Korrespondenzen fanden, deren Koinzidenzen die Schließung der *Steiner*schen Vielecke bedingten.

Projiziert man dagegen die Kurve von dem Scheitel O einer der durch c_4^1 gehenden Kegelflächen zweiten Grades aus auf eine Ebene ε, so ist die Projektion ein Kegelschnitt c_2, dessen Punkte Q je zwei Punkten P der Kurve c_4^1 entsprechen. Die Gerade $Q_1 Q_2$, die zwei Punkte Q_1 und Q_2 von c_2 verbindet, ist Projektion von vier Geraden $P_1 P_2$, die den beiden Scharen von Erzeugenden zweier Flächen zweiter Ordnung angehören, die durch c_4^1 gehen und deren Spuren k_2' und (k_2') auf der Ebene ε durch die vier auf c_2 liegenden Spuren der Kurve c_4^1 gehen und $Q_1 Q_2$ berühren. Ein dem Kegelschnitte c_2 einbeschriebenes, offenes $(n-1)$-Seit, dessen Seiten $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3 \ldots$, $Q_{n-1} Q_n$ der Reihe nach die Kegelschnitte $k_2', k_2'' \ldots k_2^{(n-1)}$ desselben Büschels berühren, ist, wenn $P_1, P_2 \ldots P_n$ beliebige der in die Punkte $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ projizierten Punkte von c_4^1 sind, Projektion eines der Kurve c_4^1 einbeschriebenen, offenen $(n-1)$-Seits $P_1 P_2 \ldots P_n$, dessen Seiten Erzeugende der durch die genannten Kegelschnitte gehenden Flächen des Büschels sind. Die Gerade $Q_n Q_1$ ist die

Projektion zweier durch P_n gehenden Bisekanten der Raumkurve, die Erzeugende der zwei Flächen des Flächenbüschels sind, deren Spuren $k_2^{(n)}$ und $(k_2^{(n)})$ die Gerade $Q_n Q_1$ berühren. Die eine dieser Geraden, die wir $k_2^{(n)}$ entsprechen lassen, geht durch P_1 und schließt also das n-Eck $P_1 P_2 \ldots P_n$, die andere geht aber durch den anderen in den Punkt Q_1 projizierten Punkt (P_1) der Kurve c_4^1; in letzterem Fall ist $P_1 P_2 \ldots P_n (P_1)$ ein geschlossenes, der Kurve c_4^1 einbeschriebenes $(n+1)$-Eck, dessen letzte Seite $(P_1) P_1$ auch Erzeugende einer Fläche des Büschels ist, nämlich des die Kurven c_1^4 projizierenden Kegels.

Ist nun n eine gerade Zahl, so wird die eben gefundene, durch $P_1 P_2 \ldots P_n$ bestimmte, stetige Reihe von n-Ecken in eine stetige Reihe von n-Ecken projiziert werden, die c_2 einbeschrieben sind und deren Seiten die Kegelschnitte $k_2', k_2'' \ldots k_2^{(n)}$ eines c_2 enthaltenden Büschels berühren. Ist n dagegen eine ungerade Zahl, so wird ebenso $P_1 P_2 \ldots P_n (P_1)$ eine stetige Reihe von $(n+1)$-Ecken bestimmen, deren $(P_1) P_1$ entsprechende Seite immer durch O geht, also in denselben Punkt Q_1 projiziert wird, während die Projektionen der übrigen Seiten die Kegelschnitte $k_2', k_2'' \ldots k_2^{(n-1)}, (k_2^{(n)})$ berühren. Man erhält also auch in diesem Fall eine stetige Reihe von n-Ecken, die c_2 einbeschrieben sind, während die Seiten die genannten Kegelschnitte berühren. Wir haben somit einen neuen Beweis des in [46] anders bewiesenen *Poncelet*schen Schließungssatzes gefunden.[1])

[141] Übungen. 1. Durch Anwendung der *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes die Anzahl der Kegelschnitte zu finden, die durch vier gegebene Punkte gehen und eine Kurve c mit gegebenen *Plücker*schen Singularitäten berühren, und sodann die Anzahlen der Kegelschnitte zu finden, die durch drei gegebene Punkte gehen und entweder mit der Kurve c Berührung zweiter Ordnung haben oder sie in zwei Punkten berühren.

2. Mit den Bezeichnungen in [129] möge der dritte Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_2$ mit c_3 P_3 und der dritte Schnittpunkt der Geraden $P_1' P_2'$ mit c_3 P_3' benannt werden; man soll die Korrespondenz zwischen den Punkten P_3 und P_3' untersuchen.

3. Zu beweisen, daß mit den Bezeichnungen von [130] eine (3,1)-Korrespondenz mit der Wertigkeit $\frac{3}{2}$ zwischen dem Punkt P_1 und dem dritten Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_2'$ stattfindet; wo finden die sieben Koinzidenzen statt?

4. Zwei Punkte P_1 und P_2 einer harmonischen oder äquianharmonischen Kurve dritter Ordnung sind gegeben. Wie viele Korrespondenzen mit der Wertigkeit $0, +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ enthält die Kurve, in denen

---

1) Siehe die neue Behandlung des *Poncelet*schen und anderer Schließungssätze in einer Abhandlung von *C. Juel* in einer mir gewidmeten Festschrift, Kopenhagen 1909, an die derselbe Verfasser später in „Nyt Tidsskrift for Mathematik" eine Berichtigung geknüpft hat.

P_2 dem Punkt P_1 entspricht? Diese Aufgabe wird gelöst durch Betrachtung des Falles, in welchem P_1 und P_2 zusammenfallen.

5. In eine harmonische oder äquianharmonische Kurve dritter Ordnung ist ein n-Eck $P_1 P_2 \ldots P_n$ einbeschrieben. Wenn nun die Ecken sich so bewegen, daß immer zwischen P_1 und P_2, P_2 und $P_3 \ldots$, P_{n-1} und P_n, P_n und P_1 gewisse, durch die gegebene Lage bestimmte (1,1)-Korrespondenzen stattfinden, so ist die Frage, welche Beziehungen zwischen den Wertigkeiten dieser Korrespondenzen stattfinden können.

6. In den Fußnoten zu [133] und [134] und in [135] selbst sind Übungen vorgeschlagen.

7. Siehe Schluß von [137]. Eine * weitergehende neue Aufgabe ist die folgende: Die Anzahl der Dreiecke zu finden, die einer Kurve mit gegebenen *Plücker*schen Singularitäten so ein- und umbeschrieben sind, daß jede Ecke der Berührungspunkt der folgenden Seite ist. Ein einfacher Fall ist der, in welchem die Kurve dritter Ordnung ist.[1])

8. Den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz zur Bestimmung der Ordnung t_3 des Ortes der Trisekanten einer Raumkurve anzuwenden [139].

9. Eine $(\alpha_1 \alpha_2)$-Korrespondenz sei gegeben zwischen den Punkten P_1 und P_2 einer gegebenen ebenen Kurve; die Umhüllungskurve der Geraden $P_1 P_2$ zu untersuchen.

10. Durch den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz den folgenden Satz zu beweisen: Die Kurven eines Büschels schneiden eine Kurve c_n^p in Gruppen von $m_1 + m_2$ beweglichen Punkten und der Büschel enthält r Kurven, die c_n^p in Punkten, die nicht Basispunkte sind, berühren. Ersetzt man nun m_1 nicht auf c_n^p liegende Basispunkte durch solche, die auf c_n^p liegen, so werden die neuen Kurven mit c_n^p nur m_2 bewegliche Schnittpunkte haben; nehmen wir an, daß r_2 Kurven des geänderten Büschels c_n^p in Punkten berühren, die nicht Basispunkte sind, so ist $r = r_2 + 2m$.

Dieser Satz folgt übrigens unmittelbar aus dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl. In *Severi:* Lezioni di Geometria algebriche, Padova 1908 wird er der Lehre von den mehrfachen Punkten einer linearen Reihe von Punktreihen auf einer Kurve zu Grunde gelegt.

c) Korrespondenz von Punkten eines Gebildes mit zwei Dimensionen.

[142] Korrespondenzsatz für eine Fläche zweiter Ordnung. Durch Kombination verschiedener Anwendungen des einfachen Korrespondenzsatzes kann man auch Korrespondenzen zwischen Punkten einer Ebene, des Raumes, ja eines Raumes von beliebiger Dimension behandeln. Dabei gelingt es ebenfalls, allgemeine Korrespondenzsätze für diese Räume aufzustellen. Um solche Erweiterungen übersichtlicher

1) Siehe *H. Valentiner*, in Festschrift an *Zeuthen*, S. 146—156.

zu machen, wird der in Kapitel VI zu entwickelnde symbolische Kalkül nützlich sein, dessen sogenannte Koinzidenzformeln eben Anwendungen des Korrespondenzsatzes ausdrücken. So lange man sich jedoch auf zweidimensionale Korrespondenzen beschränkt, ist die Methode nebst ihren Anwendungen auch ohne diesen Kalkül hinlänglich übersichtlich, und die mehr unmittelbare Anknüpfung an die vorhergehende Darstellung, der man die Regeln für die Abzählung zusammenfallender Lösungen entlehnen kann, wird eine ausführlichere und daher nutzbringende Behandlung dieser Korrespondenzen erlauben. Da könnte es nun nahe liegen, mit der Korrespondenz in der Ebene anzufangen. Da aber für die Flächen zweiter Ordnung wegen der Zweizahl ihrer Scharen von Erzeugenden der Beweis des für sie geltenden Korrespondenzsatzes eine gewisse Symmetrie annehmen wird, sehen wir uns veranlaßt, jetzt mit ihnen anzufangen, um so mehr als später [196] eine Koinzidenzformel mehr unmittelbar auf den Korrespondenzsatz für die Ebene führen wird.

Wir wollen mit P_1 und P_2 zwei korrespondierende Punkte einer Fläche zweiter Ordnung φ_2 bezeichnen und annehmen, daß jedem Punkt P_1 α_2 Punkte P_2 und jedem Punkt P_2 α_1 Punkte P_1 entsprechen. Erzeugende der einen Schar nennen wir I, I′, I″..., Erzeugende der anderen Schar II, II′, II″... Durch $\beta(1\text{I}, 2\text{II})$ bezeichnen wir sodann die Anzahl der Punktpaare P_1 und P_2, für welche P_1 auf einer gegebenen I, P_2 auf einer gegebenen II liegt und durch $\beta(2\text{I}, 1\text{II})$ die Anzahl solcher Paare, bei welchen das Umgekehrte stattfindet.

Wir nehmen an, daß es ξ isolierte Koinzidenzpunkte gibt, in welchen P_1 mit P_2 so zusammenfällt, daß die Gerade $P_1 P_2$ keine bestimmte Grenzlage hat, und daß es außerdem eine Koinzidenzkurve gibt, in deren Punkten P_1 mit P_2 so zusammenfällt, daß $P_1 P_2$ eine bestimmte Grenzlage bekommt. Durch $\eta(\text{I})$ und $\eta(\text{II})$ bezeichnen wir die Anzahlen der Schnittpunkte der Koinzidenzkurve beziehungsweise mit einer I oder einer II, durch $\zeta(\text{I})$ und $\zeta(\text{II})$ die Anzahlen der Erzeugenden I beziehungsweise II, die zwei auf der Koinzidenzkurve zusammenfallende Punkte verbinden.

Betrachten wir nun die Punkte P_1 einer Erzeugenden I. II und II′ seien die Erzeugenden der anderen Schar, die durch einen solchen Punkt P_1 und einen entsprechenden Punkt P_2 gehen. Einer Erzeugenden II entsprechen dann α_2 Erzeugende II′ und einer II′ $\beta(1\text{I}, 2\text{II})$ Erzeugende II. Die $\alpha_2 + \beta(1\text{I}, 2\text{II})$ Koinzidenzen entsprechender Erzeugenden finden statt, wenn entweder P_1 einer der $\eta(\text{I})$ Schnittpunkte der Erzeugenden I mit der Koinzidenzkurve ist, oder die Gerade $P_1 P_2$ eine Erzeugende II ist. Also ist die Anzahl letzterer Fälle, oder die Anzahl der Punkte P_1 einer gegebenen Erzeugenden I, die mit einem entsprechenden Punkt P_2 auf ein und derselben Erzeugenden II liegen (Fig. 31):

$$\alpha_2 + \beta(1\text{I}, 2\text{II}) - \eta(\text{I}).$$

Nennen wir die durch einen solchen Punkt P_2 gehende Erzeugende der ersten Schar I', so werden ebensoviele Erzeugende I' der Erzeugenden I entsprechen. Durch Vertauschung der Punkte P_1 und P_2 findet man, daß der Erzeugenden I'

$$\alpha_1 + \beta(2\mathrm{I}, 1\mathrm{II}) - \eta(\mathrm{I})$$

Erzeugende I entsprechen. I wird mit I' koinzidieren, wenn I entweder durch einen der ξ Koinzidenzpunkte oder durch einen der $\zeta(\mathrm{II})$ Punkte der Koinzidenzkurve geht, in denen zwei auf derselben Erzeugenden II liegende Punkte P_1 und P_2 koinzidieren. Also findet man:

(1) $$\xi + 2\eta(\mathrm{I}) + \zeta(\mathrm{II}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta(1\mathrm{I}, 2\mathrm{II}) + \beta(2\mathrm{I}, 1\mathrm{II}).$$

Durch Vertauschung der Scharen von Erzeugenden findet man

(2) $$\xi + 2\eta(\mathrm{II}) + \zeta(\mathrm{I}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta(2\mathrm{I}, 1\mathrm{II}) + \beta(1\mathrm{I}, 2\mathrm{II}).$$

Daraus folgt wieder, daß

(3) $$2\eta(\mathrm{I}) - \zeta(\mathrm{I}) = 2\eta(\mathrm{II}) - \zeta(\mathrm{II})$$

ist. — Man gebe nun dem Punkte P_1 einen unendlich kleinen Abstand von einem der ξ Koinzidenzpunkte, von der Koinzidenzkurve oder von einem der $\zeta(\mathrm{I})$ (oder $\zeta(\mathrm{II})$) Punkte dieser Kurve, für die P_1P_2 mit einer Erzeugenden I (oder einer II) zusammenfällt. Dann wird sein Abstand von einem entsprechenden Punkt P_2 oder im letzten Fall von der P_2 enthaltenden Erzeugenden II (oder I) unendlich klein von der Ordnung μ; also muß die betreffende Koinzidenz μ-mal gezählt werden. Dies folgt aus der Herleitung der Formeln.

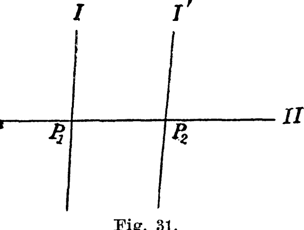


Fig. 31.

Die Regelfläche, deren Erzeugende Punkte P_1 und P_2 verbinden, die auf der Koinzidenzkurve zusammenfallen, wird eine Erzeugende I in ihren $\eta(\mathrm{I})$ Schnittpunkten mit der Koinzidenzkurve berühren und in ihren Schnittpunkten mit den $\zeta(\mathrm{II})$ Erzeugenden II, die selbst die genannte Eigenschaft haben, schneiden. Ihre Ordnung ist also $2\eta(\mathrm{I}) + \zeta(\mathrm{II})$ (oder $2\eta(\mathrm{II}) + \zeta(\mathrm{I})$). Berücksichtigt man noch die Tangentialebenen in den ξ Koinzidenzpunkten, so erhält man die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2).

[143] Berührungskurve einer Linienkongruenz mit einer Fläche zweiter Ordnung. Entsprechende Punktepaare einer Fläche φ_2 bestimmen die Strahlen einer Kongruenz und werden durch solche bestimmt. Dies macht die in [142] gefundenen Formeln zur Untersuchung von Linienkongruenzen besonders geeignet. Es seien nun zunächst P_1 und P_2 die Schnittpunkte eines Strahls einer Kongruenz von der Ordnung n und der Klasse n' [8] mit einer Fläche φ_2, von der wir vorläufig voraussetzen, daß sie keine besondere Beziehung zu der Kon-

gruenz hat, namentlich daß diese keine ihrer Erzeugenden enthält. Dann werden der Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 die folgenden Zahlen zugehören:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n$$
$$\beta(1\,\mathrm{I}, 2\,\mathrm{II}) = \beta(2\,\mathrm{I}, 1\,\mathrm{II}) = n',$$
$$\xi = \zeta(\mathrm{I}) = \zeta(\mathrm{II}) = 0.$$

Die Formeln [142] (1) und (2) ergeben also

$$\eta(\mathrm{I}) = \eta(\mathrm{II}) = n + n'.$$

Die Berührungskurve schneidet somit jede Erzeugende in $n + n'$ Punkten. Dies folgt übrigens schon aus [31], denn die Strahlen, die φ_2 in den Punkten einer gegebenen Erzeugenden berühren, werden diese und die unendlich benachbarte Erzeugende schneiden. Die Berührungskurve, die eine Tangentialebene von φ_2 in $2(n + n')$ Punkten schneidet, muß von dieser Ordnung sein, und die von den berührenden Strahlen erzeugte Regelfläche, die φ_2 längs dieser Kurve berührt und sonst nicht schneidet, muß dieselbe Ordnung haben. Sie berührt auch eine Erzeugende in $n + n'$ Punkten.

In dem Grenzfall, in dem eine Erzeugende I ein Strahl der Kongruenz ist, wird man diese Anzahlen ebenfalls noch anwenden können, wenn man sie nur in Übereinstimmung mit unserer Beweisführung erklärt. Dazu gehört, daß man die Erzeugende I als Teil der gefundenen Berührungskurve betrachtet. Sieht man von ihr ab, so wird $\eta(\mathrm{II})$ um 1 vermindert, was $\zeta(\mathrm{I}) = 2$ ergibt. Die Erzeugende I wird also die Grenzlage zweier Strahlen der Kongruenz sein, die φ_2 berühren: zwei der $n + n'$ Schnittpunkte der Geraden I mit der Berührungskurve werden davon herrühren und I wird doppelte Erzeugende der eben genannten Regelfläche sein. (Vgl. [31].)

Betrachten wir sodann den Fall, in welchem die ganze Schar der Erzeugenden I der Kongruenz angehört, und sehen wir von der Berührung der Erzeugenden selbst ab, die in allen Punkten der Fläche φ_2 stattfindet, so hat man

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n - 1, \quad \beta(1\,\mathrm{I}, 2\,\mathrm{II}) = \beta(2\,\mathrm{I}, 1\,\mathrm{II}) = n' - 1, \quad \xi = \zeta(\mathrm{II}) = 0,$$

und also [142] (1)

$$\eta[\mathrm{I}] = n + n' - 2.$$

$\eta(\mathrm{II})$ läßt sich direkt durch die Bemerkung bestimmen, daß [31] Strahlen der Kongruenz, die eine Erzeugende II schneiden, eine Regelfläche von der Ordnung $n + n'$ erzeugen, auf der II, als Punktgebilde betrachtet, die Mannigfaltigkeit n und als Ebenengebilde betrachtet, die Mannigfaltigkeit n' hat (d. h. daß eine Ebene durch II die Fläche in n' Punkten dieser Gerade berührt). Ein Teil dieser Fläche ist in dem hier betrachteten Fall φ_2 selbst. Die Restfläche ist von der



Ordnung $n + n' - 2$ und auf ihr hat II die Punktmannigfaltigkeit $n - 1$ und die Ebenenmannigfaltigkeit $n' - 1$. Betrachtet man die Berührungspunkte einer willkürlichen Ebene durch II mit φ_2 und mit der Restfläche als korrespondierende Punkte, so findet man, daß diese Flächen sich in $n + n' - 2$ Punkten der Geraden II berühren. Die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Geraden II mit der Berührungskurve der Kongruenz mit φ_2. Also ist auch

$$\eta(\mathrm{II}) = n + n' - 2, \quad \zeta(\mathrm{I}) = 0.$$

[144] Gemeinschaftliche Strahlen zweier Kongruenzen. Um die gemeinschaftlichen Strahlen zweier Kongruenzen, deren Ordnung und Klasse wir beziehungsweise n_1 und n_1', n_2 und n_2' nennen, zu finden, benutzen wir die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2, in welchen Strahlen der Kongruenzen, die sich in einem Punkt Q einer Fläche zweiter Ordnung φ_2 schneiden, diese nochmals treffen. Dann ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n_1 n_2.$$

Der Ort der Schnittpunkte der Strahlen, von denen der eine I in P_1, der andere II in P_2 trifft, wird die Ebene (I II) in

$$n_1' n_2' + n_1' n_2 + n_2' n_1 + n_1 n_2$$

Punkten treffen, nämlich in den $n_1' n_2'$ Schnittpunkten der in dieser Ebene liegenden Strahlen der beiden Kongruenzen, n_2-mal in jedem Schnittpunkte der n_1' in (I II) liegenden Strahlen der ersten Kongruenz mit II, n_1-mal in jedem Schnittpunkt der n_2' in (I II) liegenden Strahlen der anderen Kongruenz mit I und $n_1 n_2$-mal im Schnittpunkte (I II). Der Ort ist also eine Kurve von der genannten Ordnung:

$$(n_1 + n_1')(n_2 + n_2'),$$

und die drei letztgenannten Kategorien sind mehrfache Punkte von den Ordnungen n_2, n_1 und $n_1 n_2$, weil sie als Schnittpunkte verschiedener Strahlen entstehen. Der Ort schneidet die Fläche φ_2 in $2(n_1 + n_1')(n_2 + n_2')$ Punkten, von welchen $n_2 n_1'$, $n_1 n_2'$ und $n_1 n_2$ in die genannten mehrfachen Punkte fallen. Die übrigen sind Schnittpunkte Q solcher Strahlen der zwei Kongruenzen, die die Fläche φ_2 nochmals in Punkten P_1 der Geraden I und P_2 der Geraden II schneiden; da sich die Anzahl durch Vertauschung der Indices 1 und 2 nicht ändert, ist

$$\beta(1\,\mathrm{I}, 2\,\mathrm{II}) = \beta(2\,\mathrm{I}, 1\,\mathrm{II}) = (n_1 + n_1')(n_2 + n_2') + n_1' n_2'.$$

Setzen wir voraus, daß die Kongruenzen unabhängig von einander sind und namentlich keine Regelfläche gemein haben, und daß die Fläche φ_2 unabhängig von ihnen gewählt ist, so gibt es keine Koinzidenzkurve, sondern nur Koinzidenzpunkte. Also werden die beiden η und die beiden ζ null und

$$\xi = 2 n_1 n_2 + 2 n_1' n_2' + 2(n_1 + n_1')(n_2 + n_2').$$



Ein Teil der Koinzidenzpunkte sind die Schnittpunkte der Berührungskurven der Kongruenzen mit der Fläche φ_2. Diese Kurven schneiden beide Scharen der Erzeugenden der Fläche φ_2 beziehungsweise je in $n_1 + n_1'$ oder $n_2 + n_2'$ Punkten [143]. Die Anzahl ihrer Schnittpunkte ist also (siehe [28]) $2(n_1 + n_1')(n_2 + n_2')$. Die übrigen Koinzidenzpunkte sind die Schnittpunkte der Fläche φ_2 mit den Strahlen, die beide Kongruenzen gemeinsam haben. Da diese φ_2 je in zwei Punkten schneiden, gibt es $n_1 n_2 + n_1' n_2'$ gemeinschaftliche Strahlen. Dieser früher [32] berührte Satz von *Halphen* ist also jetzt bewiesen. Wenn wir ihn jedoch in [149] noch einmal im Anschluß an den Korrespondenzsatz für die Ebene beweisen werden, so geschieht es, teils um daran die Behandlung eines Spezialfalles anzuknüpfen, teils als Vorbereitung für die entsprechende Untersuchung einer einzelnen Kongruenz [150].

[145] Schließungssatz für *Hirst*sche Kongruenzen. Man könnte die in [143] ausgeführte Bestimmung der Strahlen einer Kongruenz, die eine Fläche φ_2 berühren, als die Bestimmung eines der Fläche φ_2 einbeschriebenen Einseits (Einecks) betrachten, dessen Seite einer Kongruenz angehört. In [144] haben wir dann ein einbeschriebenes Zweieck gefunden, dessen zusammenfallende Seiten gegebenen Kongruenzen angehören. Als Fortsetzung hierzu kommen wir auf die Bestimmung geschlossener Vielecke, deren Seiten gegebenen Kongruenzen angehören und von denen wenigstens eine Ecke auf einer Fläche liegt, während die übrigen Ecken je einer Bedingung unterworfen sind. Als Beispiel werden wir einen Fall betrachten, in welchem die Seiten *Hirst*schen Kongruenzen [44] angehören.

Sei P_1 ein Punkt einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung φ_2, P' ein Punkt einer anderen Fläche zweiter Ordnung φ_2', die φ_2 in vier Punkten berührt, also durch vier Erzeugende der Fläche φ_2 geht, nämlich durch zwei (a und b) der ersten Schar und durch zwei (c und d) der anderen Schar. Seien ferner l_1 und m_1 die diesen Scharen angehörigen Erzeugenden der Fläche φ_2, die durch P_1 gehen, und bestimmen wir auf φ_2' einen diesem Punkt entsprechenden Punkt P' als Schnittpunkt einer Erzeugenden l' der Schar (ab) und einer Erzeugenden m' der Schar (cd), die den folgenden gegebenen projektiven Beziehungen unterworfen sind:

$$(a, b, l_1) \barwedge (a, b, l'), \quad (c, d, m_1) \barwedge (c\ d, m').$$

Dann wird der Strahl $P_1 P'$ einer *Hirst*schen Kongruenz mit den Doppelstrahlen a, b, c, d angehören.

Sei nun weiter φ_2'' eine Fläche zweiter Ordnung, die φ_2' in vier Punkten berührt und P'' ein auf dieselbe Weise bestimmter, dem Punkt P' entsprechender Punkt der Fläche φ_2'', und fahren wir weiter so fort, bis wir endlich zu einem Punkt P_2 der ersten Fläche φ_2 kommen, von

der wir also voraussetzen, daß sie ebenfalls die vorhergehende Fläche $\varphi_2^{(r-1)}$ in vier Punkten berührt, so daß wir eine geschlossene Folge von r Flächen zweiter Ordnung haben, welche je die vorhergehende und nachfolgende Fläche in vier Punkten berühren. (Die Flächen oder einige von ihnen dürfen natürlich zusammenfallen.) Die Seiten des offenen Vielecks $P_1 P' P'' \ldots P^{(r-1)} P_2$ werden dann alle Strahlen in *Hirst*schen Kongruenzen sein, während ihre Ecken sich auf zu diesen gehörigen Flächen befinden, also auf Flächen, die denselben Büscheln angehören, wie die Flächen, aus denen die Brennflächen der Kongruenz bestehen [44]. Das Vieleck wird sich schließen, wenn P_1 mit P_2 zusammenfällt.

Die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 ist jedenfalls eine (1,1)-Korrespondenz ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), und durch sukzessive Anwendung der gegebenen Projektivitäten findet man, daß auch zwischen den durch P_1 und P_2 gehenden Erzeugenden l_1, m_1 und l_2, m_2 Projektivität stattfinden muß. Verschiedene Fälle werden dadurch entstehen können, daß die entsprechenden Erzeugenden entweder denselben oder verschiedenen Scharen angehören.

Betrachten wir zuerst den ersten Fall, in dem

$$(l_1) \barwedge (l_2) \quad \text{und} \quad F(m_1) \barwedge (m_2) \tag{1}$$

ist; er wird z. B. eintreten, wenn alle die gegebenen Flächen und damit auch die Brennflächen demselben Büschel angehören. Dann ist offenbar

$$\beta(1\,\mathrm{I},\ 2\,\mathrm{II}) = \beta(2\,\mathrm{I},\ 1\,\mathrm{II}) = 1.$$

Man erhält also nach [142](1) und (2)

$$\xi + 2\eta(\mathrm{I}) + \zeta(\mathrm{II}) = 4 = \xi + 2\eta(\mathrm{II}) + \zeta(\mathrm{I}).$$

Dieses Resultat ließe sich übrigens auch ohne unsere allgemeinen Formeln herleiten. Bezeichnen wir nämlich mit a_1 und b_1, c_1 und d_1 die Erzeugenden, die die projektiven Scharen (1) entsprechend gemeinsam haben, so werden sich die vier Punkte $a_1 c_1$, $a_1 d_1$, $b_1 c_1$, $b_1 d_1$ unmittelbar als Koinzidenzpunkte erweisen. Also ist im allgemeinen

$$\xi = 4, \quad \eta(\mathrm{I}) = \eta(\mathrm{II}) = 0, \quad \zeta(\mathrm{I}) = \zeta(\mathrm{II}) = 0.$$

Findet noch irgendeine andere Koinzidenz statt, so muß es unendlich viele geben. Fällt z. B. P_1 mit P_2 in einem dritten Punkt der Geraden a_1 zusammen, so müssen alle entsprechenden Erzeugenden m_1 und m_2 zusammenfallen. Daraus folgt, daß a_1 und b_1 eine Korrespondenzkurve bilden, so daß

$$\xi = 0, \quad \eta(\mathrm{I}) = 0, \quad \eta(\mathrm{II}) = 2, \quad \zeta(\mathrm{I}) = 0, \quad \zeta(\mathrm{II}) = 4$$

wird. Die letzte Zahl wird hier jedoch keine Bedeutung haben, weil alle Geraden II zusammenfallende Punkte P_1 und P_2 verbinden, und zwar zweimal.



Findet eine Koinzidenz in einem nicht auf einer der Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 liegenden Punkt der Fläche statt, so muß in jedem Punkt der Fläche P_2 mit P_1 koinzidieren. Dann wird also jeder Punkt der Fläche Ecke eines nach den gegebenen, eindeutigen Vorschriften konstruierten, geschlossenen Vielecks sein. Die Voraussetzung hierfür läßt sich wenigstens im oben genannten Fall, in welchem alle die gegebenen Flächen durch dasselbe windschiefe Viereck a, b, c, d gehen, erfüllen. Dann kann man nämlich nach einer willkürlichen Wahl der Punkte P_1, P', $P'' \ldots P^{(r-1)}$ auch die letzte Korrespondenz zwischen $P^{(r-1)}$ und P_2 so bestimmen, daß P_2 mit P_1 zusammenfällt. Im hier genannten Fall werden die Koinzidenzpunkte ac, ad, bc, bd, nur uneigentliche Lösungen ergeben, indem nicht nur P_2 und P_1, sondern alle Ecken in diesen Punkten zusammenfallen. Die Existenz eines eigentlichen geschlossenen Vielecks, das die gegebenen Bedingungen erfüllt, wird also zur Folge haben, daß alle solche Vielecke sich von selbst schließen. — Im allgemeinen tritt die doppelte Unendlichkeit ein, wenn man weiß, daß Koinzidenzen in drei Punkten stattfinden, von welchen nicht zwei auf derselben Erzeugenden liegen.

In dem andern Fall, der für eine geschlossene Folge von Flächen, deren jede die vorhergehende und nachfolgende in vier Punkten berührt, eintreten kann, hat man zwischen den Erzeugenden der Fläche φ_2 die Beziehungen

$$(2) \qquad (l_1) \overline{\wedge} (m_2), \quad (m_1) \overline{\wedge} (l_2).$$

Dann wird, außer $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$,

$$\beta(1\,\mathrm{I}, 2\,\mathrm{II}) = \beta(2\,\mathrm{I}, 1\,\mathrm{II}) = 0,$$

und also

$$\xi + 2\eta(\mathrm{I}) + \zeta(\mathrm{II}) = 2 = \xi + 2\eta(\mathrm{II}) + \zeta(\mathrm{I}).$$

Es wird daher entweder zwei Koinzidenzpunkte geben ($\xi = 2$), oder ein Kegelschnitt wird Koinzidenzkurve sein ($\eta(\mathrm{I}) = \eta(\mathrm{II}) = 1$). Da der letzte Fall erst dann eintreten wird, wenn Koinzidenzen in drei Punkten der Fläche stattfinden, so muß er als Spezialfall betrachtet verden. Dieser wird immer eintreten, wenn die Geraden $P_1 P_2$ alle durch einen festen Punkt gehen, der dann Pol der Koinzidenzkurve wird, und nur dann; denn die Beziehungen (2) werden durch drei gegebene Punktepaare $P_1 P_2$ vollständig bestimmt, auch dann, wenn diese alle koinzidierend sind; also können zwei Korrespondenzen mit derselben Koinzidenzkurve nicht verschieden sein.

Projiziert man den Punkt P_1 einer Fläche φ_2 von einem festen Punkt A des Raumes aus auf dieselbe Fläche, — die Projektion sei P' — projiziert man hinwieder P' von einem festen Punkt A' aus in den Punkt P'' usw., $P^{(r-1)}$ von $A^{(r-1)}$ aus in den Punkt P_2, so wird man

zwischen P_1 und P_2 eine (1, 1)-deutige Korrespondenz haben, die durch die Projektivitäten (1) oder (2) bestimmt wird, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist. Daher lassen sich unsere Koinzidenzbestimmungen auf die Aufgabe anwenden: Einer Fläche zweiter Ordnung ein Vieleck einzuschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

[146] Erster Korrespondenzsatz für die Ebene. Da die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung (1, 1)-deutig auf eine Ebene abbildbar sind, so muß man aus dem die Fläche betreffenden Korrespondenzsatz einen ähnlichen für die Ebene herleiten können. Nur muß man dabei die Fundamentalpunkte beachten, denen alle Punkte einer Kurve (Fundamentalkurve) entsprechen [93]. Zur Abbildung werden wir die Projektion von einem festen Punkt der Fläche aus benutzen.

Sei A ein fester Punkt der Fläche zweiter Ordnung φ_2, P' ein beweglicher Punkt derselben Fläche, P der Schnittpunkt der Geraden AP' mit einer Ebene π. Fällt P' mit A zusammen, so kann P ein willkürlicher Punkt der Geraden sein, in der die Tangentialebene an φ_2 in A die Ebene π schneidet. Fällt P in die Spur B (oder C) einer durch A gehenden Erzeugenden der Fläche b' (oder c'), so kann P' ein willkürlicher Punkt dieser Erzeugenden sein. Sonst ist der einem Punkt P entsprechende Punkt P' vollständig bestimmt, und umgekehrt. Die Erzeugenden, die derselben Schar wie b' angehören, werden in die durch C gehenden Geraden projiziert, und die Erzeugenden, die derselben Schar wie c' angehören, in die durch B gehenden.

Sei nun eine solche Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 der Ebene π gegeben, daß jedem Punkt P_1 α_2 Punkte P_2 und jedem Punkt P_2 α_1 Punkte P_1 entsprechen, und wählen wir die Fläche φ_2 und das Projektionszentrum so, daß keine Koinzidenz in den Fundamentalpunkten B und C stattfindet. Zwischen den Punkten P_1' und P_2' wird dann eine durch dieselben Zahlen α_1 und α_2 charakteristisierte Korrespondenz stattfinden. Die Zahl β der Punkte P_1 einer gegebenen Geraden, deren entsprechende Punkte P_2 auf einer anderen bestimmten Geraden liegen, können wir auf durch B und C gehende Gerade anwenden, und dadurch auf die diesen Geraden entsprechenden Erzeugenden der Fläche φ_2. Man hat also, wenn wir durch einen Strich die der Fläche zugehörigen Zahlen bezeichnen,

$$\alpha_1 = \alpha_1', \quad \alpha_2 = \alpha_2', \quad \beta = \beta'(1\,\mathrm{I},\, 2\,\mathrm{II}) = \beta'(2\,\mathrm{I},\, 1\,\mathrm{II}).$$

Die Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte in der Ebene wollen wir ξ nennen. Wir nehmen auch eine Koinzdenzkurve von der Ordnung η an, in deren Punkten immer eine solche Koinzidenz entsprechender Punkte P_1 und P_2 stattfindet, daß P_1P_2 gleichzeitig eine bestimmte Grenzlage erhält. Die Umhüllungskurve dieser Grenzlagen nennen wir die Koinzidenzenveloppe und bezeichnen ihre Klasse mit ζ. Wir wollen noch die Anzahl der Punkte P_1 (oder P_2) auf

einer gegebenen Geraden, denen andere Punkte P_2 (oder P_1) derselben Geraden entsprechen, γ nennen. Dann ist

(1) $$\beta = \gamma + \eta,$$

was man daraus ersieht, daß die einander entsprechenden β Punkte zweier Geraden, immer wenn diese zusammenfallen, entweder ebenfalls zusammenfallen oder entsprechende Punkte einer Geraden sein müssen. Man könnte γ die Anzahl der einander entsprechenden Punktepaare einer Geraden nennen, muß aber dann daran erinnern, daß im Fall einer Involution ein Punkt eines Punktepaares sowohl dessen Punkt P_1 als auch Punkt P_2 sein kann, so daß das Punktepaar zweimal in γ mitzuzählen ist.

Die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1' und P_2' hat, außer den Projektionen der ξ Koinzidenzpunkte in der Ebene, γ Koinzidenzpunkte, die in den Punkt A fallen, da so viele Punktepaare $P_1 P_2$ auf der A entsprechenden Geraden BC liegen. Den η Schnittpunkten einer durch B oder C gehenden Geraden mit der Koinzidenzkurve in der Ebene entsprechen Schnittpunkte einer Erzeugenden der Fläche φ_2 mit der Koinzidenzkurve auf φ_2, und den durch B oder C gehenden ζ Tangenten an die Koinzidenzenveloppe entsprechen auf φ_2 Erzeugende, die auf der Koinzidenzkurve koinzidierende Punktepaare verbinden.

Also ist mit den hier und in [142] benutzten Bezeichnungen

$$\xi + \gamma = \xi', \quad \eta = \eta'(\mathrm{I}) = \eta'(\mathrm{II}), \quad \zeta = \zeta'(\mathrm{I}) = \zeta'(\mathrm{II}).$$

Durch Einsetzen der mit Strichen versehenen Zahlen in die Formeln von [142] findet man

$$\xi + \gamma + 2\eta + \zeta = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta.$$

Diese Gleichung kann man wegen (1) entweder in der Form

(2) $$\xi + \eta + \zeta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta$$

oder in der Form

(2') $$\xi + \zeta = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma$$

schreiben und in Verbindung mit (1) benutzen.

Die Regeln für die Abzählung zusammenfallender Lösungen [105] lassen sich auf Korrespondenzen in einer Ebene übertragen (vgl. [142]).

[147] Koinzidenzpunkte projektiver ebener Figuren in derselben Ebene. Sind die Punkte einer Ebene projektiv aufeinander bezogen, und sind P_1 und P_2 beliebige homologe Punkte, so ist bekanntlich $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Auch wird $\beta = 1$, weil den Punkten P_1 einer Geraden a die Punkte einer anderen Geraden entsprechen, und diese Gerade die Gerade b in einem Punkte schneidet. Die Gleichung [146] (1) ergibt dann entweder $\gamma = 1$, $\eta = 0$ oder $\gamma = 0$, $\eta = 1$. Da es im ersten Falle keine Koinzidenzkurve gibt, so wird es auch keine Koinzidenzenveloppe geben, also wird $\zeta = 0$. Sodann ergibt (2) $\xi = 3$; es wird

also drei Koinzidenzpunkte geben; zwei von ihnen oder alle drei können in Grenzfällen zusammenfallen.

Im Falle $\gamma = 0$, $\eta = 1$ ergibt die Formel (2) $\xi + \zeta = 2$. Da die Koinzidenzkurve eine Gerade ist, so muß die entsprechende Koinzidenzenveloppe Spezialfall der Umhüllungskurve der Geraden sein, die Punkte P_1 einer Geraden a mit den entsprechenden Punkten P_2 verbinden. Diese Umhüllungskurve ist im allgemeinen von der Klasse $\alpha_2 + \gamma$, was man durch Abzählung ihrer durch einen Punkt von a gehenden Tangenten findet. Hier wird also $\zeta = 1$, die Koinzidenzenveloppe somit ein Punkt. Man findet nun $\xi = 1$, d. h. es gibt einen Koinzidenzpunkt. Übrigens ist der betrachtete Fall derjenige, in welchem die projektiven Figuren in perspektiver Lage sind; der Koinzidenzpunkt wird mit der Koinzidenzenveloppe im Perspektivitätszentrum zusammenfallen. Die Koinzidenzkurve ist die Perspektivitätsachse.

Es ist kaum nötig zu bemerken, daß dieser Fall sich auch als Grenzfall einer allgemeinen Projektivität in der Ebene betrachten läßt: dabei werden auf ganz gewöhnliche Weise zwei der drei Koinzidenzpunkte durch unendlich viele ersetzt.

Durch Betrachtung des allgemeinen Falles ($\gamma = 1$, $\eta = 0$) findet man, daß der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen zweier projektiven Bündel im allgemeinen eine Raumkurve dritter Ordnung ist, und daß die Aufgabe ein windschiefes n-Eck zu konstruieren, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen und dessen Ecken auf gegebenen Ebenen liegen, drei Lösungen hat.

In ähnlicher Weise lassen sich die Formeln (1) und (2) auf die Figuren in derselben Ebene anwenden, die durch eine sogenannte Cremonatransformation verbunden sind. Auch dann ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, β ist die Ordnung n der Transformation, d. h. die Ordnung der Kurven, die in jeder Figur den Geraden der anderen entsprechen. Im allgemeinen werden die Figuren keine Koinzidenzkurve haben. Daher ist $\eta = \xi = 0$ und also wegen (1) $\gamma = n$; wegen (2) werden $2 + n$ Punkte den Figuren entsprechend gemeinsam sein. Daß die Figuren Fundamentalpunkte haben, denen alle Punkte einer Kurve entsprechen, spielt bei einer allgemeinen Lage der Figuren für ihre gegenseitige Beziehung keine Rolle. Nur wenn eine Fundamentalkurve durch den entsprechenden Fundamentalpunkt geht, wird dieser offenbar unter die Koinzidenzen zu zählen sein.

[148] Kegel in einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung.[1]) Wir werden den in [146] gefundenen Satz dazu verwenden, den Ort der Scheitel der einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung zuge-

1) Wir haben zwar in [35] 6 andere Mittel zur Lösung einer die vorliegende umfassenden, allgemeineren Aufgabe angegeben; die vorliegende gibt aber ein gutes Beispiel für die Anwendung von [146] ab.



hörigen Kegel zu bestimmen. Durch einen solchen Scheitel gehen die Polarebenen vier beliebiger fester Punkte K, L, M, N in Beziehung auf den Kegel, und umgekehrt wird, wenn K, L, M, N nicht in einer Ebene liegen, die genannte Bedingung dafür genügen, daß eine Fläche zweiter Ordnung ein Kegel und der Schnittpunkt der vier Polarebenen sein Scheitel ist. Wir nennen nun eine willkürliche Fläche des Bündels ψ_2, die Polarebenen der vier Punkte $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, ihre Spuren auf einer festen Ebene π k, l, m, n. Die Ordnung des gesuchten Ortes ist dann die Anzahl solcher Punkte in der Ebene π, durch die alle die einer Fläche ψ_2 entsprechenden Geraden k, l, m, n gehen.

Sei nun P_1 ein willkürlicher Punkt der Ebene π. Es wird dann im Bündel eine Fläche ψ_2 von der Art geben, daß in Beziehung auf sie sowohl P_1 und K als auch P_1 und L konjugiert sind; denn daß zwei konjugierte Punkte bei der Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung denselben Einfluß ausüben wie ein gegebener Punkt, kann man entweder durch das einfache Korrespondenzprinzip oder durch Betrachtung des Falles, in welchem die konjugierten Punkte zusammenfallen, erkennen; analytisch wird sich denn auch diese Bedingung linear ausdrücken. Die Spuren m und n der Polarebenen der Punkte M und N in Beziehung auf dieselbe Fläche schneiden sich also (Fig. 32) in einem durch P_1 eindeutig bestimmten Punkt P_2 und ebenso bestimmt P_2 eindeutig P_1. In der Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 ist also

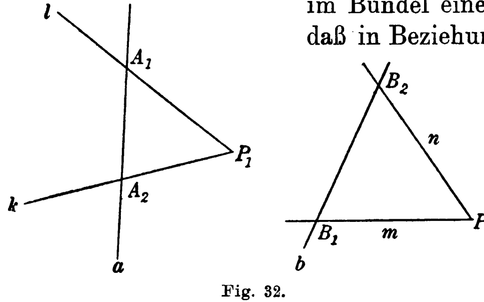


Fig. 32.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

Um die Anzahl β zu finden, wählen wir auf einer festen Gerade b der Ebene π einen Punkt B_1. Die Flächen des Bündels, bezüglich der B_1 und M konjugiert sind, bilden einen Büschel, und die Polarebenen $\varkappa$ und λ der Punkte K und L in Beziehung auf die Flächen dieses Büschels bilden zwei projektive Büschel, ihre Schnittpunkte A_1 und A_2 mit einer anderen festen Gerade a der Ebene π also projektive Punktreihen. Diese haben zwei Punkte entsprechend gemeinsam, die je in Beziehung auf eine Fläche ψ_2 des Büschels sowohl mit K als auch mit L konjugiert sind. Die Polarebenen des Punktes N in Beziehung auf diese Flächen treffen b in zwei dem Punkte B_1 entsprechenden Punkten B_2. Ebenso entsprechen zwei Punkte B_1 dem Punkte B_2. Ihre vier Koinzidenzpunkte sind die Punkte P_2 der Geraden b, die Punkten P_1 der Geraden a entsprechen. Also ist $\beta = 4$. Da es bei dieser Bestimmung ganz gleichgültig ist, ob b von a verschieden ist oder nicht, so ist auch

$\gamma = 4$, also $\eta = 0$ und damit auch $\zeta = 0$. [146] (2) ergibt also $\xi = 6$, und die gesuchte Kurve ist von der sechsten Ordnung.

[149] Anderer Beweis des *Halphen*schen Satzes über Strahlenkongruenzen. Als Einleitung zu den Untersuchungen in [150] über etwaige Doppelstrahlen einer Kongruenz werden wir hier auch den Korrespondenzsatz für die Ebene zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Strahlen zweier Kongruenzen von den Ordnungen n_1 und n_2 und den Klassen n_1' und n_2' anwenden. Diese Bestimmung wird jedoch eigentlich von der schon in [144] unternommenen nur dadurch abweichen, daß wir jetzt die damals benutzte Fläche zweiter Ordnung φ_2 durch zwei Ebenen π und $\varkappa$ ersetzen. Wir werden nämlich das Entsprechen der Punkte P_1 und P_2 betrachten, in denen die von einem Punkt Q der Ebene $\varkappa$ ausgehenden Strahlen der zwei Kongruenzen die Ebene π schneiden. Auch für diese Korrespondenz ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n_1 n_2.$$

Die Strahlen der zwei Kongruenzen, die beziehungsweise eine Gerade a und eine Gerade b der Ebene π schneiden, werden Regelflächen von den Ordnungen $n_1 + n_1'$ und $n_2 + n_2'$ erzeugen [31]. Durch ihre gemeinschaftlichen Schnittpunkte mit $\varkappa$ gehen die β Geradenpaare, die entsprechende Punkte P_1 auf a und P_2 auf b bestimmen. Also ist

$$\beta = (n_1 + n_1')(n_2 + n_2').$$

Die Spur s der Ebene $\varkappa$ auf π wird $n_1 n_2$-fache Koinzidenzkurve sein, weil durch ihre Punkte $n_1 n_2$ Paare entsprechender Strahlen gehen, und sie wird die einzige Koinzidenzkurve sein, wenn man nicht eben π durch eine der gesuchten gemeinschaftlichen Strahlen der Kongruenzen gelegt hat, und wenn diese sich nicht in einer Regelfläche schneiden (d. h. wenn sie nicht beide diese enthalten). Also ist

$$\eta = n_1 n_2.$$

Um die Klasse ζ der entsprechenden Koinzidenzenveloppe zu finden, kann man ihre durch einen willkürlichen Punkt M der genannten Spur s gehenden Tangenten abzählen. Diese werden erstens die $n_1 n_2$ Spuren der Ebenen sein, die die durch M gehenden Strahlen der zwei Kongruenzen verbinden, und zweitens die $(n_1 n_2' + n_1' n_2)$-mal zu zählende Spur s selbst. Letztere Zahl findet man, wenn man mittels des einfachen Korrespondenzsatzes untersucht, wie oft zwei Strahlen der zwei Kongruenzen sowohl s in demselben Punkte schneiden, als auch in derselben durch s gehenden Ebene liegen. Durch Addition findet man

$$\zeta = n_1 n_2 + n_1 n_2' + n_1' n_2.$$

Nun ergibt die Formel [146] (2)

$$\xi = n_1 n_2 + n_1' n_2'.$$

Die ξ Koinzidenzpunkte müssen Strahlen der zwei Kongruenzen



angehören, die sowohl π als auch $\varkappa$ in denselben, unter sich verschiedenen Punkten schneiden, also zusammenfallen.

Hier haben wir jedoch (wie in [144]) vorausgesetzt, daß die Kongruenzen nicht eine gemeinschaftliche Regelfläche enthalten. Gibt es eine solche, und zwar von der Ordnung u, so wird ihre Spur auf π eine neue Koinzidenzkurve sein. Die entsprechende Koinzidenzenveloppe wird die Spur der abwickelbaren Fläche sein, deren Tangentialebenen Grenzlagen solcher Ebenen QP_1P_2 sind, in welchen zwei von einem Punkt Q der Ebene $\varkappa$ ausgehende Strahlen der Kongruenzen zusammenfallen, wenn sich Q auf $\varkappa$ der Spur der bereits genannten Regelfläche nähert. Kennt man auch die Klasse t dieser abwickelbaren Fläche, so wird sich für die Anzahl der isolierten, den Kongruenzen gemeinschaftlichen Strahlen der Wert

$$n_1 n_2 + n_1' n_2' - u - t$$

ergeben.

[150] Anwendung derselben Methode auf das Zusammenfallen von Strahlen einer Kongruenz. Wenden wir dasselbe Verfahren auf verschiedene Strahlen einer Kongruenz an, so werden vorkommende eigentliche Doppelstrahlen erster Art [43] isolierte und zwar zweimal zu zählende Koinzidenzpunkte ergeben, wie in [149] die Strahlen, die zwei Kongruenzen gemeinschaftlich waren, je einen ergaben. Wir haben zwar in [43] gesehen, daß Doppelstrahlen nicht notwendig vorkommen, wir können aber der zu untersuchenden Kongruenz solche beilegen und annehmen, daß sie d_1 eigentliche Doppelstrahlen erster Art, d_2 eigentliche Doppelstrahlen zweiter Art, δ punktdoppelte und δ' ebenendoppelte Strahlen enthalte. Die Existenz einer oder mehrerer Gattungen von Kongruenzen, die durch gegebene, bestimmte Werte dieser Zahlen und der Ordnung n, der Klasse n' und des Ranges r charakterisiert werden, muß jedoch in jedem Falle gesichert werden.

Wir werden voraussetzen, daß die Kongruenz keine anderen Singularitäten hat, die besondere Bedingungsgleichungen erfordern würden, also keine unendliche Schar von Doppelstrahlen und keine Brennkurve, was ja auch wenigstens für hinreichend hohe Werte von n, n' und r und hinreichend kleine von d_1, d_2, δ und δ' erlaubt ist.

Die Ordnung m und die Klasse m' der Brennfläche wird [104] durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} m = 2n'(n-1) - 2r \\ m'' = 2n(n'-1) - 2r \end{cases}$$

bestimmt. Hieraus können wir die folgenden Anzahlen ableiten, die wir ebenfalls benutzen werden. Die Ordnung (und Klasse [87]) s des Orts der Strahlen der Kongruenz, deren Berührung mit der Brennfläche auf ihrer Schnittkurve mit einer festen Ebene stattfindet, ist

$$(2) \qquad s = m + 2n' = 2(nn' - r).$$



Seine Schnittkurve mit der festen Ebene besteht nämlich aus der Schnittkurve dieser Ebene mit der Brennfläche und aus den zweimal zu zählenden n' in der Ebene liegenden Strahlen, die den genannten Schnitt je in ihren zwei Fokalpunkten berühren. Ebenso ist die Klasse (und Ordnung) s' des Orts der Strahlen der Kongruenz, deren Berührung mit der Brennfläche auf ihrer Berührungskurve mit einem umbeschriebenen Kegel stattfindet,

(3) $$s' = m'' + 2n = 2(nn' - r) = s.$$

Wir bezeichnen mit P_1 und P_2 die Schnittpunkte, in denen zwei Strahlen der Kongruenz, die durch einen Punkt Q einer gegebenen Ebene $\varkappa$ gehen, eine andere gegebene Ebene π schneiden. Für die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 erhält man sogleich die Zahlen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n(n-1).$$

Die Strahlen der Kongruenz, die eine Gerade a oder b in der Ebene π schneiden, werden $\varkappa$ in Kurven von den Ordnungen $n + n'$ treffen [31]. Von den $(n + n')^2$ Schnittpunkten dieser Kurven werden n in den Schnittpunkten der Ebene $\varkappa$ mit den durch den Schnittpunkt (ab) gehenden Strahlen liegen, n' in den Schnittpunkten der Geraden $(\pi\varkappa)$ mit den n' in π liegenden Strahlen. Die übrigen

$$\beta = (n + n')^2 - n - n'$$

werden die Schnittpunkte der Ebene $\varkappa$ mit den durch Punkte P_1 von a und P_2 von b gehenden Strahlen sein.

Die Schnittlinie $(\pi\varkappa)$ wird $\frac{1}{2}n(n-1)$-mal als doppelt zählende Koinzidenzkurve auftreten, doppelt zählend, weil die sich schneidenden Strahlen verschieden sind (vgl. Schluß von [146]). Außerdem wird die Korrespondenz eine einfache Koinzidenzkurve haben, nämlich die Schnittlinie mit dem Ort der Strahlen, die die Brennfläche in ihrer Schnittlinie mit $\varkappa$ berühren. Die Ordnung s dieser Kurve haben wir eben in (2) gefunden. Somit ist

$$\eta = n(n-1) + s.$$

Um die Klasse der dem ersten Teil dieser Koinzidenzkurve entsprechenden Koinzidenzenveloppe zu finden, suchen wir die Anzahl ihrer durch einen willkürlichen Punkt der Geraden $(\pi\varkappa)$ gehenden Tangenten. Deren wird es $\frac{1}{2}n(n-1)$ geben außer denen, die mit der Geraden $(\pi\varkappa)$ selbst zusammenfallen; die Anzahl letzterer ist r. Die Einhüllende ist also von der Klasse $\frac{1}{2}n(n-1) + r$ und muß, weil sie, wie bereits erwähnt, doppelt zu rechnen ist, als Koinzidenzenveloppe von der Klasse $n(n-1) + 2r$ gezählt werden. — Der andere Teil der Koinzidenzenveloppe wird die Spur der abwickelbaren Fläche sein, deren Tangentialebenen durch solche konsekutive Strahlen der Kongruenz gehen, die sich auf $\varkappa$, also auf der Schnittlinie der Brennfläche mit dieser Ebene schneiden; diese Ebenen werden die Brennfläche in den andern Fokal-



punkten der Strahlen berühren, die auf $\varkappa$ liegende Fokalpunkte haben. Die Klasse dieser abwickelbaren Fläche ist zugleich Ordnung der Kurve, in deren Punkten (Fokalpunkten) sich solche konsekutive Strahlen schneiden, deren Ebenen (Fokalebenen) durch einen festen Punkt K gehen. Diese Kurve und die eben genannte abwickelbare Fläche haben also Eigenschaften, die sich dualistisch entsprechen. Nennen wir die Zahl, die gleichzeitig die Klasse der abwickelbaren Fläche und die Ordnung der Kurve angibt, q, so ist für unsere Korrespondenz

$$\zeta = n(n-1) + 2r + q.$$

Die Spur eines eigentlichen Doppelstrahls erster Art wird doppelter Koinzidenzpunkt sein; andere solche Punkte wird es nicht geben; denn sowohl die Schnittpunkte der Geraden $(\pi\varkappa)$ mit der Brennfläche, als auch die Spuren der Doppelstrahlen zweiter Art und der punktdoppelten Strahlen treten lediglich als Punkte beziehungsweise Doppelpunkte der Koinzidenzkurve auf. Also ist $\xi = 2d_1$. Durch Einsetzen in die Formel [146] (2) findet man

$$2d_1 + n(n-1) + s + n(n-1) + 2r + q = 2n(n-1) + (n+n')^2 - n - n',$$

und durch Einsetzen des Ausdrucks (2) für s

$$(4) \qquad q = n^2 + n'^2 - n - n' - 2d_1.$$

Wegen der bereits erwähnten doppelten Bedeutung der Zahl q war es vorauszusehen, daß der Ausdruck in Beziehung auf n und n' symmetrisch sein muß. — Die Einführung der eigentlichen Doppelstrahlen zweiter Art, der punktdoppelten und der ebenendoppelten Strahlen hat auf den Ausdruck für q keinen Einfluß gehabt.

Für die Werte $n = n' = 2$, die immer $d_1 = 0$ zur Folge haben, weil Doppelstrahlen von Kongruenzen zweiter Ordnung und zweiter Klasse immer zweiter Art sind (vgl. [104]), findet man z. B. $q = 4$. Für die *Hirst*schen Kongruenzen ist dieses Resultat leicht direkt nachzuweisen.

[151] Zweiter und dritter Korrespondenzsatz für die Ebene. Dem Satze [146] über die Koinzidenz zweier korrespondierender Punkte in der Ebene kann man natürlich den ihm dualistisch entsprechenden Satz über die Koinzidenz zweier korrespondierender Geraden in einer Ebene gegenüberstellen, der als der zweite Korrespondenzsatz für die Ebene bezeichnet werden mag. Allein sowohl dieser als auch die auf ein Strahlen- und Ebenenbündel sich beziehenden Sätze, die sich an jenen anschließen, werden mittels so einfacher Vertauschungen gebildet, daß sie keiner besonderen Formulierung bedürfen.

Dagegen kann es in der Ebene noch eine Korrespondenz zwischen ihren Punkten P und Geraden g geben, und auf diese bezieht sich der dritte Korrespondenzsatz. Wir nehmen an, daß jedem Punkte P γ Gerade g entsprechen und jeder Geraden g π Punkte P, weiter daß

es ϑ Verbindungen zwischen einem Punkte P, der auf einer gegebenen Geraden a liegt, und einer entsprechenden Geraden g, die durch einen gegebenen Punkt B geht, gibt. Dann wird der Ort der Punkte P, die auf entsprechenden Geraden g liegen, von der Ordnung $\gamma + \vartheta$ und die Umhüllungskurve der Geraden g, die durch entsprechende Punkte P gehen, von der Klasse $\pi + \vartheta$ sein. Dies ergibt sich sogleich durch Anwendung des einfachen Korrespondenzsatzes zur Abzählung der Schnittpunkte des Ortes mit einer beliebigen Geraden und der Tangenten an die Umhüllungskurve, die durch einen beliebigen Punkt gehen.

Ein Koinzidenzpunkt, dem alle durch ihn gehenden Geraden entsprechen, liefert den Beitrag 1 zu der genannten Klasse, und den Beitrag 0 zu der genannten Ordnung. Das Umgekehrte gilt für eine Koinzidenzgerade, der alle auf ihr liegenden Punkte entsprechen.

Für zwei ebene Gebilde derselben Ebene, die sich dualistisch entsprechen, hat man $\gamma = \pi = \vartheta = 1$. Die auf ihren entsprechenden Geraden liegenden Punkte und die durch ihre entsprechenden Punkte gehenden Geraden erzeugen dann Kegelschnitte.

[152] Korrespondenz zwischen den Punkten einer willkürlichen Fläche; ihre Wertigkeit; zusammengesetzte Korrespondenzen. Wie wir in [146] die (1, 1)-deutige Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf eine Ebene benutzt haben, um aus dem für die Fläche gültigen Korrespondenzsatz einen für die Ebene geltenden abzuleiten, wobei wir auch in umgekehrter Ordnung hätten verfahren können, so läßt sich aus dem Korrespondenzsatz für die Ebene ein solcher für jede auf die Ebene (1, 1)-deutig abbildbare Fläche herleiten. Was man dadurch erreicht, ist jedoch in einem noch allgemeineren Korrespondenzsatz inbegriffen, der auf alle algebraischen Flächen anwendbar ist.[1])

Wir werden annehmen, daß die algebraische Fläche φ von der Ordnung m, von dem Range m' und von der Klasse m'' sei, und daß sie weder eine Rückkehrkurve noch isolierte Doppelpunkte oder mehrfache Punkte, dagegen eine Doppelkurve von der Ordnung b habe. Die in einen Punkt der Doppelkurve fallenden Punkte verschiedener Mäntel der Fläche werden nicht als koinzidierend betrachtet. Die Fälle, in welchen die Fläche andere Singularitäten hat, lassen sich jedoch (vgl. [94]) unter die hier betrachteten allgemeineren einbegreifen.

Das Entsprechen der Punkte P_1 und P_2 einer solchen Fläche werden wir durch Zahlen bestimmen, die wir ebenso wie in [146], wo es sich um das Entsprechen der Punkte einer Ebene handelte, benennen wollen: einem Punkt P_1 entsprechen α_2 Punkte P_2, einem Punkt P_2 α_1 Punkte P_1; auf einem ebenen Schnitt der Fläche liegen β Punkte P_1, deren

1) Siehe meine Mitteilungen in den Comptes rendus de l'Academie des Sciences. t. 143, S. 491 u. 535 (1906).



entsprechende Punkte P_2 auf einem anderen ebenen Schnitt liegen; die Anzahl der isolierten Koinzidenzpunkte (für welche die Grenzlage der die zusammenfallenden Punkte P_1 und P_2 verbindenden Geraden eine ganz willkürliche Tangente an φ im Koïnzidenzpunkte ist) nennen wir ξ, die Ordnung der Koïnzidenzkurve η und die Ordnung der Regelfläche, deren Erzeugende die in den Punkten der Koinzidenzkurve zusammenfallenden Punkte P_1 und P_2 verbinden, ζ. Hierzu fügen wir noch die Benennung ω für die Anzahl der Schnittpunkte der Koinzidenzkurve mit der Berührungskurve eines umbeschriebenen Kegels. Wenn die Fläche keine Doppelkurve hat, werden diese Punkte die Schnittpunkte der Koinzidenzkurve mit einer ersten Polare sein, und man hat dann $\omega = \eta(n-1)$. Sonst muß man die Schnittpunkte der Koinzidenzkurve mit der Doppelkurve abziehen.

Für die einfachste Art der Bestimmung entsprechender Punkte wird man dann, wie wir in [153] und [155] beweisen werden, die folgende Gleichung erhalten:

(1) $$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m} - k(I+1),$$

wo

(2) $$I = m'' - 2m' + 3m - 4$$

die bereits in [93] (10) aufgestellte „relative Invariante" ist, die bei der Bestimmung der Differenz der Anzahlen von Fundamentalpunkten zweier einander entsprechender Flächen benutzt ward, und wo k sich einfach bestimmen läßt. Wie für das mehrdeutige Entsprechen der Punkte einer Kurve werden wir aber auch hier die Gleichung (2) für alle algebraisch bestimmbaren Korrespondenzen der Punkte einer Fläche aufstellen. Dies ist jedenfalls erlaubt, da sich der Wert von k, der sowohl positiv als auch negativ, ganz oder gebrochen sein kann, jedenfalls aus der Gleichung (2) bestimmen läßt. Die Lösung der vorliegenden Aufgabe wird nun aber in einer direkten Bestimmung der Zahl k, die wir die Wertigkeit der Korrespondenz nennen, bestehen.

Wenn die Gruppe der Punkte P_2, die demselben Punkt P_1 in einer Korrespondenz mit der Wertigkeit k entsprechen, sich algebraisch so in kleinere Gruppen spaltet, daß i' in jeden Punkt P_2' einer Gruppe, i'' in jeden Punkt P_2'' einer anderen usw. fallen; und die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2' die Wertigkeit k' hat, die zwischen P_1 und P_2'' die Wertigkeit k'' usw., so ist

(3) $$k = i'k' + i''k'' + \cdots$$

Wie der entsprechende Satz über die Korrespondenz der Punkte einer Kurve [119], folgt dieser Satz daraus, daß dieselbe Relation zwischen den den Korrespondenzen zugehörigen Zahlen α_1, α_2, β, ω, ξ, η, ζ stattfindet, und daß für eine gegebene Fläche k durch diese Zahlen linear ausgedrückt wird.



Die Bestimmung der Wertigkeit ist auch noch in solchen Fällen auszuführen, in welchen $\alpha_1 = 0$ ist. Fallen alle Punkte P_2, die den verschiedenen Punkten P_1 entsprechen, in einen festen Punkt A, so ist $\alpha_1 = 0$, weil einem beliebigen Punkt P_2 der Fläche kein Punkt P_1 entspricht; ebenso wird $\beta = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\xi = 1$, $\eta = \zeta = \omega = 0$. Die Wertigkeit der Korrespondenz ist also null, oder man kann auch hier, wie bei der Korrespondenz auf einer Kurve, die festen Punkten P_2 in die Gesamtgruppe der Punkte P_2 nach Belieben mit aufnehmen oder nicht.

Auch wenn alle Punkte P_2, die den Punkten P_1 der Fläche φ entsprechen, auf eine Kurve c_n fallen, ist $\alpha_1 = 0$, α_2 ist die Anzahl der Punkte P_2 der Kurve c_n, die einem beliebigen Punkt P_1 der Fläche entsprechen. Es geht übrigens aus [153] hervor, daß auch eine solche Korrespondenz die Wertigkeit 0 hat, wenn die einem beliebigen Punkt P_1 der Fläche entsprechenden Punkte P_2 ihre Schnittpunkte mit einer Kurve sind, die durch P_1 bestimmt wird und auf einer anderen durch c_n gehenden Fläche liegt. Eine solche Korrespondenz läßt sich dann auch aus einer zusammengesetzten Korrespondenz ausscheiden. Weil wir diesen Umstand schon in [155] anwenden werden, heben wir hervor, daß der hier benutzte Fall des Satzes [153] jener ist, für welchen wir ihn bereits in [153] 1 beweisen werden.

[153] Hauptsatz über die Korrespondenz zwischen Punkten, die durch Kurven ausgeschnitten werden; Beweis für einige Spezialfälle. Wenn die Punkte P_2 einer Fläche φ, die einem beliebigen Punkt P_1 derselben Fläche entsprechen, ihre nicht in P_1 fallenden Schnittpunkte mit einer durch P_1 bestimmten Kurve c_r sind, die bereits k in den Punkt P_1 fallende Schnittpunkte mit φ hat, so wird die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 die Wertigkeit k haben. Feste Schnittpunkte kann man nach Belieben unter die Punkte P_2 mitzählen oder nicht [152].

Wie wir es bei dem *Cayley-Brill*schen Satz in [117] und [118] machten, werden wir auch hier damit anfangen, den ausgesprochenen Satz in den Fällen zu beweisen, in welchen entweder $k = 0$ oder c_r aus k durch P_1 gehenden Geraden besteht.

1. Wenn $k = 0$ ist, geht eine Kurve c_r nicht durch den entsprechenden Punkt P_1; ihre mr Schnittpunkte mit der Fläche φ sind also Punkte P_2, wenn man darunter etwaige feste Schnittpunkte einbegreift. Also wird $\alpha_2 = mr$. Wir werden nun den Ort der Schnittpunkte Q der den Punkten P_1 entsprechenden Kurven c_r mit den Geraden AP_1, die die Punkte P_1 mit einem festen Punkt A des Raums verbinden, aufsuchen. Sei P_1' der Schnittpunkt einer Geraden AP_1 mit einer Ebene π, P_2' die Schnittpunkte der dem Punkt P_1 zugehörigen Kurven c_r mit derselben Ebene. Einem Punkt P_1' werden dann $mr = \alpha_2$ Punkte P_2'

entsprechen. Durch einen Punkt P_2 der Fläche gehen α_1 Kurven c_r, nämlich die, die dem entsprechenden Punkte P_1 zugehören. Ebensoviele müssen durch einen beliebigen Punkt des Raumes, also auch durch einen Punkt P_1' der Ebene π gehen. Dem Punkt P_2' werden also α_1 Punkte P_1' entsprechen. Die den Punkten P_1' einer Geraden g der Ebene π entsprechenden Punkte P_2' liegen auf der Fläche, welche durch die Kurven c_r erzeugt wird, die den Punkten P_1 der Schnittkurve der Fläche φ mit der Ebene Ag entsprechen. Diese schneidet einen anderen ebenen Schnitt von φ in β Punkten und muß also von der Ordnung $\frac{\beta}{m}$ sein und eine Gerade der Ebene π in ebensovielen Punkten schneiden. Bezeichnen wir nun die der Korrespondenz in der Ebene π zugehörigen Zahlen durch Beifügung eines Striches zu den in [146] benutzten Bezeichnungen, so wird

$$\alpha_1' = \alpha_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2, \quad \beta' = \frac{\beta}{m}.$$

Weiter ist $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$, da der gesuchte Ort jedenfalls nicht für einen beliebigen Punkt A eine Fläche sein kann. Man findet also

$$\xi' = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m}. \tag{1}$$

P_1' und P_2' können auf doppelte Weise zusammenfallen. Es geschieht erstens in den η Schnittpunkten der Ebene π mit der Koinzidenzkurve der Korrespondenz zwischen P_1 nnd P_2 auf der Fläche, und zweitens, wenn Q ein im allgemeinen von P_1 verschiedener Schnittpunkt von c_r mit AP_1 ist, der nur die sogleich zu nennenden Koinzidenzen mit P_1 hat.

Die Anzahl der Koinzidenzen von P_1 und Q werden durch den einfachen Korrespondenzsatz bestimmt, und zwar benutzen wir diesen in der Gestalt, die wir ihm in [107] gegeben haben. Die Ordnung des Ortes der Punkte Q, von denen jetzt die Rede ist, ist $\xi' - \eta$, wo ξ' durch (1) bestimmt wird. Abgesehen von den nach A fallenden α_1 Punkten Q, die ja auf den durch A gehenden Kurven c_1 liegen, wird jede durch A gehende Ebene diesen Ort und den Ort der entsprechenden Punkte P_1 in entsprechenden, also in gleich vielen Punkten schneiden. Der Ort solcher Punkte P_1 ist daher von der Ordnung $\xi' - \eta - \alpha_1$. Die Anzahl der eine beliebige Gerade g schneidenden Geraden $P_1 Q$, die ja in der Ebene Ag liegen müssen, ist ebenfalls $\xi' - \eta - \alpha$. Die Anzahl der Koinzidenzen von P_1 und Q ist also

$$\xi' - \eta + \xi' - \eta - \alpha_1 - (\xi' - \eta - \alpha_1) = \xi' - \eta.$$

Unter den Punkten, in denen diese Koinzidenzen von P_1 und Q stattfinden, finden sich einige der ξ Koinzidenzpunkte der Korrespondenz der Punkte P_1 und P_2 der Fläche, nämlich solche, in denen der Punkt P_1 auf die ihm zugehörige Kurve c_r fällt, ohne daß die Ebene die

durch P_1 und die Tangente an c_r geht in dem Punkte, dem P_1 sich nähert, eine bestimmte Grenzlage bekommt (was für Punkte der Koinzidenzkurve stattfinden würde). Die Anzahl solcher Koinzidenzpunkte von P_1 und P_2 nennen wir ξ_1. Außerdem gibt es aber ξ_2 andere auf der Koinzidenzkurve liegende Koinzidenzpunkte, in welchen c_r, und also auch die genannte Grenzebene, φ_m berührt. In einem solchen Punkt fällt im allgemeinen kein Punkt Q mit P_1 zusammen; dies ist nur der Fall, wenn die genannte Grenzebene durch A geht. Das wird aber für gewisse andere Punkte der Koinzidenzkurve eintreten. Nennt man ihre Anzahl λ, so ist

$$\xi_1 + \lambda = \xi' - \eta = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m} - \eta. \tag{2}$$

Die Anzahl λ begegnet uns auch bei der Bestimmung der Ordnung ζ der Regelfläche, deren Erzeugende die auf der Koinzidenzkurve zusammenfallenden Punkte P_1 und P_2 verbinden. Eine solche Erzeugende ist in ihrem Berührungspunkt P_1 mit φ Schnittlinie der Tangentialebene an φ und der eben genannten Grenzebene. Durch einen Punkt M_1 einer Geraden a gehen, wie wir schon in [152] vorausgesetzt haben, ω Ebenen, die φ in einem Punkt der Koinzidenzkurve berühren; die entsprechenden Grenzebenen bestimmen also auf a ω Punkte M_2. Durch M_2 gehen λ Grenzebenen, die je einen Punkt M_1 bestimmen; M_1 und M_2 koinzidieren, wenn entweder die beiden entsprechenden Ebenen zusammenfallen — dann ist, wie wir eben sahen, der ihnen entsprechende Punkt P_1 einer der ξ_2 auf der Koinzidenzkurve liegenden Koinzidenzpunkte — oder M_1 auf der Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen, also auf einer der ζ Erzeugenden der eben genannten Kegelfläche liegt. Man findet somit

$$\omega + \lambda = \xi_2 + \zeta. \tag{3}$$

Da die gesamte Anzahl ξ der Koinzidenzpunkte $\xi_1 + \xi_2$ ist, so findet man durch Elimination von λ aus den Gleichungen (2) und (3) die Gleichung

$$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m}, \tag{4}$$

die eben mit [152] (1) übereinstimmt, wenn man in dieser, in der k die Wertigkeit bedeutet, $k = 0$ setzt. Der aufgestellte Satz ist also für diesen Spezialfall bewiesen.

2. Wenden wir uns nun zu dem Fall, in dem die Kurven c_r aus k durch P_1 gehenden Geraden bestehen, so wird man $\alpha_2 = km - k$ haben. Da ein Punkt der Fläche φ entweder als Punkt P_1 oder als Punkt P_2 betrachtet werden kann, so werden durch ihn und also auch durch einen beliebigen Punkt des Raumes $k + \alpha_1$ Kurven c_r gehen. Eine Koinzidenz wird in einem Punkt der Fläche φ eintreten, wenn eine der k Geraden, aus denen die Kurve c_r, die ihm, als Punkt P_1 betrachtet, entspricht, besteht, φ in diesem Punkt berührt. Tritt dies ein, so muß

die Spur P der Geraden in einer beliebigen Ebene ε auf der Spur g der Tangentialebene von φ im Punkte P_1 liegen. Auf die diese Inzidenz betreffenden Anzahlen kann man den dritten Korrespondenzsatz für die Ebene [151] anwenden. Benutzen wir die dort angegebenen Benennungen, so ist

$$\pi = m''k, \quad \gamma = k + \alpha_1,$$

während ϑ unbekannt ist. Der Ort der auf den entsprechenden Geraden g liegenden Punkte P, dessen Ordnung $\gamma + \vartheta$ ist, wird aus den folgenden Teilen bestehen: 1. aus den Spuren der Tangentialebenen in den ξ Koinzidenzpunkten von P_1 und P_2, 2. aus der Spur der Regelfläche von der Ordnung ζ, deren Erzeugende die auf der Koinzidenzkurve koinzidierenden Punkte P_1 und P_2 verbinden, 3. aus der Spur der Fläche φ selbst, die k-mal zu zählen ist. Also wird

$$k + \alpha_1 + \vartheta = \xi + \zeta + km.$$

Die Umhüllungskurve der durch die entsprechenden Punkte P gehenden Geraden g, deren Klasse $\pi + \vartheta$ ist, besteht 1. aus der Umhüllungskurve der Spuren der Tangentialebenen an φ in Punkten der Koinzidenzkurve, deren Klasse wir ω genannt haben, und 2. aus der Spur der Fläche φ, die wieder k-mal zu zählen ist. Da diese Spur von der Klasse m' ist, wird

$$m''k + \vartheta = \omega + m'k.$$

Eliminiert man ϑ und setzt $\alpha_2 = k(m-1)$, so findet man

$$(1) \qquad \xi + \zeta - \omega = \alpha_1 + \alpha_2 - k(m'' - m' + 2m - 2).$$

Noch müssen wir die Ordnung η der Koinzidenzkurve aufsuchen. Ihre Schnittpunkte mit einer Ebene ε werden sich unter den β Punkten P_1 befinden, deren entsprechende Punkte P_2 in einer gegebenen Ebene liegen, wenn diese Ebene mit ε zusammenfällt; allein β wird dann noch andere in ε liegende Punktepaare P_1 und P_2 umfassen, nämlich 1. $2k$-mal die b Schnittpunkte mit der Doppelkurve und 2. solche getrennte Paare, die durch Gerade in der Ebene ε verbunden werden. Diese Gerade liegen auf dem Orte der aus k Geraden bestehenden Kurven c_r, die den Punkten P_1 des Schnittes der Fläche φ mit der Ebene ε entsprechen. Dieser Ort schneidet einen anderen ebenen Schnitt der Fläche φ einmal in den β Punkten, die als Punkte P_2 Punkten P_1 des Schnittes der Ebene ε entsprechen, und k-mal in jedem der m Schnittpunkte der zwei Schnitte. Da er also $\beta + km$ Schnittpunkte mit einer Kurve m^{ter} Ordnung hat, muß er selbst eine Fläche von der Ordnung $\frac{\beta}{m} + k$ sein. Er schneidet die Ebene ε in dem k-mal zu zählenden Schnitt der Fläche φ und im übrigen in Geraden, deren Anzahl also $\frac{\beta}{m} + k - km$ wird; da jede dieser Geraden außer dem Punkt P_1, dem sie zugehört, den Schnitt in $m-1$ entsprechenden

Punkten P_2 schneidet, wird die Anzahl der Paare entsprechender und getrennter Punkte P_1 und P_2 in ε

$$\left(\frac{\beta}{m} + k - km\right)(m-1)$$

sein. Man findet also

$$\eta = \beta - 2kb - \left(\frac{\beta}{m} + k - km\right)(m-1),$$

oder, da $m' = m(m-1) - 2b$ ist,

$$\eta = \frac{\beta}{m} + km' - k(m-1). \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben durch Addition

$$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m} - k(m'' - 2m' + 3m - 3), \tag{3}$$

was mit der Gleichung [152](1) übereinstimmt und also ausdrückt, daß k wirklich die Wertigkeit der hier vorliegenden Korrespondenz ist.

[154] Hilfssatz. Um den Beweis des Satzes [153] zu vervollständigen, brauchen wir noch den folgenden Hilfssatz: Eine Kurve k_s von der Ordnung s, die durch die mr Schnittpunkte einer Fläche φ_m von der Ordnung m und einer Kurve c_r von der Ordnung $r (< s)$ geht, wird die Fläche noch in $m(s-r)$ Punkten schneiden, die auf einer Kurve liegen, deren übrige Schnittpunkte mit φ_m die Schnittpunkte derselben Fläche mit einer Kurve sind, die auf einer Fläche liegt, die unabhängig von c_r und k_s gewählt werden kann.

Beim Beweise dieses Hilfssatzes bezeichnen wir mit φ_m die linke Seite der Gleichung der ebenfalls φ_m genannten Fläche. Auch ψ_n usw. sollen gleichzeitig Polynome in den Raumkoordinaten vom Grade n usw., und die durch $\psi_n = 0$ usw. bestimmten Flächen bezeichnen. Für hinreichend hohe Werte von n kann man immer erreichen, daß ψ_n und χ_n zwei verschiedene Flächen sind, die beide durch die Kurve k_s gehen. Sie werden sich noch in einer Kurve q_{n^2-s} schneiden und die mn^2 Schnittpunkte der drei Flächen ψ_n, χ_n, φ_m sind die Schnittpunkte der Kurven k_s und q_{n^2-s} mit φ_m.

Wir bilden sodann die Gleichungen

$$\begin{cases} \xi_o \equiv \sigma_{o-m}\varphi_m + \gamma_{o-n}\psi_n = 0, \\ \eta_o \equiv \tau_{o-m}\varphi_m + \gamma_{o-n}\chi_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

deren Grad o für die folgenden Bedingungen hinlänglich groß ist; γ_{o-n} ist eine beliebig gewählte Fläche von der Ordnung $o-n$; σ_{o-m} und τ_{o-m} sind zwei Flächen von der Ordnung $o-m$, die durch q_{n^2-s}, aber nicht durch k_s gehen, und deren Koeffizienten noch so gewählt werden, daß die Flächen ξ_o und η_o auch durch c_r gehen. Außer in c_r und in q_{n^2-s} werden diese Flächen sich dann noch in einer Kurve $l_{o^2-n^2+s-r}$ schneiden, deren Schnittpunkte mit φ_m diejenigen Schnittpunkte der

Flächen ξ_o, τ_o und φ_m sein müssen, die nicht schon auf c_r und q_{n^2-s} liegen. Sie geht, wie die Gleichungen zeigen, erstens durch die Schnittpunkte der Flächen ψ_n und χ_n mit φ_m, mit denen dasselbe der Fall ist, also durch die $m(s-r)$ Punkte, in denen k_s die Fläche φ_m außer in ihren Schnittpunkten mit c_r schneidet; die übrigen Schnittpunkte werden alle auf der Schnittkurve von φ_m und der festen Fläche γ_n liegen, und sie werden durch Kurven, die auf der letzteren Fläche liegen, ausgeschnitten werden. Dies ersieht man, wenn man zuerst in der Gleichung $\eta_o = 0$ die Fläche γ_{o-n} durch eine Fläche γ'_{o-n} ersetzt und den vorliegenden Fall als den Grenzfall betrachtet, in welchem γ'_{o-n} mit γ_{o-n} zusammengefallen ist. Der Satz ist also bewiesen.

Die hier betrachteten, gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Kurven c_r und k_s sind zunächst getrennt vorausgesetzt. Der Satz ist jedoch auch auf solche Fälle anwendbar, in denen die gemeinschaftlichen Schnittpunkte zusammengefallen sind, wenn nur diese Fälle als Grenzfälle solcher betrachtet werden können, in denen sie getrennt auftreten. Diese Bedingung ist bei der Bestimmung der Hilfskurve k_s in [155] erfüllt. Hat nämlich die Kurve c_r in einem Punkt P_1 k zusammenfallende Schnittpunkte mit φ_m, so läßt man (wie wir sehen werden) die in P_1 zusammenfallenden k Schnittpunkte der Kurve k_s dadurch entstehen, daß diese teilweise aus k Geraden besteht, die P_1 mit festen Punkten verbinden. Wie denn auch von den zusammenfallenden Schnittpunkten der Kurve c_r vorausgesetzt wird, daß sie ursprünglich getrennt waren, so wird die Grenzform der Kurve, die teilweise aus den Geraden, die diese Punkte mit den festen Punkten verbinden, besteht, eben die durch den Grenzpunkt gehenden Geraden enthalten.

[155] Vervollständigung des Beweises des Satzes [153]. Der Beweis des Satzes [153] läßt sich nun durch genau dasselbe Verfahren vervollständigen, das wir in [120] auf den *Cayley-Brill*schen Satz über Korrespondenzen auf einer Kurve angewandt haben. Wir betrachten, dem allgemeinen Satz [153] gemäß, eine solche Korrespondenz auf der Fläche φ_m, in welcher die einem Punkt P_1 entsprechenden Punkte P_2 durch eine durch P_1 vollständig bestimmte Kurve c_r, die in P_1 bereits k zusammenfallende Schnittpunkte hat, ausgeschnitten werden. Die Punkte, in welchen die Geraden, die P_1 mit k gegebenen Punkten $A, \ldots K$ verbinden, die Fläche außerdem noch schneiden, nennen wir P_3, die, in welchen die Geraden, die P_2 mit dem festen Punkt L verbinden, die Fläche schneiden, P_4. Dann hat (wie in [120]) die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_3 die Wertigkeit k ([153], Spezialfall 2), die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und $(P_2 + P_4)$ die Wertigkeit 0 ([153] Spezialfall 1), also [152] die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und $(P_2 + P_3 + P_4)$ die Wertigkeit k. Läßt man die Kurve, die wir in [154] k_s genannt haben, aus den Geraden $AP_1 \ldots KP_1$, LP_2 bestehen, so sieht man, daß die Punkte $(P_3 + P_4)$ durch eine Kurve l

ausgeschnitten werden können, die nicht durch P_1 geht und deren übrige Schnittpunkte mit φ_m durch Kurven, die auf einer festen Fläche liegen, ausgeschnitten werden. Die Wertigkeit der Korrespondenz zwischen P_1 und $(P_3 + P_4)$ ist also null ([153], 1 und Schluß von [152]). Also wird [152] die Wertigkeit der vorgelegten Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 k, was zu beweisen war.

[156] ***Steiner*****sches Schließungsproblem für Flächen dritter Ordnung** (vgl. 127). Von dem hier bewiesenen Satze über Korrespondenzen zwischen Punkten auf einer Fläche können wir Anwendungen machen, die den bereits gemachten Anwendungen des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes ähnlich sind, und dabei auch Korrespondenzen mit negativer oder gebrochener Wertigkeit antreffen. Hier werden wir uns auf eine einzige Anwendung beschränken.

Es sei gegeben eine allgemeine Fläche φ dritter Ordnung. Dann ist $m = 3, m' = 6, m'' = 12$, also $I = 5$, und da die Fläche keine Doppelkurve hat, wird $\omega = 2\eta$ sein [152]. Seien $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}, A_r$ feste Punkte dieser Fläche. Mit einem beliebigen Punkt P_1 der Fläche kann man dann die Konstruktion eines, im allgemeinen offenen, der Fläche einbeschriebenen Vielecks $P_1 P_2 \ldots P_r P_{r+1}$ anfangen, dessen Seiten durch die festen Punkte gehen, $P_1 P_2$ durch A_1, $P_2 P_3$ durch A_2 usw., $P_r P_{r+1}$ durch A_r. Zwischen den Punkten P_1 und P_{r+1} wird dann eine Korrespondenz stattfinden, für welche $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ist. Aus der Bestimmung des dem Punkte P_1 entsprechenden Punktes P_{r+1} folgt weiter, daß die Wertigkeit $k = (-1)^{r-1}$ ist. Da ein Kegel, dessen Scheitel A auf der Fläche φ liegt, und der eine nicht durch A gehende Kurve auf der Fläche von der Ordnung s projiziert, die Fläche noch in einer Kurve von der Ordnung $2s$ schneidet, wird $\beta = 3 \cdot 2^r$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung [152] (1) ein, so findet man (da $\omega = 2\eta$ ist)

$$\xi - \eta + \zeta = 2 + 2^r + (-1)^r \cdot 6.$$

Fangen wir nun die genauere Untersuchung mit $r = 1$ an. Das Zusammenfallen der Punkte P_1 und P_2 wird dann ausdrücken, daß $A_1 P_1$ die Fläche in P_1 berührt, und das gefundene Resultat

$$\xi - \eta + \zeta = -2$$

wird dann damit übereinstimmen, daß es keine isolierte Tangente gibt, also $\xi = 0$ ist, daß die Berührungskurve der Fläche mit dem umbeschriebenen Kegel mit dem Scheitel A_1 von der sechsten Ordnung, also $\eta = 6$ ist, und daß der Kegel selbst vierter Ordnung, also $\zeta = 4$ ist.

Ist $r = 2$, so finden wir

$$\xi - \eta + \zeta = 12,$$

und wenn die Punkte A_1 und A_2 nicht auf einer der Geraden der Fläche liegen, so wird die einzige Art und Weise, auf die P_1 mit P_3 zusammenfallen kann, darin bestehen, daß alle drei Punkte P_1, P_2 und P_3 in einen Be-



rührungspunkt einer der zwölf durch $A_1 A_2$ gehenden Tangentialebenen der Fläche fallen. Also ist $\xi = 12$, $\eta = \zeta = 0$.

Ist $r = 3$, so findet man

$$\xi - \eta + \zeta = 4.$$

Fällt hier P_4 mit P_1 zusammen, so muß die Ebene des geschlossenen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ durch die Punkte A_1, A_2, A_3 gehen. Liegen diese Punkte nicht in einer Geraden, so werden die Punkte P_1, P_2, P_3 in die Ebene $A_1 A_2 A_3$ fallen. Außerhalb dieser Ebene findet also keine Koinzidenz von P_1 und P_4 statt. Daher wird $\eta = \zeta = 0$, und man findet $\xi = 4$, also vier isolierte Koinzidenzpunkte. Dies folgt übrigens schon aus dem entsprechenden planimetrischen Satz [127]. Liegen dagegen A_1, A_2, A_3 in einer Geraden a, so wird zunächst A_2 ein Koinzidenzpunkt sein und außerdem jede durch a gehende Ebene drei Koinzidenzen enthalten. Also wird $\xi = 1$, $\eta = 3$, und daher $\zeta = 6$. Der Ort der Geraden, die zwei auf der Koinzidenzkurve zusammenfallende Punkte verbinden, ist also sechster Ordnung. Da jede Ebene durch $A_1 A_2 A_3$ drei solche Geraden enthält, muß $A_1 A_2 A_3$ dreifache Gerade dieser Regelfläche sein.

Es ist zu erwarten, daß auch für höhere Werte von r die Korrespondenz zwischen P_1 und P_{r+1} im allgemeinen nur isolierte Koinzidenzpunkte und keine Koinzidenzkurve haben, und daß eine solche lediglich für besondere Lagen der gegebenen Punkte $A_1, A_2 \dots A_r$ eintreten wird. Betrachtet man nämlich ein geschlossenes r-Eck, das der Fläche einbeschrieben ist und dessen Seiten durch $A_1, A_2 \dots A_r$ gehen, so wird man dasselbe r-Eck finden, wenn man die Punkte $P_1, P_2 \dots P_r$, P_{r+1} statt auf der Fläche auf ihren Tangentialebenen sich bewegen läßt, während die Seiten immer durch die festen Punkte gehen. Dann beschreiben die Punkte P_1 und P_{r+1} projektive Figuren, die im allgemeinen nur isolierte Koinzidenzpunkte haben, und man sieht, daß, wenn der bereits gefundene ein solcher für die projektiven Figuren ist, er auch ein solcher für die Korrespondenz auf der Fläche sein muß. Besondere Lagen der gegebenen Punkte und der Ebenen können jedoch zur Folge haben, daß die projektiven Figuren perspektivisch sind [147], und dann würde auch auf der Fläche der Punkt, in dem P_1 und P_{r+1} koinzidieren, Punkt einer Koinzidenzkurve sein können. Denkbar wäre es also, daß für hinreichend hohe Werte von r die Bedingungen, daß $A_1, A_2 \dots A_r$ auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, während sich $P_1, P_2 \dots P_r, P_{r+1}$ auf dieser bewegen, immer den eben genannten Ausnahmefall zur Folge hätten. Um zu beweisen, daß dies nicht der Fall ist, genügt es, eine solche Lage der Punkte $A_1, A_2 \dots A_r$ anzugeben, für die keine Koinzidenzkurve auftritt. Dabei können wir das vorhin aufgefundene Ergebnis benutzen, daß die Korrespondenz zwischen P_1 und P_{r+1} für $r = 2$ und für $r = 3$ im allgemeinen keine Koinzidenz-

kurve hat, und sodann durch vollständige Induktion von $r-2$ auf r schließen. Wir bemerken zunächst, daß, wenn A_{r-1} mit A_r zusammenfällt, P_{r+1} entweder mit P_{r-1} zusammenfallen oder auf der Schnittkurve der Tangentialebene in A_r liegen muß. Außer den isolierten Koinzidenzpunkten, die auf dieser Kurve liegen, hat also die Korrespondenz zwischen P_1 und P_{r+1} nur Koinzidenzen, die in der Korrespondenz zwischen P_1 und P_{r-1} stattfinden; hat diese keine Koinzidenzkurve, so wird jene auch keine haben.

Für $r > 1$ ist also im allgemeinen $\eta = 0$, was $\xi = 0$ zur Folge hat; man findet daher:

$$\xi = 2 + 2^r + (-1)^r \cdot 6. \tag{1}$$

Nur für besondere Lagen der Punkte A ändert sich dieses Verhältnis.

Haben wir so für Flächen dritter Ordnung ein *Steiner*sches Schließungsproblem aufstellen können, so sind wir hier doch nicht auf die von *Steiner* entdeckten, eigentümlichen Schließungssätze gekommen.

Dieselbe Aufgabe hätten wir übrigens auch schon durch Anwendung des Korrespondenzsatzes für die Ebene [146] (oder für einen Bündel) auf jene Bündel, die von A_r aus die Punkte P_1 und P_r projizieren, lösen können. Für die Korrespondenz dieser Bündel hat man mit den Bezeichnungen von [146] $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta = 3 \cdot 2^{r-1}$. Die Koinzidenzen entstehen, wenn sich entweder $P_1 P_2 \ldots P_r$ oder schon $P_1 P_2 \ldots P_{r-1}$ schließt. Bezeichnen wir mit ξ_r und ξ_{r-1} die Anzahlen solcher geschlossener Vielecke, so findet man die mit (1) übereinstimmende Rekursionsformel

$$4 + 3 \cdot 2^{r-1} = \xi_r + \xi_{r-1}.$$

[157] Übungen. 1. Wieviele r-Ecke gibt es, die einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung einbeschrieben sind und deren Seiten in gegebener Ordnung durch r gegebene Punkte gehen? Die Aufgabe ist für gerade und für ungerade r gesondert zu lösen.

2. Ein einer Fläche zweiter Ordnung einbeschriebenes $4s$-Eck sei gegeben, dessen Gegenseiten sich schneiden. Wieviele $4s$-Ecke, deren Gegenseiten sich in derselben Ordnung in denselben Punkten schneiden, kann man der gegebenen Fläche einschreiben?

3. Der Korrespondenzsatz für die Ebene (den Bündel) auf die Bündel anzuwenden, die von einem festen Punkte A aus die Schnittpunkte einer Fläche φ_m mit den Strahlen eines gegebenen Bündels projizieren.

4. Man verbinde zwei feste Punkte A und B im Raume mit den Punkten P einer Fläche φ_m. Die Korrespondenzsätze [152] und [153] auf die Korrespondenz zwischen den übrigen Schnittpunkten P_1 und P_2 der Geraden AP und BP mit φ_m anzuwenden.

5. Den Korrespondenzsatz [153] auf die Korrespondenz zwischen

den Punkten P_1 einer Fläche und den Schnittpunkten P_2 der Haupttangenten in P_1 anzuwenden.

6. Den Korrespondenzsatz [153] zur Bestimmung der Normalen, die von einem gegebenen Punkte A aus an eine gegebene Fläche φ_m gehen, anzuwenden (Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und den Berührungspunkten P_2 der auf AP_1 senkrechten Tangentialebenen).

7. Auf einer Fläche φ_m sei gegeben eine Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2; die Ordnung und Klasse der Kongruenz der Strahlen $P_1 P_2$ zu finden.

Fünftes Kapitel.

Systeme von Gebilden.

a) Systeme von Kurven.

[158] Über eigentliche und uneigentliche Abhängigkeit der Bedingungen. Bis jetzt haben wir in unseren Beispielen meistens die Anzahl der durch eine hinreichende Anzahl von Bedingungen vollständig bestimmten geometrischen Gebilde gesucht. Waren mehrere Bedingungen vorhanden, so konnten sie unter sich abhängig oder unabhängig sein. Die im folgenden aufgestellten Ausdrücke für Anzahlen von geometrischen Gebilden, die gleichzeitig verschiedenen gegebenen Bedingungen unterworfen sind, setzen dagegen eine gewisse Unabhängigkeit der Bedingungen voraus, d. h. sie gelten unmittelbar für alle Werte der willkürlichen Parameter, die in die verschiedenen, diese Bedingungen ausdrückenden Gleichungen eingehen, mit Ausnahme von denen, die gewisse Gleichungen befriedigen, während die Fälle, in welchen eine durch eine oder mehrere solcher Gleichungen charakterisierte Abhängigkeit stattfindet, als Grenzfälle zu betrachten sind. Auf diese findet die gefundene Anzahl (siehe [4]) insofern eine mittelbare Anwendung, als sie dann verschiedenartige Lösungen umfaßt, von denen einige mehrfach zu zählen sind. Wird z. B. unter den eine Kurve bestimmenden Bedingungen von dieser verlangt, sie soll durch einen Punkt P gehen und eine gegebene Kurve c_n berühren, so entsteht eine Abhängigkeit von der eben erwähnten Art, wenn P auf c_n liegt. Die im allgemeinen Fall geltende Anzahl wird dann einmal die durch P gehenden Kurven einbegreifen, die c_n in anderen Punkten berühren, und zweimal die, die c_n in P selbst berühren. Jede dieser zwei Mengen von Kurven sind zwei untrennbaren Bedingungen unterworfen. Als solche muß man auch die einer Kurve auferlegten Bedingungen, eine gegebene Kure c_n zweimal zu berühren, betrachten (vgl. [63]).

Auch diese Bedingungen sind zwar in den unter sich unabhängigen Bedingungen inbegriffen, zwei Kurven zu berühren. Fallen diese beide mit c_n zusammen, so sind die c_n zweimal berührenden Kurven zweimal unter die Kurven, die durch diese unter sich abhängigen Bedingungen bestimmt werden, zu zählen, und neben ihnen einmal die, die c_n in solchen Grenzpunkten der Schnittpunkte der zusammenfallenden gegebenen Kurven berühren, die nicht von singulären Punkten herrühren, und dreimal die, die mit c_n Berührung zweiter Ordnung haben. Sind z. B. die gesuchten Kurven Gerade, so kommt man auf diese Weise auf die Formel [70]

$$n'^2 = (n^2 - 2d - 3e) + 2d' + 3e'.$$

Sind sie höherer Ordnung, so kommen, wie wir gleich sehen werden, noch andere Lösungen hinzu, und zwar einmal die Kurven, die einen neugebildeten Doppelpunkt auf c_n haben.

Diese Beispiele genügen, um die Abhängigkeit von Bedingungen zu erläutern, die durch Gleichungen zwischen Parametern charakterisiert wird, so daß sich die dadurch entstehenden Fälle als Grenzfälle betrachten lassen. Nur auf diese werden wir die Benennung Abhängigkeit anwenden. Sie sind aber nicht die einzigen, in welchen der sich ergebende Ausdruck für die Anzahl von geometrischen Gebilden, die mehreren Bedingungen unterworfen sind, ganz verschiedenartige Lösungen umfaßt. Es gibt auch solche Fälle, in denen die zur Zammensetzung der Bedingungen am besten geeignete Formulierung, wenigstens nach mehreren Wiederholungen, zu ganz fremdartigen Lösungen Anlaß gibt, die entfernt werden müssen, um die Anzahl zu finden, die man eigentlich sucht, und besonders um einer noch weiter gehenden Zusammensetzung überhaupt einen vernünftigen Sinn zu geben. Man könnte zwar auch hier von einer Abhängigkeit der Bedingungen sprechen. Diese würde aber uneigentlich sein, insofern sie sich auf die Art der Bedingungen bezieht und nicht auf den Werten kontinuierlich veränderlicher Parameter beruht, und die Fälle, in welchen sie stattfindet, lassen sich nicht als Grenzfälle auffassen. Eben daher hat sie früher bisweilen Irrtümer verursacht. Der Begriff „Abhängigkeit" läßt sich aber in solchen Fällen ganz umgehen, wenn man nur die schon in der Einleitung gegebenen Regeln festhält, die in den hier vorliegenden Untersuchungen die folgende Form annehmen:

1. Bei der Anwendung der Formeln, die Anzahlen von Gebilden ausdrücken, die gleichzeitig verschiedene Bedingungen erfüllen, muß man für jede Bedingung genau die Bedeutung festhalten, die bei ihrer Einführung in die Formel zugrunde gelegt wurde, ohne sich durch einen mehrdeutigen Sprachgebrauch täuschen zu lassen, der sich an verschiedene geometrische Auffassungen oder an den Gebrauch verschiedener Koordinatensysteme oder anderer

analytischer Hilfsmittel anknüpft [5]. Daß zwei Kurven sich berühren, bedeutet z. B. nach Umständen, daß sie sich in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, oder daß sie zwei zusammenfallende gemeinschaftliche Tangenten haben oder beides auf einmal; letzteres kann man eine eigentliche Berührung nennen. Hat man bei der Bildung der Formel nur eine dieser Bedeutungen beachtet, so muß man bei der Anwendung diese Bedeutung festhalten.

2. Um die Resultate brauchbar zu machen, muß man bei der Anwendung der Formeln zwischen den Lösungen unterscheiden, in denen die eingeführten Bedingungen auf verschiedene Weise erfüllt sind. Hat man z. B. die Bedingung eingeführt, ein gesuchter Kegelschnitt soll eine Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, so muß man zwischen solchen Fällen unterscheiden, in denen die Berührung im letzten, oben genannten Sinne stattfindet („eigentliche Berührung"), ferner solchen, in denen der Kegelschnitt durch einen mehrfachen Punkt der Kurve geht, solchen, in denen er selbst einen Doppelpunkt auf der Kurve hat; und endlich solchen, in denen er aus zwei zusammenfallenden Geraden besteht.

3. Die Formeln der abzählenden Geometrie gelten überhaupt nur dann, wenn die gestellte Aufgabe eine endliche Anzahl von Lösungen hat [3]. Ist es möglich, die eingeführten Bedingungen auf unendlich viele Weisen zu befriedigen, so hat die gefundene Formel, unmittelbar betrachtet, keinen Sinn. Außer einer kontinuierlichen Folge von Lösungen gibt es zwar oft auch in solchen Fällen eine endliche Anzahl von diskreten Lösungen; die Bestimmung dieser Anzahl ist aber dann eine ganz neue Aufgabe. Einige Fälle dieser Art schließen sich jedoch so eng an die ursprüngliche Aufgabe an, daß man die ihnen entsprechenden Abzählungen aus den gefundenen durch einen Grenzübergang ermitteln kann; für andere Fälle bedarf es einer neuen Formulierung der Aufgabe. Man findet z. B. durch den einfachen Korrespondenzsatz, daß es in einem Systeme von Kegelschnitten mit der Charakteristik μ (das ist nach [17] ein solches, in welchem μ Kegelschnitte durch einen willkürlichen Punkt gehen), 2μ gibt, die eine willkürliche Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, woraus folgt, daß es 2^r (oder unendlich viele) Kegelschnitte gibt, die r gegebene Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden und sonst durch gegebene Punkte gehen. Durch drei Punkte A, B, C gehen also 4 Kegelschnitte, die zwei Geraden d und e in zusammenfallenden Punkten schneiden, wenn es nicht unendlich viele gibt. Letzteres wird eintreten, wenn d und e zusammenfallen, und das gefundene Resultat wird also dann nicht unmittelbar anwendbar. Hier findet aber, wie eben berührt, nur eine eigentliche Abhängigkeit der Bedingungen statt, und dieser Fall läßt sich daher so als Grenzfall auffassen, daß die Bedeutung der gefundenen Anzahl 4 erhalten bleibt. Ein Punkt der Geraden d läßt sich nämlich



dann als Schnittpunkt mit der unendlich benachbarten Geraden e auffassen, und der durch A, B und C gehende Kegelschnitt, der d in diesem Punkte berührt, wird eine der 4 Lösungen abgeben. Die 3 anderen Kegelschnitte, durch die die Aufgabe gelöst wird, bestehen je aus zwei Geraden, von denen die eine durch zwei der drei gegebenen Punkte (z. B. A und B) geht, während die andere den dritten (C) mit dem Schnittpunkte dieser Geraden (AB) mit d verbindet. Hätte man hier statt d und e zwei Kegelschnitte d_2 und e_2 gehabt, so würde es 6^2 Lösungen geben, und in dem Grenzfalle, in welchem d_2 und e_2 zusammenfallen, würden diese Lösungen sich so verteilen: Erstens, 4 Kegelschnitte berühren d_2 in seinen Schnittpunkten mit e_2; zweitens, 6 Kegelschnitte bestehen je aus zwei Geraden; drittens, 4 doppelzählende Kegelschnitte berühren d_2 je zweimal und viertens, 6 dreimal zählende Kegelschnitte haben mit d_2 Berührung zweiter Ordnung, was aus den näheren Bestimmungen hervorgehen wird.

Unter den 2^3 Kegelschnitten, die durch zwei feste Punkte A und B gehen und drei Gerade c, d, e in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, wird — wie es sich später zeigen wird — die Doppelgerade AB für 4 Kegelschnitte zu zählen sein. Übrig bleiben 4 Kegelschnitte, die die drei Geraden wirklich berühren.

Die Anzahlenbestimmungen 2^4 und 2^5 von Kegelschnitten, die beziehungsweise durch einen Punkt gehen und vier Gerade je in zusammenfallenden Punkten schneiden, oder fünf Gerade je in zusammenfallenden Punkten schneiden, erweisen sich sogleich als bedeutungslos dadurch, daß es unendlich viele Doppelgerade gibt, die die aufgestellten Bedingungen erfüllen. Auch in diesen Fällen gibt es zwar bestimmte Anzahlen von Kegelschnitten, die die gestellten Bedingungen dadurch erfüllen, daß sie die Geraden wirklich berühren. Diese Anzahlen lassen sich aber hier nicht durch einen Grenzübergang ermitteln, weil die Unbestimmtheit nicht die Folge einer Abhängigkeit der Parameter der gegebenen Punkte oder Geraden ist, denen man sich nähern könnte. Die Bestimmung der wirklich berührenden Kegelschnitte ist also in diesen Fällen eine neue Aufgabe und ihre Lösung erfordert das Heranziehen anderer Hilfsmittel.

Wie in diesen Beispielen kann man auch in anderen, wo ähnliche Verhältnisse sich in ganz anderer Gestalt darbieten, die Aufstellung eines Begriffs von einer anders als durch die Variation der Parameter enstehenden Abhängigkeit umgehen, wenn man nur die allgemeinen Regeln der abzählenden Geometrie festhält, also zwischen den verschiedenartigen Lösungen einer Aufgabe unterscheidet und die gefundenen Resultate überhaupt nicht auf solche Eälle anwendet, in denen eine Gattung von Lösungen in unendlicher Anzahl vorkommt.[1])

1) In [189] Anmerkung 2 werden wir den Einfluß der hier angestellten Betrachtungen auf den Gebrauch symbolischer Rechnungen kennen lernen.



[159] Bestimmung von Punkten eines drei- oder mehrdimensionalen Raumes. Ein einfaches Beispiel für die sukzessive Einführung von Bedingungen, das man auch für andere ähnliche Fälle verwerten kann, gibt die Bestimmung eines Punktes im Raum ab. Ein Punkt, der einer einfachen Bedingung unterworfen ist, wird einer Fläche angehören, sagen wir von der Ordnung m_1; diese wird von einer Geraden in m_1 Punkten getroffen. Wenn er gleichzeitig einer anderen einfachen Bedingung unterworfen ist, so muß er auch auf einer Fläche von der Ordnung m_2, also auf der Schnittkurve von der Ordnung $m_1 m_2$ liegen. Läßt eine dritte Bedingung ihn auf einer dritten Fläche von der Ordnung m_3 liegen, so bestimmen die drei Bedingungen im allgemeinen zusammen $m_1 m_2 m_3$ Punkte [16]. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn alle drei Flächen eine gemeinsame Kurve enthalten. Daß die gefundene Anzahl in diesem Fall illusorisch wird, gibt sich unmittelbar dadurch kund, daß die gestellte Aufgabe dann unendlich viele Lösungen hat. Die Bestimmung der Anzahl der der gemeinschaftlichen Schnittkurve nicht angehörenden Schnittpunkte der Flächen ist dann eine neue Aufgabe, die wir in [109] gelöst haben. Da hier nur eine eigentliche, durch die Parameter der Flächen ausdrückbare Abhängigkeit vorliegt, wäre jedoch auch ein Grenzübergang möglich gewesen.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf einen linearen Raum mit r Dimensionen ausdehnen. Hier wird es $m_1 m_2 \dots m_r$ Punkte geben, deren r Koordinaten r Gleichungen von den Graden $m_1, m_2, \dots m_r$ befriedigen. Diese Zahl wird die Anzahl der Schnittpunkte von r $(r-1)$-dimensionalen Räumen von den Ordnungen $m_1, m_2, \dots m_r$ sein. Wenn $r = r_1 + r_2$ ist, kann man auch diese Punkte Schnittpunkte eines $(r - r_1)$- oder r_2-dimensionalen Raumes $[r_2]_{n_1}$ von der Ordnung $n_1 = m_1 m_2 \dots m_{r_1}$ und eines $(r - r_2)$- oder r_1-dimensionalen Raumes $[r_1]_{n_2}$ von der Ordnung $n_2 = m_{r_1+1} m_{r_1+2} \dots m_r$ nennen. Die Anzahl wird also auch das Produkt $n_1 n_2$ der Ordnungen der zwei sich schneidenden Räume $[r_1]_{n_2}$ und $[r_2]_{n_1}$. Dies läßt sich aber nicht nur für den hier erörterten Fall beweisen, in welchem die r_1 ersten Räume keine anderen Punkte gemein haben als die dem Raume $[r_2]_{n_1}$ angehörigen, die r_2 letzten keine anderen als die $[r_1]_{n_2}$ angehörigen, oder anders ausgedrückt, in welchem die Gebilde $[r_2]_{n_1}$ und $[r_1]_{n_2}$ als vollständige Schnitte bestimmt sind. Der Satz gilt auch, wenn $[r_2]_{n_1}$ und $[r_1]_{n_2}$ nicht vollständige Schnitte sind. Dann wird die Ordnung n_1 eines r_2-dimensionalen Raumes dadurch definiert, daß er und r_2 lineare $(r-1)$-dimensionale Räume sich in n_1 Punkten schneiden; er schneidet also einen linearen $(r-1)$-dimensionalen Raum in einem $(r_2 - 1)$-dimensionalen Raum von der Ordnung n_1. Auch dann werden sich die Räume $[r_1]_{n_2}$ und $[r_2]_{n_1}$ in $n_1 n_2$ Punkten schneiden.

Der Beweis des zuletzt aufgestellten Satzes, der auf vollständige Schnitte angewandt, die früher genannten umfaßt, wird durch eine Er-

weiterung des Verfahrens geführt, das wir schon in [11] benutzten, um den einfachen *Bezout*schen Satz zu beweisen. Im folgenden Beweise setzen wir übrigens voraus, daß der für einen linearen r-dimensionalen Raum zu beweisende Satz für einen $(r-1)$-dimensionalen linearen Raum richtig ist, was von vornherein erlaubt ist, da er für den zwei- oder dreidimensionalen Raum schon gilt [11] und [16]. Durch vollständige Induktion läßt sich also auch die allgemeine Gültigkeit dartun.[1])

Wir verbinden jeden Punkt P_1 des $[r_2]_{n_1}$ mit einem weder auf $[r_2]_{n_1}$ noch auf $[r_1]_{n_2}$ liegenden festen Punkt A durch eine Gerade (einen linearen eindimensionalen Raum). Diese Geraden werden dann einen (r_2+1)-dimensionalen „Kegel" erzeugen, der einen durch A gehenden linearen Raum von $r-1$ Dimensionen $[r-1]'$ in einem r_2-dimensionalen Kegel $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet. $[r-1]'$ wird $[r_1]_{n_2}$ in einem (r_1-1)-dimensionalen Raum $n_2{}^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden. Dieser wird, unserer Voraussetzung gemäß, den Kegel in $n_1 n_2$ Punkten P_2 schneiden. Jede Erzeugende AP_2 schneidet auch $[r_2]_{n_1}$ in einem Punkte P_1 (und nur in einem, wenn sie nicht Doppelerzeugende des Kegels ist, und dann ist auch P_2 zweifach zu zählen). Schneiden wir nun den Kegel durch einen nicht durch A gehenden neuen linearen Raum $[r-1]''$ und benennen wir den Schnittpunkt dieses Raumes mit AP_2 mit E, so können wir weiter auf AP_2 einen Punkt Q so bestimmen, daß

$$(A, A, P_1, P_2,) \barwedge (A, A, E, Q)$$

ist, wo die Wiederholung von A bedeutet, daß die entsprechend gemeinsamen Punkte der Projektivität in A zusammenfallen. Dann wird jedem der $n_1 n_2$ im Raume $[r-1]'$ liegenden Punkte P_2 ein Punkt Q desselben Raumes entsprechen. Da Q niemals mit A zusammenfallen kann, weil weder P_1 noch P_2 mit A zusammenfallen kann, so sind diese $n_1 n_2$ die einzigen Schnittpunkte des Ortes von Q mit dem Raume $[r-1]'$. Dieser Ort ist also eine Kurve (ein eindimensionaler Raum) von der Ordnung $n_1 n_2$ und muß auch den Raum $[r-1]''$ in $n_1 n_2$ Punkte schneiden. In jedem dieser Punkte wird Q mit E zusammenfallen. Dadurch werden auch P_1 und P_2 in einem Schnittpunkte von $[r_2]_{n_1}$ und $[r_1]_{n_2}$ zusammenfallen. Umgekehrt entspricht jedem solchen Schnittpunkte ein mit dem zugehörigen Punkte E zusammenfallender Punkt Q. Die Anzahl der Schnittpunkte ist also $n_1 n_2$, was zu beweisen war.

[160] Bestimmung ebener Kurven durch verschiedene Bedingungen. Die hier gefundene Zusammensetzung gegebener Bedingungen durch Multiplikation läßt sich auch dualistisch auf die Bestimmung linearer $(r-1)$-dimensionaler Räume in einem linearen r-dimensionalen

1) Der in dem folgenden Beweis benutzten Ausdrucksweise wird es am besten entsprechen, wenn $r_2 < r-1$ vorausgesetzt wird, was für $r > 2$ immer möglich ist. Übrigens zeigt der für $r=2$ in [11] gegebene Beweis, wie sich die hier beschriebene Beweisführung gestalten wird, wenn $r_2 = r-1$ ist.



Raum anwenden. Übrigens kann sie auch als Ausdruck für irgend eine Bestimmung von r Größen durch r algebraische Gleichungen dienen. Ein Beispiel ist die Bestimmung einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung k_n durch $\frac{1}{2}n(n+3) = r$ Bedingungen. Jede solche Kurve ist nämlich durch die r Verhältnisse der Koeffizienten ihrer Gleichung bestimmt und diese lassen sich auch als Koordinaten eines der Kurve eindeutig entsprechenden Punktes in einem r-dimensionalen Raum auffassen. Aus [159] können wir also schließen, daß, wenn $r = r_1 + r_2 + \cdots r_s$ ist und die Kurve einer r_1-fachen, einer r_2-fachen $\cdots$ und einer r_s-fachen Bedingung unterworfen ist, die je in Verbindung mit beziehungsweise $r - r_1$, $r - r_2 \ldots r - r_s$ linearen Bedingungen α_1, $\alpha_2 \cdots \alpha_s$ Lösungen ergeben, diese Bedingungen zusammen $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$ Lösungen ergeben werden. Das einfachste Beispiel einer linearen Bedingung ($\alpha = 1$) ist die, durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Ist $r_1 = 1$, so kann man für den gefundenen Ausdruck $\alpha \cdot \mu$ schreiben, wo α die Anzahl der Kurven eines Büschels ist, die die erste Bedingung erfüllen, μ die erste Charakteristik des durch die übrigen bestimmten Systems von Kurven. Beispiele von Zahlen α_1, $\alpha_2 \cdots$, die verschiedenen einfachen oder mehrfachen Bedingungen entsprechen, haben wir in [35], [112] und [133]—[136] angetroffen; nun können wir also die Anzahl der Kurven angeben, die gleichzeitig mehreren solchen Bedingungen unterworfen sind. Richtig wird (s. [158]) der so gebildete Produktausdruck immer, wenn nur die Anzahl der den Bedingungen unterworfenen Kurven überhaupt eine endliche ist. Um ihn richtig anzuwenden, muß man aber oft zwischen verschiedenartigen Lösungen unterscheiden. Aus den Fällen, in welchen die Anzahl von Lösungen unendlich wird, werden neue Aufgaben entstehen, bei denen sich die Anzahl von Lösungen überhaupt nicht auf diese Weise ausdrücken läßt.

[161] Bestimmung von Kurven, die gegebene Kurven je in drei in gerader Linie liegenden Punkten schneiden. Schon in [158] haben wir Beispiele von Einschränkungen dieser Art, die bei Berührungsaufgaben auftreten, angegeben; im folgenden werden wir Mittel kennen lernen, um diese Einschränkungen zu umgehen. Hier wollen wir ein anderes Beispiel betrachten, in welchem die Einschränkungen schon früher auftreten. Suchen wir eine Kurve n^{ter} Ordnung ($n > 2$), welche Kurven $c_{n_1}, c_{n_2} \cdots c_{n_s}$ von den Ordnungen n_1, $n_2 \cdots n_s$ ohne mehrfachen Punkte je in drei auf Geraden liegenden Punkten schneiden und außerdem durch $\frac{1}{2}n(n+3) - s$ gegebene Punkte gehen. Die Anzahl der Kurven c_n eines Büschels, die die Kurve c_{n_1} in drei Punkten einer Geraden treffen, finden wir aus [133] (2), wenn wir dort $s = 2$, $p = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2)$, $m_1 = nn_1$, $m_2 = n_1$ setzen.[1]) Sie wird

1) Da hier nur ein besonders einfacher Fall vorliegt, würde man, wenn die zitierte allgemeine Formel uns nicht bekannt wäre, die verlangte Anzahl am leichtesten durch eine doppelte Anwendung des *Cayley-Brill*schen Satzes finden können.

$$\tfrac{1}{2}(nn_1 - 2)(n_1 - 2)n_1(n - 1)$$

sein. Die ganze gesuchte Anzahl wird also

$$(\tfrac{1}{2}(n - 1))^s\, \Pi((nn_i - 2)\,(n_i - 2)n_i)$$

sein, wo das Produkt Π über alle Faktoren auszudehnen ist, die man erhält, wenn man n_i durch $n_1, n_2, \cdots n_s$ ersetzt.

Ist die Anzahl $\frac{1}{2}n(n+3) - s$ der gegebenen Punkte, die wir t nennen wollen, gleich $\frac{1}{2}(n - 1)(n+2) + 2$, also $s = n - 1$, so werden durch sie $\frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)$ Kurven gehen, die aus einer Geraden und einer Kurve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen, und jede dieser Kurven erfüllt die aufgestellten Forderungen auf $(\frac{1}{6})^s\, \Pi n_i(n_i - 1)(n_i - 2)$-fache Weise. Dies gibt im ganzen zu

$$\tfrac{1}{2}(t - 1)(t - 2)(\tfrac{1}{6})^{n-1}\Pi(n_i(n_i - 1)(n_i - 2))$$

Lösungen eigentümlicher Art Anlaß; diese Zahl wird abzuziehen sein, wenn man nur nach jenen Lösungen fragt, für welche die geraden Linien nicht selbst Teile der gesuchten Kurve sind.

Ist die Anzahl der gegebenen Punkte $< \frac{1}{2}(n - 1)(n + 2) + 2$, so gehen durch sie unendlich viele Kurven n^{ter} Ordnung, die aus einer Geraden und einer Kurve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen. Die gefundene Anzahl ist also nur der Grad einer identischen Gleichung und wird daher bedeutungslos.

Diesem Mangel kann man aber sowohl hier wie in anderen entsprechenden Fällen abhelfen, wenn man von der Aufstellung einer allgemeinen Formel absieht und sich mit einer sukzessiven Einführung der einzelnen Bedingungen begnügt. Wir setzen dann voraus, daß wir bereits die Anzahl μ der Kurven bestimmt haben, die einen Teil der einzuführenden Bedingungen erfüllen und noch durch feste Punkte gehen, und daß, wenn verschiedene algebraisch trennbare Arten von Lösungen möglich wären, μ lediglich die Anzahl von Lösungen einer dieser Arten angibt. Im vorliegenden Falle schließen wir besonders die Lösungen aus, die von der Spaltung der gesuchten Kurve c_n in eine Gerade und eine Kurve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung herrühren. Die hier gesuchte Anzahl „eigentlicher" Lösungen ist also für $s = n - 1$, $t = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) + 2$

$$\mu = (\tfrac{1}{2}(n - 1))^{n-1}\Pi((nn_i - 2)(n_i - 2)n_i)$$
$$- \tfrac{1}{2}(t - 1)(t - 2)(\tfrac{1}{6})^{n-1}\Pi(n_i(n_i - 1)(n_i - 2).$$

Fällt nun die Bedingung, durch einen der gegebenen Punkte zu gehen, weg, so wird man ein ∞^1-faches System von Kurven c_n haben, dessen erste Charakteristik μ ist. Wir werden weiter annehmen, daß auch dieses System λ Kurven enthält, die je aus einer Geraden und einer Kurve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen. Im ganzen wird dann das System

$$\tfrac{1}{2}(nn_{s+1} - 2)(n_{s+1} - 2)n_{s+1}(n - 1)\cdot\mu$$

Kurven enthalten, die eine allgemeine Kurve n_{s+1}ter Ordnung in drei auf einer Geraden liegenden Punkten schneiden, von denen jedoch $\frac{1}{6} n_{s+1}(n_{s+1}-1)(n_{s+1}-2)$ den gesuchten nicht angehören. Beizubehalten sind also nur

$$\tfrac{1}{2}(n n_{s+1}-2)(n_{s+1}-2) n_{s+1}(n-1)\mu - \tfrac{1}{6} n_{s+1}(n_{s+1}-1(n_{s+1}-2)\lambda$$

Lösungen. Diese Zahl wird dann die Charakteristik μ eines neuen ∞^1-fachen Systems sein, für das noch eine weitere der Bedingungen, durch gegebene Punkte zu gehen, wegfällt. Auf diese Weise kann man alle Bedingungen der genannten Art nach einander einführen.

Sei z. B. $n = 3$. Dann findet man sogleich, daß es im ganzen

$$(3n_1-2)(n_1-2)n_1(3n_2-2)(n_2-2)n_2$$

Kurven dritter Ordnung gibt, die durch sieben gegebene Punkte gehen und die Kurven c_{n_1} und c_{n_2} je in drei, in gerader Linie liegenden Punkten schneiden. Letztere Bedingungen werden wir kurz $[c_{n_1}]$ und $[c_{n_2}]$ nennen. Durch die 7 Punkte gehen aber 21, die aus einem Kegelschnitt und einer Geraden bestehen, und jede von diesen ist in der gefundenen Anzahl

$$\tfrac{1}{36} n_1(n_1-1)(n_1-2)n_2(n_2-1)(n_2-2)\text{-mal}$$

mitgezählt. Übrig bleiben

$$(1) \qquad \mu = (3n_1-2)(n_1-2)n_1(3n_2-2)(n_2-2)n_2 - \tfrac{7}{12} n_1(n_1-1)(n_1-2)n_2(n_2-1)(n_2-2)$$

Lösungen, die als eigentliche betrachtet werden. μ ist die erste Charakteristik eines Systems von (im allgemeinen) nicht zusammengesetzten Kurven c_3, die durch sechs Punkte gehen und die Bedingungen $[c_{n_1}]$ und $[c_{n_2}]$ erfüllen. Dieses System enthält jedoch auch einzelne zusammengesetzte Kurven[1]), deren Anzahl wir λ nennen.

Eine Gerade, die ein Teil einer Kurve c_3 des Systems sein soll, muß entweder durch zwei oder wenigstens durch einen der sechs gegebenen Punkte gehen. Wir bestimmen für sich die Anzahl λ_1 der Geraden, die durch die gegebenen Punkte A und B gehen, und die Anzahl λ_2 solcher, die allein durch einen gegebenen Punkt A gehen. λ wird dann gleich $15\lambda_1 + 6\lambda_2$ sein.

Die Kurven c_3, die die Gerade AB enthalten, müssen sich unter den μ Kurven des Systems befinden, die durch einen dritten Punkt P der Geraden AB gehen, und um ihre Anzahl zu bestimmen, muß man von μ die Anzahl der nicht zusammengesetzten Kurven subtrahieren,

1) Mehrere dieser Kurven, und zwar solche, die die eine der auferlegten Bedingungen erfüllen, ohne daß die Gerade durch drei Schnittpunkte mit c_{n_1} beziehungsweise c_{n_2} ein Teil von c_3 wird, lassen sich zwar direkt bestimmen und abzählen. Obige Bestimmung umfaßt aber auch solche, deren in gerader Linie liegende Schnittpunkte mit den beiden Kurven dem geradlinigen Teil von c_1 angehören.



die durch A, B, P und vier andere gegebene Punkte gehen und die Bedingungen $[c_{n_1}]$ und $[c_{n_2}]$ erfüllen. Um diese Zahl zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß durch A, B, P und fünf andere Punkte $(3n_1-2)(n_1-2)n_1$ Kurven c_3 gehen, die $[c_{n_1}]$ erfüllen, und von diesen bestehen $\frac{1}{6}n_1(n_1-1)(n_2-2)$ aus der Geraden AB und einem Kegelschnitt. Die Charakteristik μ_1 eines Systems von (im allgemeinen) nicht zusammengesetzten Kurven c_3, die durch A, B, P und vier andere Punkte gehen und $[c_{n_1}]$ erfüllen, ist also

(2) $$\mu_1 = (3n_1-2)(n_1-2)n_1 - \frac{1}{6}n_1(n_1-1)(n_1-2).$$

In diesem System gibt es im ganzen $\mu(3n_2-2)(n_2-2)n_2$ Kurven, die $[c_{n_2}]$ erfüllen; darunter sind jedoch solche Kurven inbegriffen, die aus der Geraden AB und einem Kegelschnitt bestehen, und dies wird mit jeder der μ_1 Kurven des Systems, die noch durch einen weiteren vierten Punkt Q der Geraden ABP geht, der Fall sein. Da eine solche $\frac{1}{6}n_2(n_2-1)(n_2-2)$-mal die Bedingung $[c_{n_2}]$ erfüllt, ist die gesuchte Zahl

$$\mu_1[(3n_2-2)(n_2-2)n_2) - \frac{1}{6}n_2(n_2-1)(n_2-2)]$$

oder

(3) $$[(3n_1-2)(n_1-2)n_1 - \frac{1}{6}n_1(n_1-1)(n_1-2)][(3n_2-2)(n_2-2)n_2 - \frac{1}{6}n_2(n_2-1)(n_2-2)].$$

Subtrahiert man diese Zahl von der in (1) angegebenen Zahl μ, so findet man, indem wir den Ausdruck so weit zusammenziehen, als es der Übersichtlichkeit nicht schadet,

(4) $$\lambda_1 = \frac{1}{18}n_1(n_1-2)n_2(n_2-2)[3(n_1-1)(3n_2-2) + 3(n_2-1)(3n_1-2) - 11(n_1-1)(n_2-1)].$$

Die Bestimmung der Anzahl λ_2 der Kurven c_3 des betrachteten Systems, die aus einer durch den Punkt A gehenden Geraden und dem Kegelschnitt durch die fünf übrigen gegebenen Punkte besteht, geschieht ganz auf dieselbe Weise; wir brauchen nur den Punkt, den wir P nannten, und hierauf den Punkt Q auf diesen Kegelschnitt legen; man erhält überall dieselben numerischen Ergebnisse. Der in (2) gefundene Wert von μ_1 wird auch die Charakteristik des Systems von (im allgemeinen) nicht zusammengesetzten Kurven c_3 sein, die durch die gegebenen sechs Punkte und den auf den genannten Kegelschnitt gelegten Punkt P gehen und $[c_{n_1}]$ erfüllen, und (3) wird die Anzahl der nicht zusammengesetzten Kurven c_3 angeben, die durch die genannten Punkte gehen und $[c_{n_1}]$ und $[c_{n_2}]$ erfüllen. Zieht man sodann diese Zahl von der Gesamtzahl der durch P gehenden Kurven c_3 des Systems ab, so findet man weiter für λ_2 denselben Wert (4) wie für λ_1, und die gesuchte Anzahl λ ist also $= 21\lambda_1$.

Die Anzahl der Kurven des Systems, die noch die Bedingung $[c_{n_3}]$ erfüllen, d. h. die Kurve c_{n_3} in drei in einer Geraden liegenden

Punkten schneiden, ist $\mu\ (3n_3 - 2)(n_3 - 2)n_3$, unter denen sich jedoch $\lambda \cdot \frac{1}{6} n_3 (n_3 - 1)(n_3 - 2)$ zusammengesetzte Kurven befinden. Die Anzahl der durch sechs gegebene Punkte gehenden, nicht zusammengesetzten Kurven c_3, die noch die Bedingungen $[c_{n_1}]$, $[c_{n_2}]$ und $[c_{n_3}]$ erfüllen, ist somit

$$\mu(3n_3 - 2)(n_3 - 2)n_3 - 21\lambda_1 \tfrac{1}{6} n_3 (n_3 - 1)(n_3 - 2),$$

also, wenn man die Werte (1) und (4) von μ und λ_1 einsetzt,

$$n_1(n_1 - 2)n_2(n_2 - 2)n_3(n_3 - 2)[(3n_1 - 2)(3n_2 - 2)(3n_3 - 2) - \tfrac{7}{12}(n_2 - 1)(n_3 - 1)(3n_1 - 2) - \tfrac{7}{12}(n_3 - 1)(n_1 - 1)(3n_2 - 2) - \tfrac{7}{12}(n_1 - 1)(n_2 - 1)(3n_3 - 2) + \tfrac{77}{36}(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)],$$

wo der eingeklammerte Ausdruck natürlich noch zusammengezogen werden kann.

Von diesem Werte ausgehend kann man nun in ähnlicher Weise die Anzahl der Kurven c_3 bestimmen, die durch fünf Punkte gehen und die vier Bedingungen $[c_{n_1}]$, $[c_{n_2}]$, $[c_{n_3}]$, $[c_{n_4}]$ erfüllen usw., und ebenso kann man verfahren, um ähnliche Bestimmungen von Kurven höherer Ordnung auszuführen, wenn auch möglicherweise die wirkliche Durchführung neue Schwierigkeiten bereiten kann. Es genügt uns jedoch an dem hier behandelten Beispiel das allgemeine Verfahren, das sich im großen und ganzen auch bei anderen Fällen von sukzessiver Einführung neuer Bedingungen anwenden läßt, gezeigt zu haben.

[162] Berührungsaufgaben. Zur Bestimmung der Anzahl der Kurven n^{ter} Ordnung, die durch gegebene Punkte gehen und mit gegebenen Kurven gewisse Berührungen gegebener Ordnung haben sollen, dient *Jonquières'* Formel [136]. Die unmittelbare Anwendung dieser Formel ergibt als eine solche Anzahl, die wenigstens die der gesuchten berührenden Kurven einbegreifen muß, das Produkt der Anzahlen der Kurven, die mit je einer der gegebenen die verlangten Berührungen haben und im übrigen durch gegebene Punkte gehen. Man muß sich aber — wie wir schon in [136] für die Berührungen mit einer einzelnen Kurve bemerkt haben — daran erinnern, daß *Jonquières'* Ausdruck schlechthin den Fall berücksichtigt, wo Schnittpunkte der gesuchten Kurve mit der gegebenen auf letzterer koinzidieren, was nicht immer eine eigentliche Berührung [158] ergibt. Zwar ist es erlaubt, die Koinzidenzen, die in den singulären Punkten oder Schnittpunkten der gegebenen Kurven stattfinden, als eine Art von Berührung aufzufassen und nachher die Anzahl der auf diese Weise entstehenden Lösungen abzuziehen; weiter ist zu bemerken, daß die gesuchte Kurve nur für besondere Lagen der gegebenen Punkte mehrfache Punkte auf einer der gegebenen Kurven haben wird; solche Fälle, in welchen also eine eigentliche Abhängigkeit stattfindet, können als Grenzfälle betrachtet werden. Von ganz anderer Art aber sind (vgl. [158]) die Koinzidenzen, die davon herrühren, daß die Kurve c_n in Teilkurven zer-

fällt, von welchen zwei zusammenfallen. Dies wird freilich für allgemeine Lagen der gegebenen Punkte, deren Anzahl wir t nennen werden, überhaupt nicht eintreten, so lange $t > \frac{1}{2}(n-2)(n+1)+2$ ist. Nimmt aber t diesen Wert an, so wird es Kurven c_n geben, die durch die gegebenen Punkte gehen und aus einer doppelten Geraden und einer Kurve von der Ordnung $n-2$ bestehen; die so entstehenden Lösungen sind dann besonders zu berücksichtigen. Ist endlich $t < \frac{1}{2}(n-2)(n+1)+2$, so wird es unendlich viele Kurven c_n mit einem doppelten Teile geben, und die Aufgabe, auf welche *Jonquières*' Formel abzielt, wird daher unendlich viele Lösungen haben, so daß diese Formel nicht mehr angewandt werden kann.

Der *Cayley-Brill*sche Korrespondenzsatz, der zu dieser Formel führte, läßt sich jedoch auch in diesem Falle anwenden. Nur muß man ihn lediglich auf die Schnittpunkte, beziehungsweise Berührungspunkte einer festen Kurve mit Kurven eines irreduziblen ∞^1-fachen Systems anwenden. Von diesem darf man nämlich annehmen, daß es nur eine endliche Anzahl von Kurven enthält, die auf andere Weise als durch eine eigentliche Berührung zu der neu einzuführenden Koinzidenz Anlaß geben; denn eine unendliche Anzahl solcher Kurven würde sich als ein selbständiges ∞^1-faches System ausscheiden lassen. Man findet also eine endliche Anzahl von Koinzidenzen, von welcher die Zahl der Koinzidenzen, die nicht die gesuchten eigentlichen Berührungen ergeben, nachher abzuziehen ist.

Suchen wir z. B. in einem gegebenen System von ∞^1 Kurven c_n mit der Charakteristik μ diejenigen, die eine Kurve c_{n_1} einfach berühren. Durch einen Punkt P_1 der letzteren Kurve gehen μ Kurven c_n, die c_{n_1} noch in $nn_1 - 1$ Punkten P_2 schneiden. Die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 wird

$$2\mu(nn_1 - 1) + 2\mu p_1$$

Koinzidenzen haben, wo γ_1 das Geschlecht der Kurve c_{n_1} ist. Hat diese Kurve e_1 Spitzen, so wird in jeder von diesen eine Koinzidenz ohne Berührung stattfinden. Solche gibt es auch in den Schnittpunkten der Kurve c_{n_1} mit den Örtern der mehrfachen Punkte aller Kurven c_n und mit den mehrfachen Teilkurven einzelner Kurven c_n, wenn es überhaupt im vorgelegten System Kurven dieser Art gibt, und zwar gibt es in jedem dieser Schnittpunkte eine von den Kurven c_{n_1} unabhängige Anzahl von Koinzidenzen. Die Gesamtzahl dieser Koinzidenzen wird also ein Produkt σn_1 der Ordnung n_1 mit einem nur vom System abhängigen Faktor σ sein. Die gesuchte Anzahl ξ ist daher, da $2(p_1 - 1) = e_1 + n_1' - 2n_1$ ist,

(1) $\xi = 2\mu(nn_1 - 1) + 2\mu p_1 - e_1\mu - \sigma n_1 = \mu(2n_1(n-1) + n_1') - \sigma n_1.$

Die Zahl σ wird in jedem vorliegenden Falle aus einer Untersuchung des Systems hervorgehen. Ihre Unabhängigkeit von der Kurve c_{n_1} kann



aber zu einer Vereinfachung der Formel selbst benutzt werden. Ersetzt man nämlich c_{n_1} durch eine Gerade, so wird ξ die Anzahl der Kurven des Systems sein, die eine Gerade berühren. Diese Zahl, die wir mit μ' bezeichnen, wird die zweite Charakteristik des Systems genannt [17].

Man findet also durch Einsetzen von $n_1 = 1$, $n_1' = 0$

$$\mu' = 2\mu(n-1) - \sigma,$$

und (1) wird somit durch

$$(2) \qquad \xi = \mu n_1' + \mu' n_1$$

ersetzt. Dieses Resultat haben wir schon in [29] und [79] bewiesen, und zwar so, daß es seine Gültigkeit behält, wenn die Kurve c_{n_1} auch andere singuläre Punkte als Doppelpunkte und Spitzen hat. Auch bei der hier vorliegenden Beweisführung ließen sich übrigens leicht mehrfache Elemente berücksichtigen.

[163] Kurven c_n eines ∞^2-fachen Systems, die mit einer gegebenen c_{n_1} Berührung zweiter Ordnung haben. Durch (μ^2), $(\mu\mu')$, (μ'^2) werden wir hier und im folgenden die Anzahlen der Kurven des ∞^2-fachen Systems bezeichnen, die beziehungsweise durch zwei Punkte gehen, durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren, oder zwei Gerade berühren; durch ϑ die Anzahl derjenigen, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berühren; weiter durch δ und ε die Anzahlen derjenigen, die einen ihrer Doppelpunkte beziehungsweise Spitzen in einem gegebenen Punkte haben, und durch δ' und ε' die Anzahlen derjenigen, von welchen eine Doppeltangente beziehungsweise eine Wendetangente eine gegebene Lage hat. Alle diese in [163] und in [164] vorkommenden Zahlen führen wir schon hier an, wenn auch bei der Herleitung der Formeln [163] (1) und [164] (1) ein punktgeometrischer Ausgangspunkt benutzt wird und also im allgemeinen $\delta = \varepsilon = 0$ ist. Weiter betreffen die Formeln, in die δ, δ', ε, ε' eingehen, unmittelbar nur den Fall, in dem für eine beliebige Kurve des Systems die genannten singulären Punkte oder Tangenten nur einzelweise vorkommen und nicht zu höheren Singularitäten sich vereinigt haben.

Wir werden nun zunächst den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz auf die Korrespondenz zwischen einem Berührungspunkt P_1 einer Kurve des ∞^2-fachen Systems mit c_{n_1}, der wir vorläufig nur *Plücker*sche Singularitäten beilegen, und den $nn_1 - 2$ Schnittpunkten P_2 derselben Kurve mit c_{n_1} anwenden. Einem Punkte P_1 entsprechen $\vartheta(nn_1 - 2)$ Punkte P_2. Durch einen Punkt gehen [162] $n_1'(\mu^2) + n_1(\mu\mu')$ Kurven c_n, die c_{n_1} berühren; ist der Punkt ein Punkt P_2 dieser Kurve selbst, so werden von diesen 2ϑ den Berührungspunkt in P_2 haben; die Berührungspunkte der $n_1'(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 2\vartheta$ übrigen werden die dem Punkte P_2 entsprechenden Punkte P_1 sein. Die Wertigkeit der Korrespondenz ist 2ϑ. Die Anzahl der Koinzidenzen ist also

$$\vartheta(nn_1 - 2) + n_1'(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 2\vartheta + 4\vartheta p.$$

Koinzidenzen finden erstens in den η Punkten statt, in denen c_{n_1} mit einer c_n eine Berührung zweiter Ordnung hat, sodann ϑ in jeder der e_1 Spitzen der Kurve c_{n_1}. Wenn alle Kurven c_n Doppelpunkte, Spitzen oder andere singuläre Punkte haben, so werden Koinzidenzen auch dadurch entsteben, daß die Berührung eben in einem solchen Punkte stattfindet. Andere Koinzidenzen können anch hier davon herrühren, daß Kurven c_n doppelte oder mehrfache Teilkurven haben. Dabei sind nicht alle dem ∞^2-fachen Systeme angehörigen Kurven dieser Art zu berücksichtigen, sondern nur solche, die, als Grenzkurven betrachtet, dem Systeme der ∞^1 Kurven angehören, die c_{n_1} schon einmal berühren. Die Anzahl dieser von singulären Punkten der Kurven des Systems und von singulären Kurven herrührenden Lösungen ist also eine endliche; und sie lassen sich in jedem vorgelegten Falle auffinden und nach bereits bekannten Regeln abzählen. Nennen wir diese Anzahl $\sum$, so findet man

$$(1) \qquad \eta = \vartheta(nn_1 - 2) + n_1'(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 2\vartheta + 4\vartheta p_1 - e_1\vartheta - \sum.$$

Während die Anwendung dieses Verfahrens in bestimmt vorliegenden Fällen bequem sein mag, kann man durch eine andere Charakterisierung des ∞^2-fachen Systems auch eine einfachere Formel erlangen, in der schärfer zwischen dem Einfluß des Systems und dem der Kurven c_n unterschieden wird. Bei der Herleitung von (1) war auch zunächst an eine punktgeometrische Darstellung der Kurven des Systems gedacht, und der Einfluß etwaiger Spitzen dieser Kurven mit gegebener Lage müßte demgemäß als ein Grenzfall behandelt werden. Jetzt werden wir aber auf eine zu sich selbst dualistische Bestimmung abzielen und müssen also sogleich den Kurven des Systems sowohl Spitzen als auch Wendetangenten beilegen. Hier werden wir daher auch die Bezeichnung ε (s. o.) zur Anwendung bringen können.

Den gesuchten neuen Ausdruck erlangt man am leichtesten durch Benutzung der auf eine n_1-fache Gerade g reduzierten Kurve von der Ordnung n_1, die wir in [29] beim Beweise der eben erwähnten Formel $n_1\mu' + n_1'\mu$ anwandten. Diese Kurve hat n_1' Scheitel, d. h. solche Punkte, in welchen c_{n_1} jede durch sie gehende Kurve berührt. Ein solcher Punkt bildet einen Übergang zwischen zwei der n_1 mit g zusammenfallenden Zweige der Kurve. Eine ähnliche Verbindung findet auch in den Spitzen derselben Kurve c_{n_1} statt und überhaupt in solchen singulären Punkten, in welchen diese Kurve mehrfache Elemente hat. Berührung zweiter Ordnung mit dieser Grenzkurve, und zwar mit allen ihren n_1 Zweigen, haben erstens die ε' Kurven c_n, die g als Wendetangente haben, was $n_1\varepsilon'$ Auflösungen ergibt. Die übrigen Berührungen zweiter Ordnung müssen dadurch entstehen, daß ein Element der Grenzkurve c_{n_1} und ein Element einer Kurve c_n mit demselben Mittelpunkt wenigstens zwei Schnittpunkte mehr haben, als aus den etwaigen Multiplizitäten der Elemente folgt. Dies wird außer in dem bereits genannten

Fall nur dann eintreten können, wenn eine Kurve c_n entweder in einem Scheitel der Grenzkurve oder in einer Spitze (oder im Mittelpunkt eines anderen mehrfachen Elementes von c_{n_1}, wenn es solche gibt) entweder g berührt oder selbst da eine Spitze hat. Zwar ist nicht jede so bestimmte Kurve c_n eine solche, die mit unserer Grenzkurve c_{n_1} Berührung zweiter Ordnung hat. Da es jedoch keine andere Möglichkeiten gibt und da wir, wie schon bemerkt, den Kurven c_n hier keine anderen (punktgeometrisch) mehrfachen Elemente als Spitzen beilegen, so wissen wir wenigstens, daß die gesuchte Anzahl ein Ausdruck von der Form

$$\eta = n_1 \varepsilon' + \alpha \vartheta + \beta \varepsilon$$

ist, wo α und β allein von der Anzahl und der Natur der Singularitäten der gegebenen Kurve c_{n_1} abhängen. Durch Anwendung der Grenzform für die letztere Kurve, die der eben benutzten n_1-fachen Geraden dualistisch entspricht, findet man, daß $\beta = n_1'$ ist. Da weiter der Koeffizient α allein von der gegebenen Kurve c_{n_1} abhängt, kann man ihn durch Anwendung eines speziellen Systems finden. Dazu bietet sich das System der durch drei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitte von selbst dar. Für dieses hat man nämlich $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $\vartheta = 1$ und findet also $\eta = \alpha$. Somit ist α die Anzahl der durch drei Punkte gehenden Kegelschnitte, die mit der Kurve c_{n_1} eine Berührung zweiter Ordnung haben. In [80] haben wir gesehen, was übrigens auch aus der vorgenannten Formel (1) oder aus der folgenden Theorie der Systeme von Kegelschnitten hervorgehen wird, daß $\alpha = 3n_1' + e_1$ ist, wo $e_1 = \Sigma(\nu_1 - 1)$ die *Plücker*sche Anzahl der Spitzen bedeutet (so daß c_{n_1} hier allerlei Singularitäten haben könnte). Durch Einsetzen dieser Werte findet man[1])

$$\eta = n_1 \varepsilon' + n_1' \varepsilon + (3n_1' + e_1)\vartheta. \tag{2}$$

Anmerkung. Wie der Ausdruck $n_1'\mu + n_1\mu'$ für die einfach berührenden Kurven eines Systems, ist auch dieser Ausdruck von der Ordnung der Kurven des Systems unabhängig und beide lassen sich auch dann anwenden, wenn das System durch eine algebraische Differentialgleichung definiert wird, also im allgemeinen aus transzendenten Kurven besteht. Die Differentialgleichung muß im ersteren Falle erster Ordnung sein, μ ist ihr Grad in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$, μ' der Grad der Gleichung in x, die man durch Einsetzen von $y = ax + b$, $\frac{dy}{dx} = a$ erhält. Im letzteren Fall muß sie zweiter Ordnung sein, ϑ ist ihr Grad in $\frac{d^2y}{dx^2}$, ε' der Grad jener Gleichung in x, die man erhält, wenn man $y = ax + b$, $\frac{dy}{dx} = a$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ setzt, und ε der Grad jener Gleichung in $\frac{dy}{dx}$, die man er-

1) Diese Formel ist zuerst von *Halphen* aufgestellt worden. Bulletin de la Société Mathématique de France V. (1876), p. 14.

hält, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ setzt. Der Wert von $n'_1\mu + n_1\mu'$, beziehungsweise der durch (2) bestimmte Wert von η, wird dann die Anzahl der Punkte der Kurve c_{n_1} sein, in welchen die Koordinaten und die daraus bestimmten Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die gegebene Differentialgleichung befriedigen.

[164] Kurven c_n eines ∞^2-fachen Systems, die mit einer gegebenen c_{n_1} zwei Berührungen haben. Je nach dem verschiedenen Zweck kann man auch hier, wie in [163], auf doppelte Weise verfahren.

Sind P_1 und P_2 zwei Schnittpunkte einer Kurve c_n, die c_{n_1} in einem Punkte P_3 berührt, so ist die Anzahl der einem Punkt $P_1(P_2)$ entsprechenden Punkte $P_2(P_1)$

$$(n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 2\vartheta)(nn_1 - 3).$$

Die zusammengesetzte Kurve, die die einem Punkte P_1 entsprechenden Punkte P_2 bestimmt, hat $n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 2\vartheta$ Schnittpunkte in P_1 nnd 2 in jedem dem Punkte P_1 entsprechenden Punkte P_3. Da nun, wie wir in [163] sahen, die Korrespondenz zwischen den Punkten P_1 und P_3 die Wertigkeit 2ϑ hat, so wird nach [119] die Korrespondenz zwischen P_1 und P_2 die Wertigkeit

$$n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 6\vartheta$$

haben. Diese Korrespondenz hat also

$$(n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu'))(2nn_1 - 6 + 2p_1) - 2\vartheta(2nn_1 - 6 + 6p_1)$$

Koinzidenzen. Von diesen fallen 2ζ in die Berührungspunkte der ζ Kurven des ∞^2-fachen Systems, die c_{n_1} zweimal berühren. Durch jede der e_1 Spitzen der Kurve c_{n_1}, werden $n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu') - 3\vartheta$ Kurven[1]) des Systems gehen, die c_{n_1} noch in einem weiteren Punkte berühren. Von den gefundenen Koinzidenzen fallen daher ebensoviele in die Spitzen. Bezeichnen wir noch die Koïnzidenzen, die von singulären Punkten und singulären Kurven im System herrühren, und die in jedem vorliegenden Falle aufzusuchen und abzuzählen sind, mit Ω, so erhält man

(1) $$2\zeta = (n'_1(\mu^2) + n_1(\mu\mu'))(2nn_1 - 6 + 2p_1 - e_1) - \vartheta(4nn_1 - 12 + 12p_1 - 3e_1) - \Omega.$$

Einen übersichtlicheren Ausdruck werden wir auch hier durch Benutzung des Falles finden können, in dem die Kurve c_{n_1} in eine n_1-fache Gerade g ausgeartet ist. Die folgenden Kurven des Systems werden dann Grenzlagen der zweimal berührenden Kurven sein:

1. die $\frac{1}{2}n'_1(n'_1 - 1)(\mu^2)$, die durch zwei der n'_1 Scheitel der ausgearteten Kurve gehen;

1) Die hier benutzten, von der Spitze herrührenden Koeffizienten sind dieelben, die man erhält, wenn die Kurven c_n Gerade sind [123].



2. die $n'_1((\mu\mu') - 2\vartheta)$, die durch einen Scheitel gehen und g in einem anderen Punkte berühren; sie sind je n_1-mal zu zählen, weil sie jeden der zusammenfallenden Zweige berühren können;

3. die δ' Kurven, die g zweimal berühren, je n_1^2-mal gezählt;

4. die ϑd_1 Kurven, die g in einem Doppelpunkte der ausgearteten Kurve berühren;

5. die $\vartheta n'_1$ Kurven, die g in einem Scheitel der ausgearteten Kurve berühren; sie sind je $2(n_1 - 2)$-mal zu zählen, weil sie die $n_1 - 2$ Zweige, auf denen der Scheitel nicht liegt, berühren;

6. die $n'_1\delta$ Kurven, die einen Doppelpunkt in einem Scheitel haben;

7. und 8. die ε' Kurven, die mit g Berührung zweiter Ordnung haben und diejenigen, die auf g einen neugebildeten Doppelpunkt haben; ihre Anzahl ist je mit $\frac{1}{2}n_1(n_1 - 1)$ zu multiplizieren, weil sie als Berührungskurven zweier der n_1 zusammenfallenden Zweige zu betrachten sind, und noch dazu mit Zahlenkoeffizienten, deren Bestimmung sich jedoch als überflüssig erweisen wird.[1])

Man hat also

$$\zeta = \tfrac{1}{2}n'_1(n'_1 - 1)(\mu^2) + n'_1 n_1((\mu\mu') - 2\vartheta) + n_1^2\delta' + d_1\vartheta$$
$$+ 2n'_1(n_1 - 2)\vartheta + n'_1\delta + \tfrac{1}{2}n_1(n_1 - 1)\alpha,$$

wo α eine Größe ist, die allein vom System und nicht von der Kurve c_{n_1} abhängt.

Wenden wir nun diese Formel auf den Fall an, wo c_{n_1} aus zwei geraden Linien besteht, wo also $\zeta = (\mu'^2) + 2\delta'$, $n_1 = 2$, $n'_1 = 0$, $d_1 = 1$ ist, so findet man

$$(\mu'^2) = 2\delta' + \vartheta + \alpha. \tag{2}$$

Bestimmt man α hieraus, so ergibt sich nach einer Reduktion mittels der *Plücker*schen Formeln

$$\zeta = \tfrac{1}{2}n'_1(n'_1 - 1)(\mu^2) + n'_1 n_1(\mu\mu') + \tfrac{1}{2}n_1(n_1 - 1)(\mu'^2)$$
$$+ n'_1\delta + n_1\delta' - \tfrac{3}{2}(3n'_1 + e_1)\vartheta. \tag{3}$$

[165] Zusammensetzung der zu mehrgliedrigen Ausdrücken führenden Bedingungen. Ausdrücke von der Form $\alpha\mu + \alpha'\mu'$. Wenn auch weniger einfach, als in den Fällen, in welchen jede neue Bedingung zu einem Faktor in der Anzahl der durch diese und andere Bedingungen bestimmten Kurven Anlaß gab [160], lassen sich auch solche mehrgliedrige, durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzte Ausdrücke wie die in [161]—[164] gefundenen zur sukzessiven Einführung verschiedener einfacher oder mehrfacher Be-

---

1) Durch Anwendung der Formel (2) auf ein System von Kegelschnitten und auf Kurven dritter Ordnung, die durch beziehungsweise 3 und 7 Punkte gehen und einen Kegelschnitt zweimal berühren, findet man übrigens, daß der erste dieser Koeffizienten 3, der letzte 1 ist (vgl. [158].)

dingungen anwenden. Sucht man zum Beispiel eine Kurve c_n, die mit einer gegebenen Kurve c_{n_1} Berührung zweiter Ordnung hat, eine andere c_{n_2} zweimal einfach berührt und außerdem $\frac{1}{2}n(n+3)-4$ andere Bedingungen, die wir mit B bezeichnen wollen, erfüllt, so kann man zunächst die Anzahl der Lösungen durch [163] (2) ausdrücken. ε', ε und ϑ bezeichnen dann die Anzahl der Kurven c_n, die c_{n_2} zweimal berühren, die Bedingungen B erfüllen und beziehungsweise eine Wendetangente in gegebener Lage, eine Spitze in gegebener Lage haben oder eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren. Diese drei Anzahlen sind weiter durch [164] (3) zu bestimmen. Bei der Bestimmung von ε' sind hierbei die in diese Formel eingehenden Zahlen $(\mu^2) \ldots \vartheta$ die Anzahlen der Kurven, die die Bedingungen B erfüllen, eine Wendetangente in gegebener Lage haben und beziehungsweise noch durch zwei Punkte gehen, ..., eine Gerade in einem gegebenen Punkte berühren; ebenso werden die in der Formel [163] (2) auftretenden Zahlen ε und ϑ bestimmt.

In den Fällen, in denen nur solche verschiedene einfache Bedingungen zu beachten sind, die sich, wie die Berührung mit einer gegebenen Kurve (s. [162] (2)), je für sich durch den zweigliedrigen Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ einführen lassen, wo α und α' nur von der betreffenden Bedingung abhängen, während μ und μ' die Charakteristiken des die übrigen Bedingungen erfüllenden Systems von ∞^1 Kurven sind, kann man auf diese Weise einen allgemeinen Ausdruck für die Anzahl der Kurven, die solche verschiedene Bedingungen erfüllen, aufstellen. Dieser Ausdruck läßt sich am leichtesten als ein symbolisches Produkt schreiben. Sind $\alpha_1\mu+\alpha'_1\mu'$, $\alpha_2\mu+\alpha'_2\mu', \ldots, \alpha_r\mu+\alpha'_r\mu'$ die Anzahlen der Kurven eines willkürlichen ∞^1-fachen Systems, die beziehungsweise die eine, die zweite ..., die r^{te} von gewissen gegebenen Bedingungen befriedigen, so wird man die Anzahl der Kurven, die gleichzeitig alle die Bedingungen erfüllen und einem gegebenen ∞^r-fachen System angehören, symbolisch durch das Produkt

$$(\alpha_1\mu + \alpha'_1\mu')(\alpha_2\mu + \alpha'_2\mu') \ldots (\alpha_r\mu + \alpha'_r\mu')$$

ausdrücken können, wenn man nach der Multiplikation mit $\mu^s\mu'^t$, wo $s+t=r$ ist, die Anzahl der Kurven des System bezeichnet, die durch s gegebene Punkte gehen und t gegebene gerade Linien berühren. Dies ist nämlich richtig, wenn $r=1$ ist, und die Einführung einer neuen Bedingung durch die Formel $\alpha_{r+1}\mu+\alpha'_{r+1}\mu'$ zeigt, daß, wenn es für einen Wert r richtig ist, es auch für $r+1$ richtig sein wird. Wenn $r=\frac{1}{2}n(n+3)$ ist, so wird die ganze Anzahl allein von den die Bedingungen charakterisierenden Zahlen α und α' und den Anzahlen der Kurven n^{ter} Ordnung, die lediglich durch gegebene Punkte und gegebene Tangenten bestimmt sind, abhängen. Die Bestimmung letzterer Zahlen,

die für $n=2$ bekannt ist (siehe [80] und [172]), hat man daher auch für $n=3$ und $n=4$ unternommen[1]).

Wie schon bemerkt, ist diese Methode besonders auf die Fälle anwendbar, in denen die vorgelegten Bedingungen in einfachen Berührungen mit gegebenen Kurven bestehen, indem dann $\alpha_1 = n_1'$, $\alpha_1' = n_1$ ist; im übrigen gibt es auch andere Bedingungen, die man auf diese Weise einführen kann (Beispiele auch für Kurven höherer Ordnung finden sich in [171]). Man darf aber keineswegs annehmen, daß die Anzahl der Kurven eines ∞^1-fachen Systems, die einer neuen einfachen Bedingung unterworfen sind, im allgemeinen durch $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ ausdrückbar ist. Diese Unmöglichkeit beruht nicht allein darauf, daß Kurven von einer höheren als der zweiten Ordnung entweder mehrfache Punkte oder mehrfache Tangenten haben, und daß die sich auf diese beziehenden Bedingungen zu anderen Ausdrücken führen. Auch solche Bedingungen, wie z. B. die in [161] behandelten, lassen sich nicht auf die genannte Weise einführen. Wir fanden nämlich, daß die Anzahl der Kurven c_n eines durch solche Bedingungen und gegebene Punkte bestimmten ∞^1-fachen Systems, die noch eine weitere Bedindingung derselben Art erfüllen, nur so lange die Form $\alpha\mu$ hat, als die Anzahl der gegebenen Punkte $> \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + 2$ ist. In [163] erfuhren wir dagegen, daß μ' und also auch $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ ein Multiplum von μ bleibt, so lange die Anzahl der gegebenen Punkte nur $> \frac{1}{2}(n-2)\ (n+1) + 2$ ist. Der Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ läßt sich also jedenfalls nicht auf die Fälle anwenden, in denen die Anzahl der gegebenen Punkte zwischen diesen Grenzen liegt.

Für Systeme von Kegelschnitten spielt der Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ jedoch auch für andere Aufgaben als Berührungsaufgaben eine hervorragende Rolle und die Ausnahmefälle, in denen die Anzahl der Lösungen sich nicht so ausdrücken läßt, geben sich durch einfache Kennzeichen kund. Zur Bestimmung der Kegelschnitte bieten sich auch einfache und weitreichende Methoden dar. Daher werden wir die Systeme von Kegelschnitten einer besonderen Behandlung unterziehen.

[166] Übungsaufgaben.

1. Inwiefern gilt das in [161] gefundene Hauptresultat auch für $n=2$, $s=1$?

2. In einer Ebene sind dreimal 3 Gerade gegeben. Wie viele Kurven dritter Ordnung kann man durch sechs gegebene Punkte legen, die jedes dieser Tripel in verschiedenen Punkten schneiden, die auf unter sich verschiedenen Geraden liegen?

---

1) Sie ist aber zu weitläufig, als daß sie hier aufgenommen werden könnte. Wir begnügen uns daher auf diese Bestimmungen in *Zeuthen*, Systemer af plane Kurver (Det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 5 Räkke naturv. math. Afd. Bd. 10. S. 375—393) zu verweisen. Für $n=3$ hatte *Maillard* die Resultate früher gefunden.



3.* Eine nach den vorliegenden Umständen mehr oder weniger weitgehende Fortsetzung der in [161] angefangenen Untersuchungen über die Bestimmung von Kurven dritter Ordnung wird gewünscht.

4. Suche die Anzahl der Kurven dritter Ordnung, die zwei gegebene Kegelschnitte berühren, eine gegebene Kurve dritter Ordnung in drei in einer Geraden liegenden Punkten schneiden und durch sechs gegebene Punkte gehen.

5. Suche die Anzahl der Kurven dritter Ordnung, die durch vier gegebene Punkte gehen und fünf gegebene Kegelschnitte berühren.

b) Systeme von Kegelschnitten.

[167] Entartete Kegelschnitte. Die im vorigen Abschnitte betrachteten Einschränkungen der Anwendungen der Formel $\alpha\mu$ waren bei der punktgeometrischen Darstellung besonders (aber nicht ausschließlich, s. [161]) dadurch veranlaßt, daß alle Kurven eines Systems Doppelpunkte oder mehrfache Punkte hatten, oder daß im System Kurven mit mehrfachen Teilkurven auftraten. Im ersten Fall rührt die Einschränkung einfach davon her, daß ein System von Kurven c_n, denen man einen Doppelpunkt beilegt, schon dadurch einer anderen anzahlgeometrischen Definition unterworfen ist, als wenn man einfach von Kurven n^{ter} Ordnung spricht; die anzahlgeometrischen Resultate werden sich dadurch auch gewöhnlich verschiedentlich gestalten. Die zweite Einschränkung rührt davon her, daß eine Kurve mit einer mehrfach zählenden Teilkurve durch ihre Gleichung in Punktkoordinaten nicht vollständig dargestellt ist, wenn man sie als Grenzkurve auffaßt; und diese Auffassung ist notwendig, wenn sich die Frage erhebt, ob sie einem gegebenen System wirklich angehört oder nicht, oder wie weit eine gegebene Bedingung als von ihr erfüllt zu betrachten ist. Dies wird namentlich von der Lage der sogenannten Scheitel abhängen, d. h. solcher Punkte auf dem mehrfachen Zweige, in denen die durch einen solchen gehenden Kurven nicht nur die zusammengesetzte Kurve c_n mehrfach schneiden, sondern auch diese Kurve berühren, wenn man sie als Grenzkurve auffaßt. Man kann sagen, daß in diesen Scheiteln die sonst nur zusammenfallenden Zweige der mehrfach zählenden Teilkurven zusammenhängen. Über die Lage dieser Scheitel auf der Teilkurve sagt die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten gar nichts aus, während dagegen die linken Seiten ihrer Gleichungen als Faktoren der linken Seite der Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten auftreten werden.

Diese Verhältnisse, sowie die dualistisch entsprechenden, werden sich einfach gestalten, wenn wir uns auf Systeme von Kegelschnitten beschränken. Für diese läßt sich eine vollständige und zu sich selbst dualistische Theorie aufstellen, die alle möglichen, etwa vorkommen-

den Fälle berücksichtigt. Damit wird auch die Bahn frei für solche Untersuchungen, die Kurven höherer Ordnung betreffen, wenn es auch schwierig sein würde, für diese allgemeine Sätze aufzustellen.

Da ein Kegelschnitt mit Doppelpunkt aus zwei Geraden zusammengesetzt ist, brauchen wir uns hier nicht um solche Systeme zu kümmern, in denen alle Kurven Doppelpunkte haben: diese würden nur Systeme von Geraden sein, und die dualistisch entsprechenden Systeme nur Systeme von Punkten. Dagegen können die Systeme von ∞^1 durch vier Bedingungen bestimmten Kegelschnitten folgende Ausartungen darbieten:

1. Kegelschnitte, die sich, als Punktörter betrachtet, auf eine zweifach zählende Gerade, dagegen als Umhüllungskurven ihrer Tangenten betrachtet, auf zwei auf dieser Geraden liegende Punkte reduzieren. Ein solcher „abgeplatteter" Kegelschnitt ist, wenn nur die zwei Punkte (Scheitel) nicht zusammenfallen, vollständig bestimmt durch seine Gleichung in Linienkoordinaten, aber nur teilweise durch seine Gleichung in Punktkoordinaten.

2. Kegelschnitte, die als Punktörter betrachtet aus zwei Geraden bestehen, sich aber als Umhüllungskurven ihrer Tangenten auf den doppelt zu zählenden Schnittpunkt dieser Geraden reduzieren. Ein solcher Kegelschnitt ist, wenn die zwei Geraden nicht zusammenfallen, völlig bestimmt durch seine Gleichung in Punktkoordinaten, nicht aber durch seine Gleichung in Linienkoordinaten.

3. Eine dritte entartete Form von Kegelschnitten (die *Halphen*schen Ausartungen[1]) kann auch auftreten, die als Punktort betrachtet eine Doppelgerade, als Einhüllende betrachtet ein doppelt zu zählender Punkt dieser Geraden ist. Sie darf, wenn wir allein diese Erzeugungsarten beachten, als ein Spezialfall jeder der eben genannten zwei Formen betrachtet werden, für den beziehungsweise die zwei Scheitel oder die zwei Geraden zusammenfallen, und wird insofern bestimmt, wenn man sowohl ihre Gleichung in Punktkoordinaten als auch ihre Gleichung in Linienkoordinaten kennt. Doch kann, wie wir sehen werden, diese Ausartung als Grenzform, und darauf kommt es bei unserer Anzahlbestimmung an, in einer Gestalt auftreten, so daß diese beiden Gleichungen zu ihrer völligen Charakterisierung nicht genügen und auf diesem Umstand wird ihr Vorkommen auch in Systemen mit vier gegebenen Bedingungen beruhen.

Außer den Charakteristiken eines ∞^1-fachen Systems μ und μ' führen wir noch zwei Bezeichnungen ein. λ umfaßt alle Kegelschnitte des Systems, die punktgeometrisch in Doppelgerade ausgeartet sind, also sowohl die Ausartungen erster Art als auch die *Halphen*schen Aus-

---

1) *Halphen* war der erste, der die Notwendigkeit bemerkte, diese Ausnahmekurven besonders und nicht nur als Spezialfälle der zwei ersten Arten zu beachten.

artungen, λ' alle Kegelschnitte des Systems, die liniengeometrisch in Doppelpunkte ausgeartet sind, also sowohl die Ausartungen zweiter Art als auch die *Halphen*schen Ausartungen. Wendet man das Korrespondenzprinzip an, um zusammenfallende Schnittpunkte eines Kegelschnitts des Systems mit einer gegebenen Geraden oder zusammenfallende Tangenten durch einen gegebenen Punkt zu finden, so erhält man die einander dualistisch entsprechenden Formeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda = 2\mu - \mu', \\ \lambda' = 2\mu' - \mu, \end{cases}$$

wenn wir nur die Regeln, die angeben, wievielmal jeder ausgeartete Kegelschnitt in λ und λ' mitzuzählen ist, in Übereinstimmung mit den Regeln für die Abzählung der durch das Korrespondenzprinzip gefundenen Koinzidenzen [105] bringen. Wir erhalten dann die folgende Regel für die Abzählung von λ: Sei A der Schnittpunkt einer dem Systeme angehörigen Doppelgeraden mit einer beliebigen Geraden g, P ein Punkt dieser Geraden, dessen Abstand von A unendlich klein erster Ordnung ist, P' der andere Schnittpunkt eines durch P gehenden Kegelschnittes des Systems mit g, so wird die Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Größen PP' angeben, wievielmal die Doppellinie in λ mitzuzählen ist. Die dualistisch entsprechende Regel wird zur Abzählung von λ' dienen. — Wir bemerken, daß wir die *Halphen*schen Ausartungen nicht durch eine besondere Bezeichnung haben ausscheiden können, weil eine solche Ausartung mit verschiedenen Koeffizienten in λ und λ' vorkommen kann.

[168] Einführung einer fünften Bedingung. Um die Kegelschnitte zu finden, die einem gegebenen ∞^1-fachen Systeme angehören und noch eine weitere unabhängige Bedingung B erfüllen, werden wir vorläufig solche Kegelschnitte c_2 des Sytems suchen, die eine gegebene Gerade g in demselben Punkt schneiden, wie ein Kegelschnitt c_2', der die gegebene Bedingung erfüllt und außerdem einen gegebenen Kegelschnitt k_2 in denselben Punkten wie c_2 schneidet. Wir benutzen dazu das Korrespondenzprinzip. Durch einen Punkt P der Geraden g gehen μ Kegelschnitte c_2 des Systems, die also auf k_2 μ Gruppen von vier Punkten ausschneiden. Bezeichnen wir durch β die Anzahl der Kegelschnitte eines Büschels, die die Bedingung B erfüllen, so wird man durch diese μ Gruppen $\mu\beta$ Kegelschnitte c_2' legen können. Jeder schneidet die Gerade g in zwei Punkten P'. Einem Punkte P entsprechen also $2\mu\beta$ Punkte P'. Um die Anzahl der einem Punkte P' entsprechenden Punkte P zu finden, muß man fürs erste wissen, wieviele Kegelschnitte c_2' durch einen Punkt P' gehen. Durch Betrachtung des Grenzfalles, in dem dieser Punkt auf dem festen Kegelschnitte k_2 liegt, findet man, daß diese Anzahl $\mu\beta$ ist. Der einem solchen Kegelschnitte c_2' entsprechende Kegelschnitt c_2 wird g in zwei Punkten schneiden. Einem

Punkte P' entsprechen also auch $2\mu\beta$ Punkte P. Die Anzahl von Punkten der Geraden g, durch welche Paare entsprechender Kegelschnitte c_2 und c_2' gehen, ist somit $4\mu\beta$. Unter diesen sind offenbar die Schnittpunkte der geraden Linie g mit k_2 je $\mu\beta$-mal zu zählen. Die durch die übrigen $2\mu\beta$ Koinzidenzpunkte gehenden und k_2 in denselben vier Punkten schneidenden Kegelschnitte c_2 und c_2' müssen zusammenfallen, insofern man sie nur punktgeometrisch auffaßt. Da weiter solche zusammenfallenden Kegelschnitte durch zwei der Koinzidenzpunkte gehen, so erhält man $\beta\mu$ solche zusammenfallende Kegelschnitte c_2 und c_2'.

Wenn nun alle die gefundenen Kegelschnitte durch die angewandten punktgeometrischen Bestimmungen vollständig bestimmt sind, so ergeben sie je eine Lösung der Aufgabe, die also in diesem Falle $\beta\mu$ Lösungen hat (vgl. [160]). Die genannte Bedingung ist aber nicht in gleicher Weise erfüllt, wenn der Kegelschnitt c_2 des Systems eine Doppelgerade d ist und mit ihm eine Doppelgerade zusammenfällt, die die Bedingung B erfüllt. Denn um diese zu erfüllen, muß dieser ausgeartete Kegelschnitt c_2' im allgemeinen andere Scheitel haben als der entsprechende, punktgeometrisch mit ihm zusammenfallende Kegelschnitt c_2.

Die Scheitel einer solchen Doppelgeraden c_2' werden durch die Forderungen bestimmt, daß sie einer gegebenen Involution angehören — nämlich, weil c_2, c_2' und k_2 einem Büschel angehören, derjenigen, die durch die Scheitel des mit d zusammenfallenden Grenzkegelschnittes c_2 und durch die Schnittpunkte von d und k_2 bestimmt wird —, und daß der Grenzkegelschnitt c_2' noch die Bedingung B erfüllt. Da wir keine im voraus gegebene Abhängigkeit zwischen dem System und der Bedingung B voraussetzen, so ist also dieser abgeplattete Kegelschnitt c_2' ein solcher, der mit einer beliebigen Geraden zusammenfällt und dessen Scheitel sowohl einer beliebigen Involution angehören als auch so liegen, daß der Kegelschnitt c_2' die Bedingung B erfüllt. Die Anzahl α' solcher Kegelschnitte hängt daher ausschließlich von der gegebenen Bedingung ab. (Sie wird null, wenn die Bedingung B sich überhaupt nicht durch eine beliebig belegene Doppelgerade befriedigen läßt.)

Natürlich kann man die das System und die Bedingung B bestimmenden Parameter so wählen, daß die entsprechenden abgeplatteten Kegelschnitte c_2 und c_2' dieselben Scheitel bekommen. In diesem Falle, der sich eben, weil er von kontinuierlich variierenden Parameterwerten abhängt, als ein Grenzfall betrachten läßt (vgl. [158]), muß man den so bestimmten ausgearteten Kegelschnitt unter die Lösungen der gestellten Aufgabe mitzählen und erst dadurch wird der allgemeine Ausdruck der gesuchten Anzahl auch auf diesen Fall anwendbar (vgl. [9]). Es gibt aber auch einen besonderen Fall, in welchem die Scheitel der ausgearteten Kegelschnitte c_2 und c_2' wegen besonderer Eigenschaften einerseits des Systems, andererseits der Bedingung B, ohne von einer Be-

ziehung zwischen ihren Parametern abzuhängen, zusammenfallen, und dieser Fall läßt sich nicht als ein Grenzfall der gewöhnlichen Lösungen auffassen. Er tritt ein, wenn 1. die Scheitel eines abgeplatteten Grenzkegelschnittes c_2 des Systems in einem Punkt E zusammenfallen, der dann Doppelpunkt der eben genannten Involution sein muß, und 2. die Bedingung B durch eine beliebige Doppelgerade mit Scheiteln, die in einem willkürlichen Punkt dieser Geraden zusammenfallen, erfüllt wird. Dann werden einige der α' dem Grenzkegelschnitt c_2 entsprechenden Grenzkegelschnitte c_2' ebenfalls zusammenfallende Scheitel in demselben Punkte E haben, während andere unter ihnen zusammenfallende Scheitel in dem Punkte, der mit E in Beziehung auf k_2 konjugiert ist, haben; im ersten dieser Fälle tritt jedenfalls etwas Neues ein.

Vorläufig werden wir jedoch von diesem von *Halphen*schen Ausartungen herrührenden Falle absehen, der (s. [169]) zu einer wichtigen Ausnahme der sonst geltenden Regel Anlaß geben wird. Wir dürfen dann voraussetzen, daß die Scheitel keines der α' einer Doppelgeraden des Systems c_2 entsprechenden, in derselben Weise ausgearteten Kegelschnitte c_2' mit denjenigen des genannten Kegelschnittes c_2 zusammenfallen. Durch diese Doppelgerade wird die gestellte Aufgabe also nicht gelöst. Nun werden wir sogleich beweisen, daß die für die erste Formel [167] (1) angegebene Abzählung der λ Doppelgeraden auch hier gilt. Unsere Aufgabe erhält also, nach Benutzung von [167] (1),

$$(1) \qquad \xi = \tfrac{1}{2}(2\beta\mu - 2\alpha'\lambda) = (\beta - 2\alpha')\,\mu + \alpha'\mu' = \alpha\mu + \alpha'\mu'$$

Lösungen, wo $\alpha = \beta - 2\alpha'$ ist.

Um die hier benutzte Annahme über die Zahl λ zu beweisen, müssen wir zu der Korrespondenz zwischen den Schnittpunkten P und P' einer Geraden g mit zwei Kegelschnitten c_2 und c_2', die k_2 in denselben Punkten schneiden und beziehungsweise dem System angehören oder die Bedingung B erfüllen, zurückkehren und die Koinzidenzen abzählen, die im Schnittpunkte A der Geraden g mit einer Doppelgeraden des Systems stattfinden. Betrachten wir

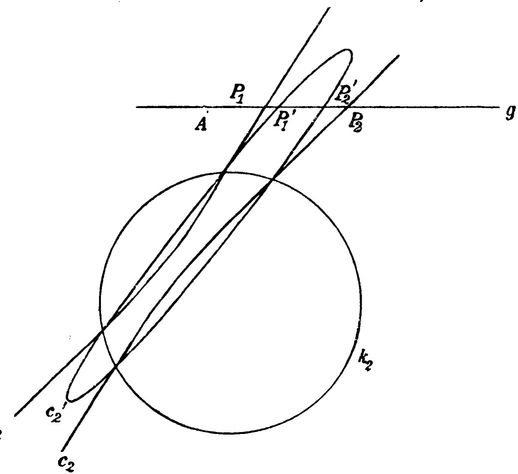


Fig. 33.

nun (Fig. 33) einen Kegelschnitt des Systems c_2, der durch einen sich dieser Doppelgeraden nähernden Punkt P_1 geht, wobei die Strecke AP_1

unendlich klein erster Ordnung angenommen wird, und g noch in P_2 schneidet, so wissen wir schon [167], daß er, wenn r die (ganzzahlige oder gebrochene) Ordnung der unendlich kleinen Größe $P_1 P_2$ ist, r-mal in die Zahl λ mitzuzählen ist. Dem Kegelschnitte c_2 entsprechen, wie wir vorausgesetzt haben, α' Kegelschnitte c_2', die k_2 in denselben vier Punkten wie c_2 schneiden und gleichzeitig mit c_2 in Doppelgerade ausarten, wodurch ihre Schnittpunkte mit g, P_1' und P_2' zusammenfallen; so ergeben sich eben $2\alpha' r$ Koinzidenzen, da $P_1 P_1'$ und $P_1 P_2'$ auch unendlich klein von der Ordnung r werden. Es genügt, dies für eine besondere Lage von g zu beweisen;[1]) denn erstens hat g an und für sich eine beliebige Lage in der Ebene; und zweitens muß der Einfluß zweier ganz bestimmter, zusammengehöriger Kegelschnitte c_2 und c_2' auf die hier gesuchte Anzahl von Koinzidenzen von dieser Lage unabhängig sein. Läßt man nun g durch den Scheitel des gemeinschaftlichen Polardreiecks der Kegelschnitte c_2, c_2' und k_2, der im Grenzfalle nicht auf der Doppelgeraden liegt, gehen und c_2' berühren, so fällt P_1' mit P_2' zusammen und es wird $\lim \frac{P_1 P_1'}{P_1 P_2} = \frac{1}{2}$. $P_1 P_1'$ und $P_1 P_2'$ sind demnach von derselben Ordnung wie $P_1 P_2$. Berücksichtigt man alle Kegelschnitte c_2, die sich den Doppelgeraden nähern, so erhält man also, wie wir bei der Bildung der Gleichung (1) voraussetzten, auf diese Weise $2\alpha'\lambda$ Koinzidenzen von P_1 mit P_1' oder P_2''. Diese Gleichung ist somit bewiesen.

Wir haben in (1) $\beta - 2\alpha' = \alpha$ gesetzt. Diese Zahl α muß wie α' ganz und positiv sein; denn man hätte auch die dualistisch entsprechende Herleitung benutzen können. Diese zeigt, daß α die Anzahl der die Bedingung B erfüllenden Kegelschnitte ist, die aus zwei Geraden zusammengesetzt sind, welche durch einen willkürlich gegebenen Punkt gehen und einer willkürlich gegebenen Involution angehören.

Wir haben also bewiesen, daß wenn entweder ein ∞^1-faches System von Kegelschnitten keine Doppelgeraden mit zusammenfallenden Scheiteln enthält, oder eine vom System unabhängige Bedingung B nicht von einer beliebigen Doppelgeraden mit Scheiteln, die in einem willkürlichen ihrer

1) Aus der daraus gefolgerten Abzählung der Koinzidenzen kann man sodann schließen, daß die Bestimmung der Ordnung von $P_1 P_1'$ und $P_1 P_2'$ auch für andere Lagen von g gültig ist, abgesehen von solchen, für welche diese Abzählungen illusorisch sein würden. Letzteres trifft zu, wenn g durch einen Schnittpunkt der Doppelgeraden d mit k_2 oder durch einen Scheitel des in die Doppelgerade d ausgearteten Kegelschnitts c_2 geht. Übrigens kann man unschwer durch Anwendung des *Carnot*schen Satzes auf ein Dreieck, dessen Seiten die Gerade g, die sich der Doppelgeraden d nähernde Seite des den Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlichen Polardreiecks und eine der gemeinschaftlichen Sehnen sind, die sich Tangenten an k_2 nähern, die oben genannte Bestimmung der Ordnung, in welcher $P_1 P_1'$ und $P_1 P_2'$ unendlich klein werden, direkt und allgemein beweisen.

Punkte zusammenfallen, erfüllt ist, es im Systeme $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ Kegelschnitte gibt, die die Bedingungen B erfüllen. Wie jedem System bestimmte Werte von μ und μ' zugehören, so gehören auch jeder Bedingung ganz bestimmte Werte von α und α' zu.

Da die α und α' bestimmenden Involutionen beliebig sind, so können sie auch so gewählt werden, daß die Doppelelemente zusammenfallen, oder daß ein Element von jedem Elementenpaar fest ist, das andere willkürlich. Man kann daher jene Zahlen auch so definieren: α ist die Anzahl der die Bedingung B erfüllenden Kegelschnitte, die aus einer gegebenen Geraden und einer durch einen gegebenen Punkt dieser Geraden gehenden Geraden zusammengesetzt sind; α' ist die Anzahl der die Bedingung B erfüllenden Doppelgeraden, die einen gegebenen Scheitel enthalten und mit einer gegebenen Geraden zusammenfallen. Dies geht übrigens auch aus dem Ausdrucke $\alpha\mu + \alpha\mu'$ hervor, wenn man ihn auf die hier genannten ∞^1-fachen Systeme von entarteten Kegelschnitten anwendet. Letzteres ist erlaubt, weil unsere Beweisführung unmittelbar auf den Fall, in welchem alle Kegelschnitte des Systems Doppelpunkte haben, anwendbar ist, die dualistisch entsprechende auf denjenigen, in welchem sie alle Doppelgerade sind. Für das System der Kegelschnitte, die aus einer festen Geraden und einer durch einen festen Punkt von ihr gehenden anderen Geraden zusammengesetzt sind, hat man offenbar $\mu = 1$, $\mu' = 0$; die Anzahl dieser Kegelschnitte, die B erfüllen, ist also α. Ganz ebenso ist die bereits angeführte Bedeutung von α' eine Folge davon, daß für die mit einer festen Geraden zusammenfallenden Kegelschnitte mit einem festen Scheitel $\mu = 0$, $\mu' = 1$ ist.

[169] Fortsetzung; Berücksichtigung der *Halphen*schen Ausartungen. Wir kehren jetzt zu dem vorläufig ausgeschlossenen Fall zurück, in welchem das System eine Doppelgerade mit zusammenfallenden Scheiteln enthält und die Bedingung B von einem mit einer beliebigen Doppelgeraden zusammenfallenden Kegelschnitte mit Scheiteln, die in einem beliebigen Punkt der Doppelgeraden zusammenfallen, erfüllt ist Wir haben dann, indem wir die Benennungen von [168] festhalten, gesehen, daß einer (oder einige, von denen wir vorläufig einen betrachten) der der Doppelgeraden c_2 im System entsprechenden α' abgeplatteten Kegelschnitte c_2' ebenfalls in demselben Punkt zusammenfallende Scheitel hat. Wir werden auch hier die den Grenzkegelschnitten benachbarten Kegelschnitte c_2 und c_2', die k_2 in denselben Punkten schneiden (Fig. 34), betrachten und ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden g beziehungsweise P_1, P_2 und P_1', P_2' nennen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Verhältnisse der Ordnungen der unendlich kleinen Abstände zwischen diesen Punkten zu finden. Eine Seite EG des den Kegelschnitten c_2, c_2', k_2 gemeinschaftlichen Polardreiecks wird sich der Doppelgeraden nähern. Die Gerade g darf man durch den dritten Scheitel dieses Dreiecks F gehen lassen [168], und da eine projektive

Änderung[1]) nichts an den hier zu bestimmenden Verhältnissen ändert, so darf man auch annehmen, daß die Seite FG des Polardreiecks unendlich fern ist. Dann ist E gemeinschaftliches Zentrum der Kegelschnitte, EG und EF sind gemeinschaftliche konjugierte Durchmesser, g eine mit dem letzteren parallele Sehne. Wir werden die Kegelschnitte c_2 und c_2' auf EG als x-Achse und EF als y-Achse beziehen, und die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 x, y_1 und x, y_2, die der Punkte P_1' und P_2' x, y_1' und x, y_2' und die eines Schnittpunkts der drei Kegelschnitte

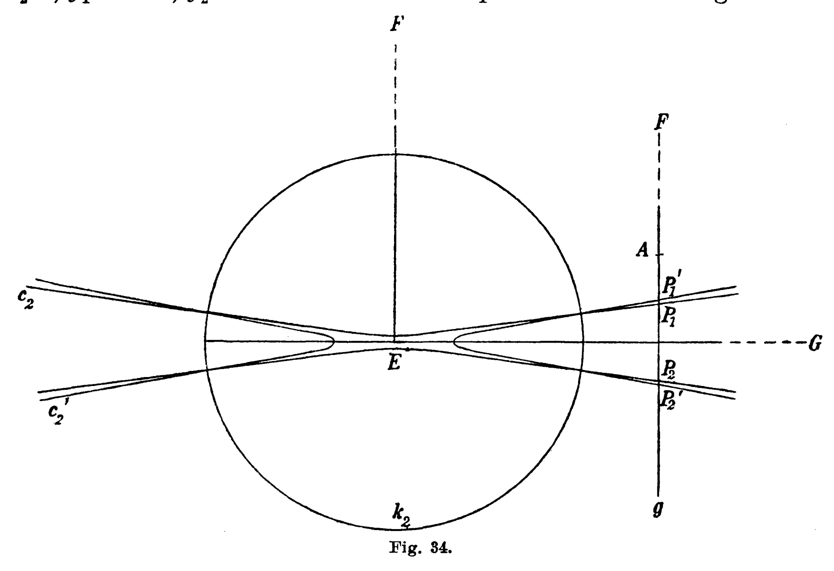


Fig. 34.

x'', y'' nennen. Bezeichnen wir weiter die Quadrate der auf EG liegenden Halbmesser der Kegelschnitte c_2 und c_2' mit a^2 und a'^2, so ist

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{y''^2}{x''^2-a^2} \quad \text{und} \quad \frac{y'^2}{x^2-a'^2}=\frac{y''^2}{x''^2-a'^2},$$

wo man für y sowohl y_1 als auch y_2 und für y' sowohl y_1' als auch y_2' schreiben darf. Hieraus erhält man, da x, x'' endlich bleiben, während a, a', y', y'' unendlich klein werden,

$$(1)\quad y''^2=\frac{y^2(x''^2-a^2)}{x^2-a^2}=\frac{y'^2(x''^2-a'^2)}{x^2-a'^2}=\frac{x''^2(y'^2-y^2)}{a^2-a'^2}=\frac{x''^2(y'+y)(y'-y)}{a^2-a'^2}.$$

Sei nun (indem AP_1 wie in [168] unendlich klein erster Ordnung ist) r die Ordnung der unendlich kleinen Größe y''; sie ist dann auch die der Sehne $2y$ oder P_1P_2 und c_2 wird in der Abzählung [167] (1) der λ Doppellinien des Systems r-mal zu zählen sein. Auch y' und $y+y'$ oder P_1P_2' (Fig. 34) werden, wie in dem in [168] behandelten

1) Diese könnte man übrigens durch eine Anwendung des *Carnot*schen Satzes ersetzen.

Falle, von der Ordnung r sein. Um die Ordnung von $y'-y$ oder $P_1 P_1'$ zu bestimmen, müssen wir noch die von a und a' kennen, welche auch als die des Winkels zwischen den Tangenten von F oder von einem ganz beliebigen Punkt aus an c_2 und c_2' bezeichnet werden kann, oder als die der Strecken, welche diese Tangenten auf einer beliebigen Geraden abschneiden. Nennen wir diese Ordnungen p und q, so ist die Ordnung von $y'-y = r+2p$ oder $r+2q$, je nachdem $p \leqq q$ oder $p \geqq q$ ist. p und q hängen von der Art der Grenzübergänge ab, die, wie wir in [170] sehen werden, auf die dem Systeme angehörigen oder die die Bedingung B befriedigenden *Halphen*schen Kegelschnitte führen, oder, sagen wir kurz, von der Gattung dieser Grenzkegelschnitte. Im Falle $p=q$ können die sie näher bestimmenden Koeffizienten zwar auch solche Werte haben, daß die Ordnung noch höher wird; in einem solchen Grenzfall können wir aber den *Halphen*schen Kegelschnitt selbst sovielmal unter die gesuchten Auflösungen mitzählen, als die Erhöhung beträgt; denn diese Erhöhung, die auf dem Wert eines variierenden Parameters beruht, ist nicht zu beachten, wenn man eben eine allgemeine Bestimmung der Anzahl der Lösungen sucht [158].

Die Anzahl $r+2p$ oder $r+2q$ ersetzt also den Wert r, mit welchem in [168] die Koinzidenz von P_1 mit P_2, wie noch immer die Koinzidenz von P_1 mit P_2', unter die Koinzidenzen der Schnittpunkte der mit einander verbundenen Kegelschnitte c_2 und c_2' mit der Geraden g mitzuzählen war, und der für die gesamte Anzahl der von Doppellinien herrührenden Koinzidenzen den Wert $2\alpha'\lambda$ ergab und zum Ausdruck $\xi = \alpha\mu + \alpha'\mu'$ der Anzahl der eigentlichen Lösungen führte. Ersterer Wert ist also durch $2\alpha'\lambda + 2\pi$ und die Formel [168] (1) durch

$$(4) \qquad \xi = \alpha\mu + \alpha'\mu' - \pi$$

zu ersetzen, wo die Anzahl π folgendermaßen zu bestimmen ist: Jede Verbindung zwischen zwei Kegelschnitten c_2 und c_2', — d. h. zwischen jedem Kegelschnitt c_2 des Systems, der durch einen Punkt P geht, dessen Abstand von der Doppellinie eines *Halphen*schen Kegelschnittes (aber nicht von seinem Doppelscheitel) unendlich klein erster Ordnung ist, und jedem Kegelschnitt c_2', der die Bedingung B erfüllt, sich einem *Halphen*schen Kegelschnitte mit derselben Doppelgeraden und demselben Doppelscheitel nähert und einen (nicht durch den Doppelscheitel gehenden und die Doppelgerade nicht berührenden) Kegelschnitt k_2 in denselben Punkten wie c_2 schneidet, — wird p- oder q-mal in π mitgezählt, wo p und q die Ordnungen der Strecken sind, die die durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangenten an c_2 und c_2' auf einer beliebigen Geraden abschneiden, und zwar ist je die kleinere dieser zwei Zahlen zu wählen.

Natürlich läßt sich π auch auf die dualistisch entsprechende Weise bestimmen. Daß dies wirklich zu demselben Resultat führt, wird durch die Darstellungen in [170] leichter verständlich.



Anmerkung. Wäre es denn nicht erlaubt, auch hier den Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ anzuwenden und also die Ausartungen nach den jetzt gegebenen Regeln unter die Lösungen mitzuzählen? Nähern sich doch die hier betrachteten Kegelschnitte c_2 und c_2' derselben Doppelgeraden und ihre Scheitel demselben Punkt dieser Geraden. Ihre Grenzform ist ja dieselbe, insofern man sie in einem Koordinatensystem darstellt, mag dieses ein Punkt- oder ein Linienkoordinatensystem sein.

Erlaubt ist es allerdings, sich so auszudrücken, wenn man nur sagt, daß man allein auf diese Darstellungen Bezug nimmt, ganz wie es erlaubt ist, die Formel $\alpha\mu$ zu benutzen, wenn man allein auf die Darstellung in Punktkoordinaten [160], $\alpha'\mu'$, wenn man allein auf die Darstellung in Linienkoordinaten Bezug nimmt. Es ist erlaubt, aber man gewinnt nichts durch diese Redeweise, da man dann doch nachher dieselbe Subtraktion vornehmen muß, um die Anzahl der eigentlichen Kegelschnitte des Systems, die die Bedingung erfüllen, zu finden. Und zudem verliert man — ganz wie bei der entsprechenden Anwendung der Formel $\alpha\mu$ (s. [161] und [162]) — dadurch die Möglichkeit, die Anwendung derselben Formel zu wiederholen, um in einem System, dessen Charakteristiken schon auf diese Weise bestimmt sind, solche Kegelschnitte zu finden, die einer neuen, von einer willkürlich liegenden *Halphen*schen Ausartung erfüllten Bedingung unterworfen sind. Die wiederholte Anwendung derselben Formel wird dann nämlich nur auf den Grad einer identischen Gleichung führen, weil es dann unendlich viele Doppelgerade mit zusammenfallenden Scheiteln geben wird, die nach der auf die Anwendung der Formel $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ sich stützenden Betrachtung als Lösungen betrachtet werden müßten. Diese Formel läßt sich daher nicht zur Bestimmung von Kegelschnitten anwenden, die fünf Bedingungen unterworfen sind, von welchen drei von *Halphen*schen Kegelschnitten mit willkürlich liegenden Doppelgeraden und beliebigem Doppelscheitel befriedigt werden. Wie man solche Bedingungen darstellen kann, sowie die Tatsache, daß sie unter sich ganz verschieden sein können, werden wir sogleich in [170] erkennen.

[170] Analytische Charakterisierung der *Halphen*schen Ausartungen. Um auf die *Halphen*schen Kegelschnitte zu kommen, wird es bequem sein, besonders die folgenden zwei Parameter eines variablen Kegelschnittes zu betrachten: erstens das Quadrat u[1]) der Strecke, die der Kegelschnitt auf einer beliebig gegebenen Geraden g abschneidet, und zweitens das Quadrat v der Strecke, die die durch einen beliebig gegebenen Punkt F gehenden Tangenten an den Kegelschnitt auf einer beliebig gegebenen Geraden f abschneiden. Gehört der Kegelschnitt einem

1) Um die Zweideutigkeit des Vorzeichens zu vermeiden, nehmen wir die Quadrate der Strecken.

∞^1-fachen System an, so muß eine algebraische Gleichung zwischen u und v bestehen:

(1) $$\varphi(u, v) = 0.$$

Für einen *Halphen*schen Kegelschnitt ist gleichzeitig $u = 0$ und $v = 0$, und wenn ein System gegeben ist, kann man immer g, F und f so wählen, daß u und v nur für die *Halphen*schen Kegelschnitte des Systems gleichzeitig null werden. Betrachtet man u und v als gewöhnliche Koordinaten, so stellt (1) eine Kurve dar, deren Punkten die Kurven des Systems eindeutig entsprechen.[1]) Einem Elemente dieser Kurve mit dem Mittelpunkt (0,0) wird ein Element des Systems entsprechen, das aus einem *Halphen*schen Kegelschnitte und den sich diesem nähernden Kurven des Systems besteht. Ein solches kann man also innerhalb des Konvergenzbereichs durch Reihenentwicklungen von der Form

(2) $$u = t^{\nu}, v = At^{\nu'} + \ldots$$

darstellen, wo t ein Parameter ist, der so gewählt ist, daß die Exponenten ganze Zahlen werden, die Kegelschnitte also eindeutig den Werten von t entsprechen.

Die Kegelschnitte c_2', die mit den Kegelschnitten c_2 eines gegebenen Systems auf die in [168] und [169] benutzte Weise miteinander verbunden sind, bilden ebenfalls ein System; zwischen den diesem entsprechenden Werten von u und v wird also auch eine Gleichung

(3) $$\psi(u, v) = 0$$

bestehen. Gibt es in diesem *Halphen*sche Kegelschnitte, so muß die Gleichung (3) durch $u = 0$ und $v = 0$ befriedigt werden, und das Element des Systems (c_2'), das den *Halphen*schen Kegelschnitt enthält, wird durch die Reihen

(4) $$u = s^{\sigma}, v = Bs^{\sigma'} + \ldots$$

dargestellt.

Die Verhältnisse $\frac{\nu'}{\nu}$ und $\frac{\sigma'}{\sigma}$ charakterisieren das, was wir in [169] die Gattungen eines *Halphen*schen Kegelschnittes des Systems (c_2) und des damit verbundenen Systems (c_2') genannt haben. Soll ein *Halphen*scher Kegelschnitt wirklich beiden Systemen angehören, also eine Lösung der Aufgabe geben, „einen Kegelschnitt im System zu finden, der die gegebene Bedingung erfüllt", so müssen nicht nur die ihm entsprechenden Werte von $\frac{\nu'}{\nu}$ und $\frac{\sigma'}{\sigma}$ gleich sein, sondern auch die den Kegelschnitt genauer bestimmenden Parameter A und B denselben Wert annehmen.

1) Dies läßt sich jedenfalls durch eine geeignete Wahl der Geraden g erreichen; denn solche Paare von Kegelschnitten des Systems, denen dieselben Werte von v entsprechen, werden jedenfalls nicht auf allen Geraden gleiche Segmente $\sqrt{u}$ abschneiden.



Sind nun die den Systemen (c_2) und (c_2') entsprechenden Gleichungen (1) und (3) bekannt, so kann man die den gesuchten Kegelschnitten entsprechenden Punkte (u, v) als Schnittpunkte der Kurven (1) und (3) suchen, und dabei die *Halphen*schen Kegelschnitte, die den in den Punkt $u = 0$, $v = 0$ fallenden Schnittpunkten entsprechen, bestimmen und berücksichtigen. Hier werden wir aber diese Darstellung nur zur Bestimmung der von der Zahl $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ abzuziehenden Zahl π [169] benutzen.

Zu diesem Zweck müssen wir fürs erste die Kegelschnitte des gegebenen Systems betrachten, die durch einen Punkt P_1 gehen, dessen Abstand von der Doppelgeraden des *Halphen*schen Kegelschnittes unendlich klein erster Ordnung ist. Wir werden annehmen, daß der Wert von t, der einem dieser Kegelschnitte c_2 entspricht, von der Ordnung τ sei. Mit diesem Kegelschnitt sind [169] solche die gegebene Bedingung erfüllende Kegelschnitte c_2' verbunden, die auf einer Geraden dasselbe Stück $\sqrt{u}$ abschneiden, wie der Kegelschnitt c_2. Der entsprechende Parameter s wird wegen der ersten Gleichung (4), die $t^\nu = s^\sigma$ gibt, σ Werte annehmen, es gibt also (innerhalb des Konvergenzbereichs der Reihen (2) und (4)) für jeden Kegelschnitt c_2 σ Kegelschnitte c_2', und die entsprechenden Werte von s sind von der Ordnung $\frac{\tau\nu}{\sigma}$. Die Ordnung des Wertes von v, der dem Kegelschnitte des Systems c_2 entspricht, ist $\nu'\tau$, die des Wertes von v, der c_2' entspricht, ist $\sigma'\frac{\tau\nu}{\sigma}$. Die Verbindung von c_2 und c_2' soll [169] zu π einen Beitrag liefern, der gleich der kleineren von den Ordnungen der so bestimmten Strecken $\sqrt{v}$, also gleich $\frac{\nu'\tau}{2}$ oder $\frac{\sigma'\nu\tau}{2\sigma}$ ist; daher wird der ganze von den betrachteten und durch die Reihen (2) und (4) dargestellten *Halphen*schen Ausartungen herrührende Beitrag zu π gleich der kleineren der Zahlen

$$\frac{\nu'\sigma}{2}\sum\tau \text{ oder } \frac{\nu'\sigma}{2}\sum\tau$$

(oder gleich dem gemeinschaftlichen Werte, wenn sie unter sich gleich sind) sein. Die Summe $\sum$ ist hier über die Werte von t zu erstrecken, die den Kegelschnitten des Systems entsprechen, die durch P_1 gehen und dem durch (2) bestimmten Element angehören. Um die Summe $\sum\tau$ zu bestimmen, betrachten wir die Gleichung, die zwischen t und dem Abstand AP_1 des Punktes P_1 auf der schneidenden Geraden g, von ihrem Schnittpunkte A mit dem *Halphen*schen Kegelschnitte an gerechnet, besteht. $\sum\tau$ ist dann die Summe der Ordnungen der Größen t, die einem unendlich kleinen Wert erster Ordnung von AP_1 entsprechen, also [10] die Anzahl der verschwindenden Werte von AP_1, die $t = 0$ entsprechen. Diese Zahl ist 2, da g jeden Kegelschnitt, also auch den durch $t = 0$

eindeutig bestimmten, in zwei Punkten schneidet. Der gesuchte Beitrag ist somit gleich der kleineren der Zahlen $\nu'\sigma$ oder $\nu\sigma'$. Ebenso sind die Beiträge aller *Halphen*schen Kegelschnitte abzuzählen.

Die Herleitung der Gleichung (3), die dem System der Hilfskegelschnitte c_2 zugehört, würde aber oft schwierig sein; sie läßt sich jedoch umgehen. Wenn die einzuführende neue Bedingung unmittelbar als eine Gleichung zwischen u und v auftritt, ist diese eben die Gleichung (3). Im allgemeinen muß aber die die Bedingung ausdrückende Gleichung noch drei andere Parameter des Kegelschnitts enthalten. Auch dann kann man daraus Reihen von der Form (4) herleiten. Zwar wird es dann vorkommen können, daß die Größe B, die nun von den drei Parametern abhängt, eben für einen dem System (c_2') angehörenden *Halphen*schen Kegelschnitt 0 oder ∞ wird. Dies läßt sich aber im allgemeinen, d. h. wenn das System und die Bedingung von einander unabhängig sind, durch die geeignete Wahl des Kegelschnittes k_2, der bei der Konstruktion des Systems (c_2') benutzt wurde [168], vermeiden Die Abhängigkeit der Ordnungen der den Kegelschnitten (c_2') zugehörenden unendlich kleinen Größen u und v wird also auch jetzt durch die Exponenten der Reihen (4) ausgedrückt, die unmittelbar aus der gegebenen Bedingung hergeleitet werden.

Bezeichnen wir z. B. mit $2a$ und $2b$ die Längen zweier konjugierter Durchmesser der gesuchten Kegelschnitte, von welchen der Durchmesser $2a$ eine gegebene Richtung hat, und stellen sodann die Bedingung auf, daß das Verhältnis $\frac{b^2}{a}$ (oder der halbe, dem Durchmesser $2a$ entsprechende sogenannte Parameter) einen numerisch gegebenen Wert k habe $\left(\text{also } \frac{b^4}{a^2} = k^2\right)$, so wird im Falle $a = 0$, $b = 0$ der Kegelschnitt ein *Halphen*scher sein. Wir können hier die Gerade g, auf welcher die Sehne $\sqrt{u}$ abgeschnitten wird, in der gegebenen Richtung, den Punkt F, von dem aus wir zwei Tangenten ziehen, als unendlich fernen Punkt dieser Geraden, und die Gerade f, auf der wir das durch die Tangenten abgeschnittene Stück $\sqrt{v}$ rechnen, senkrecht dazu annehmen. Dann wird für unendlich kleine Werte von a und b, wenn man unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt (abgesehen vom Faktor $\pm\sqrt{\pm 1}$)

$$\sqrt{u} = 2\,\frac{a}{b}\,\frac{y}{\sin\omega},\ \sqrt{v} = 2b\sin\omega,$$

wo y den Abstand der Geraden g vom Zentrum des Kegelschnitts und ω den Winkel der konjugierten Durchmesser $2a$ und $2b$ bedeutet. Die Gleichung $\frac{b^2}{a} = k$ läßt sich also folgendermaßen schreiben:

$$v = \frac{k^2\sin^4\omega}{y^2}\,u.$$

Die Zahlen σ und σ', die *Halphen*schen Kegelschnitten dieser Art, für



welche weder y noch $\sin \omega$ 0 oder ∞ ist, entsprechen, werden also beide $= 1$ sein. Für einen vorliegenden *Halphen*schen Kegelschnitt läßt sich die Beziehung $y = 0$ durch die Wahl der Geraden g vermeiden. Da bei der Einführung einer gegebenen Bedingung der hier zu betrachtende *Halphen*sche Kegelschnitt c_2' denselben Scheitel, wie der entsprechende Kegelschnitt c_2 des Systems hat, wird y nur dann ∞, wenn schon das gegebene System *Halphen*sche Kegelschnitte mit unendlich fernen zusammenfallenden Scheiteln enthält. Weiter kann man den benutzten festen Kegelschnitt k_2 so wählen, daß zwei bestimmte konjugierte Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes des Systems c_2 auch konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes k_2 und also auch des demselben Büschel angehörigen Kegelschnittes c_2' werden; dies gilt auch dann, wenn man einen *Halphen*schen Kegelschnitt c_2 als Grenzfall betrachtet. Enthält also das System keinen *Halphen*schen Kegelschnitt, für welchen $\sin \omega = 0$ oder ∞ ist, so können diese Beziehungen auch für den entsprechenden Kegelschnitt c_2' vermieden werden. Da die Zahlen σ und σ' von der Wahl des Hilfskegelschnittes k_2 unabhängig sind, so sehen wir, daß

$$\sigma = \sigma' = 1$$

ist, so lange das System, in welchem man die Kegelschnitte sucht, die die hier betrachtete Bedingung erfüllen sollen, nicht selbst *Halphen*sche Kegelschnitte enthält, für welche $y = \infty$ oder $\sin \varphi = 0$ oder ∞ ist — Spezialfälle, die als Grenzfälle behandelt werden können [158].

[171] Beispiele für die Bestimmung der Werte α und α', die gegebenen Bedingungen entsprechen. Die hier entwickelte Theorie zeigt die Wichtigkeit der Bestimmung der einer gegebenen Bedingung B entsprechenden Zahlen α und α'. Diese kann durch irgend eine Bestimmung der Anzahlen ε_1 und ε_2 der Kegelschnitte zweier Systeme geschehen, die die gegebene Bedingung erfüllen. Wenn man nun die Charakteristiken μ_1, μ_1' und μ_2, μ_2' dieser Systeme kennt, und entweder diese keine *Halphen*schen Kegelschnitte enthalten, oder die Bedingung nicht von solchen in einer beliebigen Lage erfüllt wird, so erhält man auf diese Weise zwei Gleichungen $\mu_1 \alpha + \mu_1' \alpha' = \varepsilon_1$, $\mu_2 \alpha + \mu_2' \alpha' = \varepsilon_2$ zur Bestimmung von α und α'. Man kann z. B. einen Büschel, dessen Charakteristiken $\mu_1 = 1$ und $\mu_1' = 2$ sind, und das dualistisch entsprechende System, dessen Charakteristiken $\mu_2 = 2$ und $\mu_2' = 1$ sind, benutzen, und dann zur Bestimmung von ε_1 und ε_2 die analytische Behandlung verwenden. ε_1 und ε_2 werden dann die Grade, in welchen die Koeffizienten der Gleichung eines Kegelschnittes in gewöhnlichen Punktkoordinaten beziehungsweise Linienkoordinaten in die Gleichung eingehen, die die Bedingung ausdrückt.

Einfacher geschieht die Bestimmung von α und α' gewöhnlich durch Abzählung der schon in [168] genannten, teilweise bestimmten Grenzformen, die die Bedingung erfüllen; diese Abzählung lieferte uns Definitionen für die zwei Zahlen.



Endlich kann man die übrigen abzählenden Methoden, also die Methode der Erhaltung der Anzahl, das Korrespondenzprinzip usw. dazu anwenden, die Anzahl der Kegelschnitte eines nur durch seine Charakteristiken μ und μ' bestimmten Systems zu finden, die die Bedingung erfüllen. Wird man dann auf einen Ausdruck von der Form $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ geführt, so hat man diesen für die vorliegende Bedingung unabhängig von der allgemeinen Theorie bewiesen. Auf dieselbe Weise kann man, wie wir an einigen Beispielen sehen werden, auch für Kurven höherer Ordnung, für welche eine solche Theorie nicht gilt, auf Ausdrücke derselben Form kommen. Aus der für die Kegelschnitte geltenden Theorie wissen wir aber, daß immer ein solcher Ausdruck für diese Kurven herauskommen wird, wenn die Bedingung nicht von einer willkürlich liegenden *Halphen*schen Ausartung befriedigt wird.

Wir wollen einige Beispiele der hier genannten Bestimmungen von α und α' geben:

1. Aus der Bedeutung [168] von α und α' geht unmittelbar hervor, daß es in einem System μ Kegelschnitte gibt, in Beziehung auf die zwei gegebene Punkte, und μ', in Beziehung auf die zwei gegebene Gerade konjugiert sind. Daraus folgt, daß man bei allen Bestimmungen von Anzahlen von Kegelschnitten durch gegebene Bedingungen, unter welchen die, durch einen gegebenen Punkt zu gehen oder eine gegebene Gerade zu berühren, auftreten, diese durch die hier genannten allgemeineren ersetzen kann und umgekehrt.

2. Wir können den schon mehrmals bewiesenen Ausdruck $n'\mu + n\mu'$ der Anzahl der Kegelschnitte, die eine Kure $c_{n,n'}$ berühren, aus der Bedeutung der Zahlen α und α' [168] leicht herleiten. Wenn ein aus einer gegebenen Geraden g und einer durch einen Punkt P von g gehenden Geraden h zusammengesetzter Kegelschnitt $c_{n,n'}$ berühren soll, muß nämlich h $c_{n,n'}$ berühren. Die Anzahl α solcher zusammengesetzter Kegelschnitte ist daher n', und die dualistisch entsprechende Bestimmung zeigt, daß $\alpha' = n$ ist.

3. Um die Anzahl der Kegelschnitte eines Systems zu bestimmen, die zwei Gerade a und b in entsprechenden Punkten projektiver Punktreihen schneiden, bemerken wir zunächst, daß $\alpha' = 0$ ist, weil eine willkürlich liegende Doppelgerade a und b nicht in entsprechenden Punkten schneidet. Dagegen wird $\alpha = 4$, weil ein Kegelschnitt, der aus einer festen Geraden g und einer durch einen Punkt P von g gehenden Geraden h zusammengesetzt ist, die Bedingung erfüllt, wenn h entweder einer der 2 entsprechend gemeinsamen Strahlen der Büschel ist, die die Punktreihen von P aus projizieren, oder durch den Punkt von a oder b geht, der beziehungsweise dem Schnittpunkte bg oder ag entspricht. Daß die gesuchte Anzahl 4μ ist, findet man auch leicht durch das $(2\mu, 2\mu)$-fache Entsprechen zweier Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden a, die so bestimmt werden, daß in der gegebenen Projektivität von a und b

P_1 einem Punkt Q von b entspricht, und daß P_2 und Q auf demselben Kegelschnitte des Systems liegen. Wenn a und b zusammenfallen, so wird, abgesehen von den durch die entsprechend gemeinsamen Punkte gehenden Kegelschnitten, die Anzahl sich auf 2μ reduzieren; sind die Punktreihen in Involution, so fallen die so bestimmten Kegelschnitte zusammen und ihre Anzahl reduziert sich also auf μ.

Übrigens läßt sich diese Bestimmungsart auch verallgemeinern, indem man die Kegelschnitte durch Kurven n^{ter} Ordnung c_n, die gegebenen Geraden durch Kurven von den Ordnungen n_1 und n_2 ersetzt, die die Kurven c_n in entsprechenden Punkten einer (ν_1, ν_2)-Korrespondenz treffen sollen. Die Anzahl der Kurven c_n eines Systems, die durch diese Bedingung bestimmt werden, läßt sich durch den *Cayley-Brill*schen Satz bestimmen. Sie ist $n(n_1\nu_2 + n_2\nu_1)\mu$.

4. Die Ordnung des Ortes der Punkte, in denen die Kurven c_n eines Systems die durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangenten berühren, ist $\mu + \mu'$ [18]. Hieraus folgt, daß es in einem System

$$n_1 n_2' \mu + n_1 n_2' \mu'$$

Kurven gibt, die je in einem Schnittpunkt mit einer gegebenen Kurve von der Ordnung n_1 von einer Tangente an eine andere gegebene Kurve von der Klasse n_2' berührt werden. Als nicht projektivischen Spezialfall findet man, daß das System $\mu + \mu'$ Kurven enthält, die, je in einem Schnittpunkt mit einer gegebenen Geraden, mit dieser einen gegebenen Winkel bilden, z. B. sie rechtwinkelig schneiden. — Die Kurven des Systems dürfen hier von einer beliebig gegebenen Ordnung sein. Für Kegelschnitte folgt der Satz einfach aus der Bedeutung von α und α' [168].

5. Suchen wir die Anzahl der Kurven c_n eines Systems, die eine gegebene Kurve c_{n_1} von der Ordnung n_1 und der Klasse n_1' rechtwinklig schneiden. Seien P_1 und P_2 die Punkte, in welchen die Tangenten der gesuchten Kurve c_n und der gegebenen Kurve c_{n_1} in einem ihrer Schnittpunkte Q die unendlich ferne Gerade treffen. Einem Punkte P_1 entsprechen dann $(\mu + \mu')n_1$ Punkte Q, also auch $(\mu + \mu')n_1$ Punkte P_2 und einem Punkte P_2 n_1' Punkte Q, also $n_1'\mu$ Punkte P_1. Wegen des gegenseitig eindeutigen Entsprechens des Punktes P_2 und des mit ihm in Beziehung auf die Kreispunkte harmonisch verbundenen Punkts P_3 gelten die hier gefundenen Zahlen auch für das Entsprechen von P_1 und P_3, und die Koinzidenzen dieser Punkte ergeben die Lösungen unserer Aufgabe. Ihre Anzahl ist also $(n_1 + n_1')\mu + n_1\mu'$.

Auch dies gilt für Systeme von Kurven von beliebiger Ordnung. Da diese Ordnung hier, wie im Beispiel 4. — wie früher die Anzahl $n_1'\mu + n_1\mu'$ der Kurven eines Systems, die eine gegebene Kurve berühren — gar nicht in den gefundenen Ausdruck eingeht, darf sie auch unendlich sein, oder das System darf ein solches transzendentes System sein, das durch eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung definiert wird (s.

[163] Anmerkung). — Für ein System von Kegelschnitten folgt der gefundene Ausdruck unmittelbar aus der in [168] gegebenen Deutung von α und α'. (Vgl. die Abzählung der Normalen einer Kurve, die durch einen gegebenen Punkt gehen [29].)

6. Um die Klasse der Umhüllungskurve der Achsen eines Systems von Kegelschnitten zu finden, bemerken wir, daß die Umhüllungskurve der Polaren eines gegebenen Punktes von der Klasse μ und der Ort der Pole einer gegebenen Geraden von der Ordnung μ' ist (siehe Beispiel 1 oder [17]). Betrachten wir jetzt das Entsprechen zweier durch einen festen Punkt A gehender Geraden g_1 und g_2, von welchen g_1 die unendlich ferne Gerade im Pole der Geraden g_2 in Beziehung auf einen Kegelschnitt des Systems trifft, so werden einer Geraden g_1 μ Gerade g_2, und einer Geraden g_2 μ' Gerade g_1 entsprechen. Wie im vorigen Beispiel, ersieht man dann, daß es $\mu + \mu'$ aufeinander senkrechte Geradenpaare g_1, g_2 geben wird. Die so bestimmten Geraden g_2 werden eben die durch A gehenden Achsen sein, die gesuchte Klasse ist also $\mu + \mu'$. — Der Umstand, daß es auch $\mu + \mu'$ Koinzidenzen von g_1 und g_2 gibt, würde eine neue Bestimmung der Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangenten ergeben.

Auch hier folgen die Werte von α und α' unmittelbar aus ihrer Bedeutung.

7. Der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte eines Sytsems ist ein Spezialfall des Ortes der Schnittpunkte der durch zwei gegebene Punkte A und B gehenden Tangenten an einen Kegelschnitt des Systems. Dieser Ort wird eine Gerade durch A, außer in A selbst, in $2\mu'$ Punkte schneiden und μ'-mal durch A gehen. Seine Ordnung ist also $3\mu'$, und $3n_1\mu'$ Kegelschnitte des Systems werden einen Brennpunkt auf einer Kurve c_{n_1} haben.

8. Wir wollen nun die Werte α und α' bestimmen, die der durch die Gleichung [170] (3)

$$\psi(u, v) = 0$$

dargestellten Bedingung zugehören, wo u das Quadrat des durch den Kegelschnitt auf einer beliebigen Geraden g abgeschnittenen Stücks, v das Quadrat des Stücks ist, das die durch einen beliebigen Punkt F gehenden Tangenten an den Kegelschnitt auf einer Geraden f abschneiden Wir werden annehmen, daß diese Gleichung in Beziehung auf u und v beziehungsweise vom Grad γ und γ' ist.

Diese Aufgabe läßt sich durch Anwendung des Korrespondenzsatzes lösen.[1]) Einfacher ist es aber, von den geometrischen Bedeutungen von α und α' Gebrauch zu machen. Soll der Kegelschnitt aus einer Geraden l und einer durch einen Punkt von l gehenden Geraden m

1) Eine solche Lösung empfehlen wir als Übungsbeispiel.



bestehen, so ist $v = 0$. Die diesem Werte von v entsprechenden γ Werte von u geben für das Stück $\sqrt{u}$ 2γ Werte, durch die 2γ Gerade m bestimmt werden. Also ist $\alpha = 2\gamma$ und ebenso findet man $\alpha' = 2\gamma'$.

Wie in [170] kann man aus den hier gefundenen Abzählungen einzelner singulärer Kegelschnitte auch dann, wenn die Bedingungsgleichung noch andere Parameter als u und v enthält, die entsprechende Abzählung solcher Kegelschnitte herleiten, die dieselben infinitesimalen Eigenschaften darbieten. Betrachten wir z. B., wie in [170], die Bedingung, daß der halbe Parameter $\frac{b^2}{a}$, der dem zu einer gegebenen Geraden parallelen Durchmesser entspricht, einen numerisch gegebenen Wert k haben soll. Um α zu bestimmen, suchen wir die der Bedingung genügenden Kegelschnitte, die aus einer Geraden l und einer durch einen Punkt L von l gehenden Geraden m bestehen. Soll dann der Durchmesser $2a$ endlich sein, so muß m die für diesen Durchmesser gegebene Richtung haben. In diesem Grenzfalle fällt der konjugierte Durchmesser mit dem Durchmesser $2a$ zusammen und wird ihm gleich. Also ist $a = b = k$, und dieser Kegelschnitt wird vollständig bestimmt und ist einmal in α mitzuzählen. m kann aber auch mit l zusammenfallen, wodurch man einen *Halphen*schen Kegelschnitt erhält, dessen benachbarte Kegelschnitte, wie wir in [170] sahen, (unter den dort aufgestellten Bedingungen) sich so verhalten, wie wenn sie durch $v = Bu$ dargestellt wären. Dieser Kegelschnitt wird also zweimal in α mitzuzählen sein und zweimal unter die auf l liegenden Doppelgeraden, deren einer Scheitel in L fällt. Da kein anderer Kegelschnitt letzterer Art die gegebene Bedingung erfüllt, findet man für diese Bedingung $\alpha = 3$, $\alpha' = 2$.

9. Eine andere Bestimmung der letztgenannten Zahlen $\alpha = 3$, $\alpha' = 2$ können wir als Beispiel für die erstgenannte analytisch-geometrische Methode geben. Sei

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in rechtwinkeligen Koordinaten; dann kann man daraus Ausdrücke für den zu der Achse parallelen Durchmesser $2a$ und den zu diesem konjugierten Durchmesser $2b$ herleiten und damit die Bedingung ausdrücken, daß der Parameter $\frac{b^2}{a}$ einen gegebenen Wert k, oder, da das Vorzeichen des Durchmessers $2a$ unbestimmt ist, daß $\frac{b^4}{a^2}$ einen gegebenen Wert k^2 haben soll. Man findet dann die Gleichung

$$(2) \quad (A^2+B^2)^2(CD^2-2BDE+AE^2+B^2F-ACF) = k^2A(AC-B^2)^3.$$

Diese Gleichung ist vom Grade 7 in Beziehung auf die Koeffizienten, also auch in Beziehung auf eine in diese linear eingehende Größe. Ein Büschel wird also 7 Kegelschnitte enthalten, die die gegebene Be-



dingung erfüllen, und da er die Charakteristiken $\mu = 1$ und $\mu' = 2$ hat, so ist

(3) $$\alpha + 2\alpha' = 7.$$

Drückt man dieselbe Bedingung durch die Koeffizienten der Gleichung des Kegelschnittes in gewöhnlichen Linienkoordinaten aus, so findet man eine Gleichung vom Grade 8, kann also daraus schließen, daß $2\alpha + \alpha' = 8$ ist. Wir werden aber sehen, daß man die mit dieser Auflösung verbundene, recht ausführliche algebraische Rechnung durch die Betrachtung eines Spezialfalles vereinfachen kann, und werden dadurch gleichzeitig ein Beispiel dafür erhalten, welche Vorsicht die Anwendung solcher Spezialfälle, in welchen das System und die Bedingung nicht von einander unabhängig sind, erfordert.

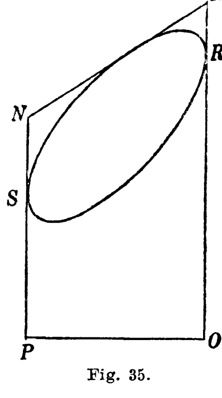


Fig. 35.

Wir werden voraussetzen, daß zwei der Tangenten (OM und PN, Fig. 35) der Kegelschnitte des Systems, die vier feste Tangenten haben sollen, unter sich und mit dem Durchmesser $2a$ des Kegelschnittes parallel seien. Als Linienkoordinaten benutzen wir die Stücke $OM = u$ und $PN = v$, die eine willkürliche Gerade MN auf den zwei parallelen festen Tangenten, von den festen Punkten O und P aus gerechnet, abschneiden; diese Punkte wählen wir so, daß OP senkrecht auf den Parallelen OM und PN steht, und setzen $OP = c$. Die Gleichung des Kegelschnittes wird dann die Form

$$2Buv + 2Du + 2Ev + F = 0$$

haben. Die Berührungspunkte der parallelen Tangenten R und S werden durch $v = \infty$, $u = -\frac{E}{B}$ und $u = \infty$, $v = -\frac{D}{B}$ bestimmt. Also wird der Durchmesser SR die Länge $2b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{D-E}{B}\right)^2}$ haben. Für die mit SR parallelen Tangenten ist $u = v + \frac{D-E}{B}$ und also

(4) $$2Bv^2 + 4Dv + F + 2\frac{D-E}{B}D = 0.$$

Die Länge $2a$ des zu OR und PS parallelen Durchmessers wird gleich der Differenz der Wurzeln dieser Gleichung sein. Also ist

$$a = \sqrt{\left(\frac{D}{B}\right)^2 - \frac{F}{2B} - \frac{D^2 - DE}{B^2}}.$$

Die Bedingung $\frac{b^4}{a^2} = k^2$ wird daher durch die Gleichung

(5) $$c^4B^4 + 2c^2B^2(D-E)^2 + (D-E)^4 = 8k^2(2DE - FB)B^2$$

ausgedrückt werden. Diese Gleichung ist vom vierten Grade in Be-

ziehung auf die Größe, die solche Kegelschnitte des Systems bestimmt, die die gegebene Bedingung erfüllen.

In diesem Falle hat die Aufgabe also 4 Lösungen. Das System und die neue Bedingung sind aber nicht unter sich unabhängig. Der Fall muß also als ein Grenzfall betrachtet werden [158]. Der Grenzübergang, der der Annahme, zwei der gegebenen Tangenten des Systems sollen zum Durchmesser $2a$ parallel sein, zugrunde liegt, hat zwar keinen Verlust an Lösungen, die in diesem Falle als uneigentlich hätten übersehen werden können, zur Folge gehabt, er kann aber das Zusammenfallen mehrerer Lösungen bewirkt haben. Da die 4 gefundenen Lösungen von einer irreduziblen Gleichung abhängen, muß in jeder von ihnen die gleiche Anzahl ξ von Lösungen der allgemeinen Aufgabe zusammengefallen sein. Diese allgemeine Aufgabe, in welcher keine die fünfte Bedingung betreffende Beziehung zwischen den Lagen der vier Tangenten und der konjugierten Durchmesser besteht, hat also 4ξ Lösungen, wo ξ eine ganze, positive Zahl ist. Also ist

$$2\alpha + \alpha' = \xi \cdot 4, \tag{6}$$

eine Gleichung, die in Verbindung mit (3) zur Bestimmung von α und α' dienen soll. Die einzigen ganzen, positiven Zahlen, die diese Gleichungen befriedigen, sind $\alpha = 3$, $\alpha' = 2$.

10. Der einem Kegelschnitte c_2 auferlegten Bedingung, mit einem gegebenen Kegelschnitte k_2 in solcher Verbindung zu stehen, daß es ein — und also unendlich viele — dem c_2 einbeschriebene Dreiecke gibt, die in Beziehung auf k_2 Polardreiecke sind, entsprechen Zahlen α und α', die man leicht durch Benutzung der Grenzkegelschnitte [168] finden kann. Ist nämlich in diesem Falle c_2 aus zwei Geraden zusammengesetzt, so muß die eine durch den Pol der andern in Beziehung auf k_2 gehen, und die Bedingung wird im allgemeinen von einer Doppelgeraden nicht erfüllt. Also ist $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$. Bekanntlich wird auch die Bedingung durch eine Gleichung ersten Grades zwischen den Koeffizienten der Gleichung des Kegelschnitts in Punktkoordinaten ausgedrückt. — Im dualistisch entsprechenden Falle ist $\alpha = 0$, $\alpha' = 1$.

[172] Bestimmung der Charakteristiken eines Systems; elementare Systeme. Zur Bestimmung der Anzahlen von Kegelschnitten eines Systems, die eine gegebene Bedingung erfüllen, braucht man in den Fällen, in welchen die Formel $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ anwendbar ist, außer den die Bedingung charakterisierenden Zahlen α und α', noch die Charakteristiken μ und μ' des Systems. Diese lassen sich zwar in den meisten Fällen durch sukzessive Einführung der das System bestimmenden vier Bedingungen finden [165]. Ein Mittel zur direkten Bestimmung, das sich auch dann anwenden läßt, wenn diese Bedingungen untrennbar sind, geben aber die Gleichungen [167] (1)

$$2\mu - \mu' = \lambda$$
$$2\mu' - \mu = \lambda'$$

ab. Die Bestimmung der Zahlen λ und λ' ist nämlich einfacher als die unmittelbare Abzählung von Kegelschnitten, da die Ausartungen aus Geraden und Punkten bestehen. Schwierigkeiten bietet zwar die Bestimmung der Koeffizienten, mit denen die verschiedenen Ausartungen abzuzählen sind, dar; diese lassen sich aber überwinden, entweder durch direkte Bestimmung der Ordnungen unendlich kleiner Größen, von welchen diese Koeffizienten nach den in [167] aufgestellten Regeln abhängen, oder indirekt durch die Betrachtung bekannter Spezialfälle, oder durch verschiedene Bestimmung derselben gesuchten Anzahl [62]. Eine Gelegenheit, den letzteren Weg einzuschlagen, verdankt man dem Umstande, daß dieselbe Zahl als die Charakteristik μ' eines Systems und die Charakteristik μ eines andern, bei dessen Bestimmung ein gegebener Punkt durch eine gegebene Tangente ersetzt ist, auftritt. Die nachfolgenden Beispiele werden diese verschiedenen Methoden beleuchten.

Die Anzahlen der Kegelschnitte, die durch gegebene Punkte gehen und gegebene Gerade berühren, sind zwar wohl bekannt, ja müßten als bekannt vorausgesetzt sein, um (nach [165]) die Charakteristiken anders bestimmter Systeme durch sukzessive Einführung von vier neuen Bedingungen zu finden. Sie lassen sich aber auch folgendermaßen als Charakteristiken der durch Punkte und Tangenten bestimmten, sogenannten elementaren Systeme herleiten. Als bekannt setzen wir hierbei nur voraus, daß ein Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte bestimmt ist, daß also ein Büschel die Charakteristik $\mu = 1$ hat. Der einem Büschel entsprechende Wert von λ ist offenbar $= 0$, und die Gleichungen [167] (1) geben sodann $\mu' = 2$, $\lambda' = 3$. Da der Büschel wirklich drei aus Geraden bestehende Kegelschnitte enthält, ist jeder von diesen einmal in λ' mitzuzählen.

Die Charakteristik μ' dieses Systems ist Charakteristik μ des durch einen Punkt und drei Gerade bestimmten Systems; λ ist auch hier $= 0$, also $\mu' = 4$, $\lambda' = 6$. Die drei sich hier vorfindenden Kegelschnitte, die aus zwei Geraden bestehen, deren Schnittpunkt auf einer der gegebenen Geraden liegt, sind also je zweimal in λ' mitzuzählen. Die Dualität ergibt die entsprechenden Bestimmungen der Zahlen μ, μ' λ und λ', die den durch vier gegebene Tangenten oder durch drei Tangenten und einen Punkt bestimmten Systemen zugehören. Dadurch erhält man auch die Charakteristiken $\mu = 4$, $\mu' = 4$ des durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmten Systems[1]), und man findet sodann $\lambda = 4$, $\lambda' = 4$. Hier kommt nur ein aus zwei Geraden bestehender Kegelschnitt vor: der Schnittpunkt der Geraden fällt in den Schnittpunkt der gegebenen

1) Daß dieses System in zwei Systeme mit den Charakteristiken $\mu = 2$, $\mu' = 2$ zerfällt, geht aus der Bestimmung seines Geschlechts hervor [79].



Tangenten. Dieser Kegelschnitt ist also in λ' viermal mitzuzählen. Die entsprechende Abzählung von λ erhält man mittels des Dualitätsprinzips. Die Herleitung der Koeffizienten, mit welchen die verschiedenen hier genannten Ausartungen auftreten, läßt sich übrigens unschwer direkt durch die Bestimmung der Ordnungen unendlich kleiner Größen bewerkstelligen.

[173] System von Kegelschnitten, die eine gegebene Kurve viermal berühren. Ein System von Kegelschnitten, die durch einfache Berührungen mit gegebenen Kurven bestimmt werden, enthält Ausartungen, von denen die hier genannten solche Spezialfälle sind, in welchen eine gegebene Kurve durch eine Gerade oder einen Punkt ersetzt ist, und die eben [172] für diese Spezialfälle gefundenen Abzählungen der Ausartungen haben allgemeine Gültigkeit. Andere Ausartungen werden hinzukommen, wenn die Kegelschnitte eine Kurve in mehreren Punkten berühren sollen. Auf diese Weise kann man die in [163] und [164] ausgeführten Resultate besonders für Kegelschnitte wieder finden.[1]) Als Beispiel werden wir aber hier einen weitergehenden Fall betrachten; wir wollen die Charakteristiken eines Systems von Kegelschnitten bestimmen, die eine gegebene Kurve c_n mit *Plücker*schen Singularitäten in vier Punkten berühren.

In Übereinstimmung mit den schon in [172] gefundenen ausgearteten Kegelschnitten der elementaren Systeme sind hier in λ' mitzuzählen:

1. einmal die $\frac{1}{2} d'(d'-1)$ Kegelschnitte, die aus zwei der d' Doppeltangenten bestehen;

2. zweimal die $d'(n-4)(n'-4)$ Kegelschnitte, die aus einer Doppeltangente und einer der durch einen ihrer $n-4$ Schnittpunkte gehenden $n'-4$ anderen Tangenten bestehen;

3. viermal die $d \cdot \frac{1}{2}(n'-4)(n'-5)$ Kegelschnitte, die aus zwei Tangenten bestehen, die die Kurve in einem der d Doppelpunkte schneiden.

Hierzu werden noch kommen:

4. dreimal die $e \cdot \frac{1}{2}(n'-3)(n'-4)$ Kegelschnitte, die aus zwei Tangenten bestehen, die die Kurve in einer der e Spitzen schneiden. Ein solcher Kegelschnitt ist nämlich der Grenzfall eines Kegelschnitts, der die Kurve in zwei Punkten berührt, deren Abstand von der Spitze unendlich klein erster Ordnung ist, während ihr Abstand unter sich von der Ordnung $\frac{3}{2}$ ist. Eine Gerade a, deren Abstand von der Spitze unendlich klein erster Ordnung ist, wird (Fig. 36) zwei solche sich demselben Grenzkegelschnitt nähernden Kegelschnitte berühren, und der Winkel zwischen a und der andern durch einen Punkt A von a gehenden Tangente a' an einen dieser Kegelschnitte ist von der Ordnung $\frac{3}{2}$; der Koeffizient ist also wirklich $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$. Diese Ordnungen lassen sich analytisch nach-

1) Dies wird als Übung empfohlen.

weisen; die Richtigkeit unserer Angaben wird aber ganz offenbar in dem Grenzfall, in welchem die hier unwesentlichen Bedingungen durch die ersetzt werden, daß die Kegelschnitte des Systems alle abgeplattet (Doppellinien) sein und durch einen gegebenen unendlich fernen Punkt gehen sollen. Übrigens kann man auch, da Ausartungen derselben Art schon dann vorkommen, wenn die Kegelschnitte des Systems c_n zweimal berühren und durch feste Punkte gehen, den gesuchten Koeffizienten dadurch indirekt bestimmen, daß in diesem Falle die Charakteristiken schon bekannt sind [164]. Man hat also

$$\lambda' = \tfrac{1}{2} d'(d'-1) + 2d'(n-4)(n'-4) + 2d(n'-4)(n'-5) + \tfrac{3}{2} e(n'-3)(n'-4)$$

und findet ebenso dualistisch

$$\lambda = \tfrac{1}{2} d(d-1) + 2d(n'-4)(n-4) + 2d'(n-4)(n-5) + \tfrac{3}{2} e'(n-3)(n-4).$$

Die Charakteristiken μ und μ' werden sodann ([167] (1)) durch

$$\mu = \tfrac{1}{3}(2\lambda + \lambda'),\ \mu' = \tfrac{1}{3}(2\lambda' + \lambda)$$

bestimmt und können mittels der *Plücker*schen Gleichungen durch drei der *Plücker*schen Zahlen der gegebenen Kurve ausgedrückt werden.

[174] System von Kegelschnitten, die mit einer gegebenen Kurve Berührung vierter Ordnung haben. Wir werden nun das System der Kegelschnitte betrachten, die mit einer Kurve c_n mit *Plücker*schen Singularitäten Berührung vierter Ordnung haben, sie also in fünf konsekutiven Punkten schneiden und fünf konsekutive Tangenten mit ihr gemeinschaftlich haben. Die einzigen Doppelgeraden, mit welchen das erstere der Fall ist, berühren c_n in ihren e Spitzen und e' Wendepunkten, und die einzigen, aus zwei Geraden bestehenden Kegelschnitte, mit welchen das letztere der Fall ist, haben den Doppelpunkt in einem der hier genannten Punkte, und um beide Bedingungen zu erfüllen, müssen die in diesen Punkten berührenden Kegelschnitte gleichzeitig beiden Gattungen von Ausartungen angehören. Sie werden also *Halphen*sche Ausartungen sein. Diese werden aber [167] sowohl in λ als in λ' mitgezählt, und zwar nach denselben Regeln wie die übrigen ausgearteten Kegelschnitte, die in diesen Zahlen einbegriffen sind.

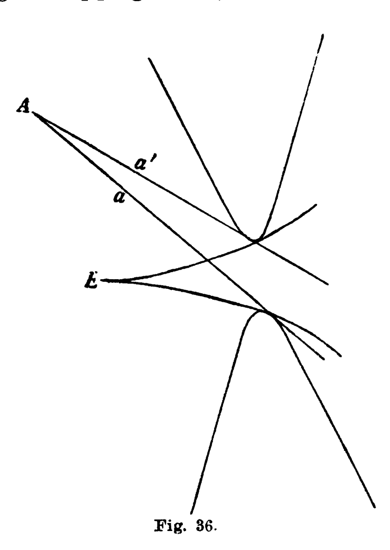


Fig. 36.

Ohne diese Regeln anzuwenden, haben wir wegen der Dualität

$$\lambda = Ae + Be',$$
$$\lambda' = Be + Ae',$$

wo A und B ganz bestimmte, aber vorläufig unbekannte ganze Zahlen sind. Daraus folgt, daß

$$\mu = \tfrac{1}{3}((2A + B)e + (A + 2B)e').$$
$$\mu' = \tfrac{1}{3}((A + 2B)e + (2A + B)e')$$

ist. Die Werte der Zahlen A und B lassen sich durch Betrachtung solcher Spezialfälle finden, für die man eine andere Bestimmung von μ und μ' besitzt. Ist z. B. c_n eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt D, so kann ein durch diesen gehender Kegelschnitt, der schon hier zwei Schnittpunkte hat, nicht fünf andere Schnittpunkte haben. Die einzigen Kegelschnitte des Systems, die durch D gehen, berühren also den einen oder den andern der durch diesen Punkt gehenden Zweige von c_n, und wir wissen aus [15], daß diese je für fünf der μ durch D gebenden Kegelschnitte des Systems zählen. Also wird $\mu = 10$. Da in diesem Falle $e = 0$, $e' = 3$ ist, so findet man $A + 2B = 10$. Betrachten wir sodann den Fall ($n = 3$, $e = e' = 1$), in welchem die Kurve c_n dritter Ordnung ist und eine Spitze in E hat. Dann haben wir schon gesehen, daß der in E berührende Kegelschnitt des Systems 6 konsekutive Schnittpunkte hat. Er wird also [15] für 6 der durch E gehenden μ Kegelschnitte des Systems zu zählen sein, und da er der einzige ist, der durch E geht, so ist in diesem Falle $\mu = 6$. Setzt man diesen Wert in den Ausdruck für μ ein, so findet man $A + B = 6$. Also ist $A = 2$, $B = 4$ und man findet sodann für μ und μ' die allgemeinen Ausdrücke

$$\mu = \tfrac{1}{3}(8e + 10e'),\ \mu' = \tfrac{1}{3}(10e + 8e').$$

Die Anzahl der Kegelschnitte dieses Systems, die eine neue Bedingung erfüllen, lassen sich durch einen Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ bestimmen, so lange die neue Bedingung nicht von einer *Halphen*schen Ausartung mit beliebiger Lage der Doppellinie und des doppelten Scheitels erfüllt wird. Im hier genannten Ausnahmefall muß man aber für die beiden Arten von *Halphen*schen Kegelschnitten, die dem System angehören, die Zahlen bestimmen, die wir in [170] ν und ν' genannt haben.

[175] Berücksichtigung von Bedingungen, die von *Halphen*schen Ausartungen befriedigt werden. Die Bestimmung der eben genannten Zahlen werden wir mit einer direkten analytisch-geometrischen Bestimmung der in [174] auf andere Weise gefundenen Koeffizienten A und B verbinden. In der Nähe eines Wendepunkts kann man, indem man einen etwaigen konstanten Koeffizienten in die Ordinate y einbezieht, die Kurve c_n durch die Reihe

$$y = x^3 + kx^4 + \cdots$$



darstellen. Im Punkte mit der unendlich kleinen Abszisse $x = t$ hat man also unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung

$$x = t,\ y = t^3,\ y' = 3t^2,\ y'' = 6t,\ y''' = 6,\ y^{IV} = 24k.$$

Die Gleichung eines Kegelschnittes und die hieraus gebildeten Differentialgleichungen können so geschrieben werden:

$$\frac{Ax + By + D}{y'} = \frac{Bx + Cy + E}{-1} = \frac{Dx + Ey + F}{-xy' + y} = \frac{A + 2By' + Cy'^2}{y''}$$
$$= \frac{3By'' + 3Cy'y''}{y'''} = \frac{4By''' + 3Cy''^2 + 4Cy'y'''}{y^{IV}}.$$

Sie ergeben als Bedingung für die Berührung vierter Ordnung mit c_n im Punkte $x = t,\ y = t^3$

$$\frac{At + Bt^3 + D}{3t^2} = \frac{Bt + Ct^3 + E}{-1} = \frac{Dt + Et^3 + F}{-2t^3} = \frac{A + 6Bt^2 + 9Ct^4}{6t}$$
$$= \frac{3Bt + 9Ct^3}{1} = \frac{2B + 15Ct^2}{2k}.$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, so gibt die letzte Gleichung $2B + 15Ct^2 = 0$; aus ihr und den übrigen Gleichungen findet man daher

$$\frac{A}{45t^4} = \frac{2B}{15t^2} = \frac{D}{-12t^5} = \frac{E}{-20t^3} = \frac{F}{5t^6} = \frac{C}{-1}.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes ist also

(1) $$45t^4x^2 + 15t^2xy - y^2 - 24t^5x - 40t^3y + 5t^6 = 0.$$

Geben wir hier x einen endlichen Wert, während t und y unendlich klein angenommen werden, so zeigt die Gleichung, die aus den Gliedern niedrigster Ordnung besteht, nämlich

$$y^2 - 15t^2xy - 45t^4x^2 = 0,$$

daß durch den Punkt (x, y) 4 Kegelschnitte des Systems gehen, die sich der Doppelgeraden $y^2 = 0$ nähern, und daß die Sehnen, die von diesen auf der durch x bestimmten Geraden abgeschnitten werden, den Wert $\pm\sqrt{405}\,t^2x$ haben, also von derselben Ordnung wie y sind. Die Doppelgerade ist also (s. [167]) viermal in λ mitzuzählen, ein Ergebnis, das wir in [174] durch Anwendung auf einen Spezialfall fanden.

Die Berührungspunkte der zu der y-Achse parallelen Tangenten werden durch die Gleichung

$$\tfrac{15}{2}t^2x - y - 20t^3 = 0$$

bestimmt, die mit (1) die Gleichung

$$5x^2 - 16tx + 20t^2 = 0$$

ergibt. Diese zeigt, daß eine durch einen unendlich kleinen Wert von

x bestimmte Tangente zwei Kegelschnitte des Systems berührt, und daß diese und die zu ihr parallele Tangente auf den Geraden $y = 0$ das Stück $\pm \frac{12}{5}\sqrt{-1} \cdot t$ abschneidet, das von derselben Ordnung wie x ist. Der Doppelscheitel ist also 2-mal in λ' mitzuzählen, was wir bereits in [174] fanden.

Die Quadrate der hier bestimmten Stücke $\sqrt{405 t^2}$ und $\frac{12}{5}\sqrt{-1}\,t$ sind eben die Größen, die wir in [170] u und v nannten, und die zur Bestimmung der Kegelschnitte des Systems dienen, die eine *Halphen*sche Bedingung erfüllen. Man hat also mit den Bezeichnungen von [170]

$$u = 405 t^4 + \cdots, \; v = -\tfrac{144}{25} t^2 + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder auch Potenzen von t mit ungeraden Exponenten enthalten. Also wird

$$\nu = 4, \; \nu' = 2.$$

Auf Grund der Dualität sieht man, daß die einer Spitze zugehörigen *Halphen*schen Kegelschnitte durch die Zahlen $\nu = 2$, $\nu' = 4$ charakterisiert werden. Suchen wir z. B. die Anzahl der Kegelschnitte, die mit einer Kurve mit gegebenen *Plücker*schen Zahlen Berührung vierter Ordnung haben und deren zu einer gegebenen Geraden parallelen Durchmessern ein gegebener Parameter $\frac{b^2}{a}$ entspricht, so wissen wir schon aus [170], daß dieser Bedingung die Zahlen $\sigma = \sigma' = 1$ entsprechen. Nach der in [170] aufgestellten Regel werden dann die dem Systeme angehörigen $e + e'$ *Halphen*schen Kegelschnitte alle den Beitrag 2 (die kleinere der Zahlen $\nu\sigma'$ und $\nu'\sigma$) zur Zahl π leisten. Da weiter der hier aufgestellten fünften Bedingung die Zahlen $\alpha = 3$, $\alpha' = 2$ entsprechen ([171] (8) und (9)), so wird die gesuchte Anzahl

$$3\mu + 2\mu' - 2(e + e') = \tfrac{1}{3}(38 e + 40 e')$$

sein, wobei μ und μ' die in [175] gefundenen Werte haben.

[176] Kegelschnitte, die einer doppelten und einer dreifachen Bedingung unterworfen sind. Die vorangehenden Regeln setzen voraus, daß wenigstens eine der aufgestellten, unter sich unabhängigen Bedingungen einfach ist, sie sind also nicht auf den Fall anwendbar, in welchem ein Kegelschnitt durch eine dreifache Bedingung B_3 und eine doppelte Bedingung B_2 bestimmt werden soll. Auch für die Anzahl der Lösungen dieser Aufgabe werden wir einen einfachen Ausdruck finden, der anwendbar bleibt, so lange es nicht solche *Halphen*sche Kegelschnitte gibt, die zwar gleichzeitig B_2 und B_3 befriedigen würden, wenn man nur die Lagen der Doppelgeraden und des Scheitels, nicht aber die übrige Bestimmung dieser Formen als Grenzformen (s. [170]) in Betracht zöge. In der folgenden Untersuchung werden wir voraussetzen, daß es solche nicht gibt. Im entgegengesetzten Falle würde man übrigens auch auf dem hier einzuschlagenden Wege etwaige *Halphen*sche



Kegelschnitte berücksichtigen und die davon herrührenden subtraktiven Glieder bestimmen können.

Wir werden durch (μ^2), $(\mu\mu')$ und (μ'^2) die Anzahlen der Kegelschnitte bezeichnen, die B_3 erfüllen und beziehungsweise durch zwei gegebene Punkte gehen oder durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren oder endlich zwei gegebene Gerade berühren. Wie in [168] betrachten wir die Korrespondenz zwischen Punkten P und P' auf einer festen Geraden g, in welchen diese von Kegelschnitten c_2 und c_2' geschnitten wird, die sich in vier Punkten eines festen Kegelschnittes k_2 schneiden. Hier soll aber angenommen werden, daß c_2 der dreifachen Bedingung B_3, c_2' der doppelten Bedingung B_2 unterworfen ist. Die Kegelschnitte, die durch P gehen und B_3 befriedigen, bilden ein System mit den Charakteristiken (μ^2) und $(\mu\mu')$. Daß ein Kegelschnitt c_2 dieses Systems k_2 in vier solchen Punkten schneide, durch welche ein Kegelschnitt c_2' geht, der die Bedingungen B_2 erfüllt, ist eine neue unabhängige Bedingung. Es gibt also [168] $\alpha(\mu^2) + \alpha'(\mu\mu')$ solche Kegelschnitte, wo α und α' ausschließlich von B_2 abhängen, und somit $2\alpha(\mu^2) + 2\alpha'(\mu\mu')$ Punkte P', die P entsprechen. Da $\alpha(\mu^2) + \alpha'(\mu\mu')$ die erste Charakteristik des Systems von Kegelschnitten c_2 ist, so findet man dieselbe Anzahl, wenn P auf k_2 liegt; diese Zahl wird daher die Charakteristik der Kegelschnitte c_2' sein. Durch einen Punkt P' von g gehen also ebensoviele Kegelschnitte c_2', deren entsprechende Kegelschnitte c_2 die Gerade g in $2\alpha(\mu^2) + 2\alpha'(\mu\mu')$ dem Punkte P' entsprechenden Punkten P schneiden. Koinzidenzen finden also in $4\alpha(\mu^2) + 4\alpha'(\mu\mu')$ Punkten statt. Von diesen fallen aber $2\alpha(\mu^2) + 2\alpha'(\mu\mu')$ in die Schnittpunkte der Geraden g mit k_2. Die übrigen $2\alpha(\mu^2) + 2\alpha'(\mu\mu')$ werden die Schnittpunkte der Geraden g mit $\alpha(\mu^2) + \alpha'(\mu\mu')$ Kegelschnitten sein, die, wenn man sich nur an die punktgeometrische Bestimmung hält, gleichzeitig B_3 und B_2 erfüllen. Unter diesen geben aber etwaige Doppelgeraden keine wirklichen Lösungen; denn wegen der Unabhängigkeit der Bedingungen B_2 und B_3 darf man annehmen, daß die sich auf dieselbe Doppelgerade reduzierenden Kegelschnitte c_2 und c_2' nicht dieselben Scheitel haben.

Die die Bedingung B_3 erfüllenden Doppelgeraden bilden ein System von ∞^1 Kegelschnitten, das durch diese dreifache Bedingung und die Bedingung, daß die Systemkurven Doppelgerade sind, bestimmt wird; seine Charakteristiken sind nach [167] (1)

$$\mu = 2(\mu^2) - (\mu\mu') \quad \text{und} \quad \mu' = 2(\mu\mu') - (\mu'^2).$$

Unter diesen Doppelgeraden sind solche zu bestimmen, die die Bedingung erfüllen, daß ihre Scheitel, die Schnittpunkte der Doppellinie mit dem Hilfskegelschnitt k_2, und die Scheitel, die die doppelte Bedingung B_2 auf derselben Doppelgeraden bestimmen würde, in Involution sind (vgl. [168]). Die Anzahl dieser Kegelschnitte wird durch einen Aus-

druck von der Form $\alpha''\mu + \beta''\mu'$ bestimmt.[1]) Zieht man diese Anzahl uneigentlicher Lösungen von der gefundenen Anzahl $\alpha(\mu^2) + \alpha'(\mu\mu')$ ab, so findet man für die Anzahl ζ der eigentlichen Kegelschnitte, die gleichzeitig B_3 und B_2 befriedigen, einen Ausdruck von der Form

$$\zeta = \beta(\mu^2) + \beta'(\mu\mu') + \beta''(\mu'^2), \tag{1}$$

wo β, β' und β'' allein von der Bedingung B_2 abhängen.

Um diese Koeffizienten zu bestimmen, braucht man also nur B_3 zu spezialisieren. Wenn die dreifache Bedingung B_3 eine Doppelgerade mit noch unbestimmten Scheiteln ergibt, so wird $(\mu^2) = (\mu\mu') = 0$, $(\mu'^2) = 1$ (weil dann eben zwei Tangenten die Scheitel bestimmen werden), also $\zeta = \beta''$. Also ist β'' die Anzahl der einer Doppelgeraden von gegebener Lage zugehörigen Scheitel, die die Bedingung B_2 erfüllen. Ebenso findet man durch die Betrachtung einer Bedingung B_3, der $(\mu^2) = 1$, $(\mu\mu') = 0$, $(\mu'^2) = 0$ entspricht, daß β die Anzahl der Geradenpaare eines gegebenen Büschels ist, die B_2 erfüllen.

Übrigens kann man alle drei Zahlen β, β', β'' dadurch finden, daß man drei der Anzahlen (μ^3), $(\mu^2\mu')$, $(\mu\mu'^2)$, (μ'^3) der Kegelschnitte bestimmt, die B_2 erfüllen und außerdem durch 3, 2 1, 0 gegebene Punkte gehen und beziehuugsweise 0, 1, 2, 3 gegebene Gerade berühren. Ersetzt man in der Formel (1) B_3 durch diese Bedingungen, so findet man:

$$(\mu^3) = \beta + 2\beta' + 4\beta'',$$
$$(\mu^2\mu') = 2\beta + 4\beta' + 4\beta'',$$
$$(\mu\mu'^2) + 4\beta + 4\beta' + 2\beta'',$$
$$(\mu'^3) = 4\beta + 2\beta' + \beta''.$$

Die hieraus folgenden Ausdrücke $2(\mu^3) - (\mu^2\mu') = 4\beta''$ und $2(\mu'^3) - (\mu\mu'^2) = 4\beta$ führen übrigens auf die oben gegebenen Bestimmungen von β'' und β; der Faktor 4 ist in [172] erklärt.

Durch eine Kombination verschiedener Methoden werden wir die Werte von β, β' und β'' bestimmen, die einer Berührung zweiter Ordnung mit einer gegebenen Kurve c_n mit *Plücker*schen Singularitäten n, n', d, d′, e, e' entsprechen. Es folgt unmittelbar aus der genannten Bedeutung von β und β'', daß $\beta = \beta'' = 0$ ist. Daraus wird folgen, daß in diesem Falle

$$(\mu^3) = \tfrac{1}{2}(\mu^2\mu') = \tfrac{1}{2}(\mu\mu'^2) = (\mu'^3) = 2\beta'$$

ist. Da die Bestimmung von (μ^3) in der allgemeinen *Jonquières*schen Formel inbegriffen ist, wird die gestellte Aufgabe schon hiermit gelöst sein. Die folgenden Betrachtungen werden es aber ermöglichen, die

1) α'' wird übrigens 0 sein, weil die einzuführende neue Bedingung lediglich die Bestimmung der Scheitel betrifft.

direkte Bestimmung auf einen sehr einfachen Fall zu beschränken. Die zwei ersten der angeführten Zahlen sind die Charakteristiken in dem System von Kegelschnitten, die durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und mit c_n Berührung zweiter Ordnung haben. Die Anzahl λ der Doppelgeraden dieses Systems ist null. Die Anzahl λ' der Kegelschnitte mit Doppelpunkten umfaßt aber folgende Kegelschnitte:

1. einmal die e', die aus der Geraden AB und einer der e' Wendetangenten bestehen;

2. K-mal, wo K eine vorläufig unbekannte ganze, positive Zahl ist, $n + 2n'$ Kegelschnitte, die aus einer Tangente an c_n und einer Geraden durch den Berührungspunkt bestehen;

3. L-mal, wo L eine vorläufig unbekannte ganze, positive Zahl ist, e Kegelschnitte, die aus zwei, sich in einer Spitze von c_n schneidenden Geraden bestehen. Also wird

$$\lambda = 0,\ \lambda' = e' + K(n + 2n') + Le,$$

woraus folgt, daß

$$(\mu^3) = \tfrac{1}{3}(e' + K(n + 2n') + Le)$$

ist. Für die Anzahl (μ'^3) findet man den dualistisch entsprechenden Ausdruck. Die Gleichung $(\mu^3) = (\mu'^3)$ ergibt sodann

$$K(n' - n) = (L - 1)(e' - e).$$

Da diese Gleichung für alle algebraischen Kurven mit *Plücker*schen Singularitäten gelten soll, muß sie mit der einzigen Gleichung, die immer zwischen diesen vier *Plücker*schen Zahlen stattfindet, nämlich $e' - e = 3(n' - n)$, identisch sein. Also ist $K = 3(L - 1)$. Es genügt nun, die Aufgabe in einem einzelnen Falle zu lösen. Ist die gegebene Kurve z. B. ein Kegelschnitt $(n = n' = 2, e = e' = 0)$, so ergibt eine einfache Anwendung des Korrespondenzprinzips, daß $(\mu^3) = 6$ ist. Also wird $K = 3$, $L = 2$. — Eine direkte Bestimmung der Zahl L würde übrigens nicht schwierig sein. Am bequemsten setzt man sie in Verbindung mit dem Wert von λ, der dem System von Kegelschnitten zugehört, die zwei Gerade berühren und mit c_n Berührung zweiter Ordnung haben.

Der gesuchte Wert von β' wird nun

$$\beta' = \tfrac{1}{2}(3n + e') = \tfrac{1}{2}(3n' + e).$$

[177] Fünffache Bedingungen. Zur Bestimmung der Kegelschnitte, die fünf untrennbaren Bedingungen unterworfen sind, kann man zwar die Methoden nicht mehr anwenden, die zur Zusammensetzung unabhängiger Bedingungen dienen. Sie lassen sich jedoch unter den Kegelschnitten eines vier Bedingungen unterworfenen Systems aufsuchen. Dies geschieht durch eine Anwendung der gewöhnlichen abzählenden Methoden, bei welcher in der Regel einige von Ausnahme-

kurven herrührende, uneigentliche Lösungen auszuschließen sind (vgl. [161]).

Die Kegelschnitte, die Berührung fünfter Ordnung mit einer gegebenen Kurve c_n haben, lassen sich z. B. entweder unter denen, die eine Berührung vierter Ordnung haben, oder unter denen, die eine Berührung dritter Ordnung und eine erster Ordnung haben, oder unter denen, die zwei Berührungen zweiter Ordnung haben, aufsuchen. Im ersten Fall sucht man die Anzahl der Fälle, in welchen der Berührungspunkt mit einem Schnittpunkt zusammenfällt, in den anderen die der Fälle, in welchen zwei Berührungspunkte zusammenfallen. Dabei kann man, wie beim Beweise der *Jonquières*schen Formel [136], die ja in diesem Fall nicht selbst anwendbar ist [162], den *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatz anwenden.

Betrachten wir z. B. die Korrespondenz zwischen dem Berührungspunkt P_1 und einem Schnittpunkt P_2 einer gegebenen Kurve c_n, der wir *Plücker*sche Singularitäten beilegen, mit einem Kegelschnitte, der mit ihr Berührung vierter Ordnung haben soll. Einem Punkte P_1 entsprechen dann $2n - 5$ Punkte P_2. Durch einen Punkt P_2 gehen nach [174] $\frac{1}{3}(8e + 10e')$ Kegelschnitte, die mit c_n Berührung vierter Ordnung haben. Derjenige, der c_n eben in P_2 berührt, zählt [15] für 5. Dem Punkt P_2 werden also $\frac{1}{3}(8e + 10e') - 5$ Punkte entsprechen. Die erste dieser Bestimmungen zeigt, daß die Wertigkeit der Korrespondenz 5 ist. Es wird also

$$2n + \tfrac{1}{3}(8e + 10e') - 10 + 10p$$

Koinzidenzen geben. Außer in den Berührungspunkten der gesuchten eigentlichen Kegelschnitte werden solche auch in den e' Wendepunkten und e Spitzen stattfinden, wenn der in einem dieser Punkte berührende Kegelschnitt eine Doppelgerade (hier ein *Halphen*scher Kegelschnitt) wird, und zwar je eine Koinzidenz in jedem dieser Punkte.

Es genügt, wenn man sich hierüber für einen dieser Punkte überzeugt. Man kann nämlich dem gefundenen Ausdruck für die Anzahl der Koinzidenzen die in Beziehung auf dualistisch entsprechende Singularitäten symmetrische Form geben:

$$4n + 4n' + 22(p - 1).$$

Da nun die den Kegelschnitten auferlegte Bedingung zu sich selbst dualistisch ist, müssen auch die abzuziehenden Glieder e und e' denselben Koeffizienten haben.

Suchen wir nun die Anzahl der Koinzidenzen der eben betrachteten Korrespondenz zwischen P_1 und P_2, so findet man (Fig. 37), daß, wenn eine Spitze E reell ist (vgl. [47]), E auf der konvexen Seite eines Kegelschnittes liegt, der in einem hinreichend naheliegenden Punkt P_1 mit der Kurve eine Berührung vierter Ordnung hat; denn die Krümmung der Kurve, die in P_1 denselben Wert hat wie die des Kegel-

schnittes, wächst auf der Kurve P_1E ins Unendliche. Daraus wird folgen, daß der dem Punkt E benachbarte Schnittpunkt P_2 der zwei Kurven auf dem anderen Zweig der Kurve e_n liegen muß. Da sich nun P_1 und P_2 in der Nähe von E gegenseitig eindeutig entsprechen, wird nur eine Koinzidenz in E stattfinden. Um die gesuchte Anzahl zu finden, muß man also von der Anzahl der Koinzidenzen $e + e'$ oder $n + n' + 4(p - 1)$ abziehen. Mit *Cayley* (s. u.) könnte man die Koeffizienten auch durch genauere Untersuchung eines Spezialfalles bestimmen.

Die Anzahl der Kegelschnitte, die mit c_n Berührung fünfter Ordnung haben, ist also

$$3n + 3n' + 18p - 18.$$

In ähnlicher Weise findet man die Anzahlen der Kegelschnitte, die anderen fünffachen Berührungsbedingungen unterworfen sind.

Ursprünglich hat *Cayley* diese Anzahlen durch Anwendung seiner funktionalen Methode [34] gefunden, für die die Bestimmung der eben gefundenen Anzahl das einfachste Beispiel liefert. *Cayley* setzt voraus, daß sie eine Funktion dreier *Plücker*scher Zahlen sein muß. Um einen symmetrischen Ausdruck zu bekommen, wählt er die Ordnung n, die Klasse n' und die Anzahl α, die sowohl gleich $3n + e'$ als auch gleich $3n' + e$ ist. Die gesuchte Anzahl ist also $\varphi(n, n', \alpha)$, wo φ eine noch unbekannte Funktion ist. Dieser Ausdruck muß auch auf den Fall anwendbar sein, in welchem die Kurve aus zwei Kurven mit den Zahlen n_1, n_1', α_1 und n_2, n_2', α_2 zusammengesetzt ist. (Nur darf diese Zusammensetzung nicht Gerade und Punkte umfassen, weil die *Plücker*schen Gleichungen nicht auf diese anwendbar sind). Die Zusammensetzung wird zur Folge haben, daß die gesuchten Kegelschnitte die verlangte Berührung mit der einen oder der anderen Kurve haben. Also wird

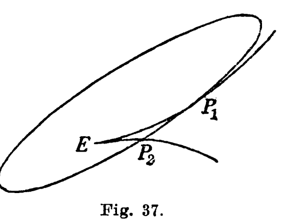


Fig. 37.

$$\varphi(n_1 + n_2,\ n_1' + n_2',\ \alpha_1 + \alpha_2) = \varphi(n_1, n_1', \alpha_1) + \varphi(n_2, n_2', \alpha_2).$$

Aus dieser Differenzengleichung folgt, daß die gesuchte Anzahl

$$\varphi(n, n', \alpha) = An + Bn' + C\alpha$$

wird, wo A, B, C vorläufig unbekannte Koeffizienten sind. Wegen der dualistischen Symmetrie ist $A = B$; A und C lassen sich sodann durch die Betrachtung einfacher Spezialfälle finden.

Bei der Lösung der übrigen Aufgaben wird der Umstand, daß der gesuchte Kegelschnitt, wenn die Kurve c_n eine zusammengesetzte ist, einige (eine) der vorgeschriebenen Berührungen mit der einen Kurve, andere mit der anderen haben kann, den Differenzengleichungen eine kompliziertere Form geben. Sie werden jedoch alle lösbar, und die

Konstanten lassen sich durch die Betrachtung von Spezialfällen bestimmen.

Anmerkung. Die ausdrückliche Aufstellung der Voraussetzung, daß die hier gesuchten Anzahlen von Kegelschnitten allein von n, n' und α (oder von den *Plücker*schen Zahlen) abhängen, war deswegen notwendig (vgl. [33] und [34]), weil es [5] verschiedene solche Gattungen (Mengen) von Kurven mit denselben Zahlen n, n', α gibt, die nicht durch kontinuierliche Änderung gewisser Parameter ineinander übergehen. Daß die für die Anwendung der funktionellen Methode notwendige Voraussetzung in den hier vorliegenden Fällen erfüllt ist, darüber könnte man sich jedoch durch eine vorläufige Anwendung des *Cayley-Brill*schen Korrespondenzsatzes Sicherheit verschaffen. Wenn man sich nur hierbei darüber Rechenschaft abgelegt hat, daß sowohl die Gesamtzahl der Koinzidenzen als auch die Anzahlen solcher Koinzidenzen, die keine Lösungen der gestellten Aufgabe ergeben, lediglich von den *Plücker*schen Zahlen abhängen, so darf man die funktionelle Methode anwenden, ohne sich um die Bestimmung der Koeffizienten dieser Koinzidenzen zu kümmern. Auf diese Weise werden die von *Cayley* durch die funktionale Methode gefundenen Resultate[1]) völlig sichergestellt. Übrigens erfordert ja auch die funktionale Methode Bestimmungen von Koeffizienten, die eben die gleichen sein würden, die bei der Anwendung des Korrespondenzsatzes am schwierigsten wären.

[178] Übungsaufgaben. 1. Welche Werte von α und α' [171] entsprechen der einem Kegelschnitt auferlegten Bedingung, einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich zu sein?

2. Die Punkte P_1 einer Kurve c_1 von der Ordnung n_1 und die Tangenten t_2 einer Kurve c_2 von der Klasse n_2' sind so aufeinander bezogen, daß jedem Punkt P_1 ν_2 Tangenten t_2 und jeder Tangente t_2 ν_1 Punkte P_1 entsprechen. Wie viele Kurven c von der Ordnung n und der Klasse n' werden einem gegebenen System mit den Charakteristiken μ und μ' angehören und gleichzeitig durch einen Punkt P_1 gehen und die entsprechende Tangente t_2 berühren? — Anwendung auf den Fall, in welchem c_1 und c_2 zusammenfallen und P_1 der Berührungspunkt der Tangente t_2 ist. — Wie läßt sich das gefundene, allgemeine Resultat im Falle $n = n' = 2$ aus der geometrischen Bedeutung der Zahlen α und α' herleiten?

3. Suche die Charakteristiken der Systeme von ∞^1 Kegelschnitten, die mit einer gegebenen Kurve entweder a) zwei Berührungen zweiter

1) Seine Ergebnisse hat *Cayley* in den Philosophical Transactions (1865) p. 99 (*Papers* VI, p. 216) im Anschluß an die früher in Zeuthens Dissertation (*Kjöbenhavn* 1865) gefundenen Anzahlen von Kegelschnitten, die höchstens vierfachen Berührungsbedingungen mit gegebenen Kurven unterworfen sind, aufgestellt.

Ordnung oder b) eine Berührung dritter Ordnung und eine erster Ordnung haben.

Auflösung: a) $\mu = \frac{1}{2}(3n' + e)^2 - 3(3n' + e) - 8e - 9e'$,

$$\mu' = \frac{1}{2}(3n' + e)^2 - 3(3n' + e) - 9e - 8e';$$

b) $\lambda = 4d + 4d' + 4e(n - 3) + 5e'(n - 3)$

usw.

4. Von der Betrachtung ausgehend, daß die Evolute einer Kurve (mit *Plücker*schen Singularitäten) Ort der Mittelpunkte der Kreise ist, die mit ihr Berührung zweiter Ordnung haben, soll man ihre Ordnung und die Anzahl ihrer Spitzen bestimmen (vgl. 77).

5. Wenn ein Kegelschnitt einen gegebenen Brennpunkt F und mit einer gegebenen Kurve c_n eine Berührung zweiter Ordnung hat, so wird der Ort des anderen Brennpunktes die Katakaustika von F in Beziehung auf c_n genannt. Suche die *Plücker*schen Zahlen der Katakaustika, wenn c_n gegebene *Plücker*sche Zahlen hat. Welche optische Bedeutung werden die Anzahlen der Doppeltangenten der Katakaustika haben, und wie erklärt man ihre Wendetangenten?

6. Welche Werte von β, β', β'' entsprechen [176] den einem Kegelschnitt auferlegten Bedingungen, eine gegebene, allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung in einem Punkte zu berühren und in einem anderen rechtwinklig zu schneiden?

7. Suche die Anzahl der gleichseitigen Hyperbeln, die mit einer gegebenen Kurve (mit *Plücker*schen Singularitäten) Berührung vierter Ordnung haben.

8. Suche die Anzahl der Kegelschnitte, die ein gegebenes Polardreieck haben und einen gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten berühren.

9. Suche die Anzahl der Kegelschnitte, die die Seiten eines gegebenen Sechsecks in demselben Verhältnis teilen.

c) Systeme von Flächen.

[179] Multiplikative Zusammensetzung. Die Aufgaben über die Bestimmung von Kurven, z. B. Kegelschnitten, im Raume oder von Flächen lassen sich teilweise dadurch lösen, daß man sie auf die Aufgaben zurückführt, die Kurven in einer Ebene betreffen, so z. B. durch die Bestimmung der Projektionen der gesuchten Kurven oder der scheinbaren Kontur der gesuchten Fläche, oder die der Schnittkurve der zu einer Raumkurve gehörigen Tangentenfläche oder der gesuchten Fläche. Teilweise lassen sich jene Aufgaben auch mehr direkt durch dieselben Methoden erledigen, die wir zur Bestimmung der Kurven in einer Ebene benutzt haben. Der *Jonquières*sche Satz, der durch den *Cayley-Brill*schen

Korrespondenzsatz bewiesen wird, muß z. B. auch für die Schnittpunkte einer Raumkurve mit Flächen im Raum gelten [138] und zur Bestimmung von Flächen, die mit einer gegebenen Raumkurve Berührungen von gegebener Ordnung haben sollen, benutzt werden können. Die Erhöhung der Zahl der Dimensionen wird aber auch die Anzahl und den Umfang der sich hier darbietenden Aufgaben erweitern. Hier, wo wir nur die Methoden der abzählenden Geometrie lehren sollen, müssen wir uns auf solche Erörterungen und Beispiele beschränken, die zeigen werden, wie es in der Tat möglich ist, das so eröffnete größere Feld zu beherrschen. Der Übergang zu diesem Gebiet wird es auch verständlich machen, wie man weiter von hier aus zu Gebilden von noch höherer Dimension übergehen kann.

Was wir in [160] von der Übertragung der Bestimmung eines Punktes in einem mehrdimensionalen Raum auf die einer ebenen Kurve gesagt haben, wird auch von der Übertragung auf die Bestimmung anderer Gebilde gelten, die eindeutig durch gewisse Parameter bestimmt werden, also auf die Bestimmung einer Fläche gegebener Ordnung m, beziehungsweise gegebener Klasse m''. Halten wir uns an den ersten dieser sich dualistisch entsprechenden Fälle, so geben die

$$r = \tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3) - 1$$

Verhältnisse der Koeffizienten der Gleichung, die die Fläche in Punktkoordinaten darstellt, solche Parameter ab. Ist nun $r = r_1 + r_2 + \cdots r_s$, und unterwirft man die Fläche gleichzeitig einer r_1-fachen, einer r_2-fachen, ... einer r_s-fachen Bedingung, die sich alle durch Punktkoordinaten vollständig ausdrücken lassen, und die je mit nur linearen Bedingungen verbunden (z. B. denen durch $r - r_1$, $r - r_2$ ... $r - r_s$ Punkte zu gehen) beziehungsweise $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ Flächen liefern würden, so wird es $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ — oder unendlich viele — solche Flächen geben. Es kann aber geschehen, daß die abgezählten, durch Punktkoordinaten ausgedrückten Lösungen verschiedenartig sind. Um die zu finden, die man eigentlich sucht, muß man also die fremdartigen ausscheiden, und wenn letztere in unendlicher Anzahl vorkommen, so wird die gefundene Zahl bedeutungslos. Letzteres kann aber, wenigstens wenn die zuletzt einzuführenden Bedingungen einfach sind, wie in [161] dadurch vermieden werden, daß man bei der sukzessiven Einführung sogleich die zuerst auftretenden uneigentlichen Lösungen ausscheidet, so daß die folgende Bedingung wieder durch Multiplikation eingeführt werden kann, ohne daß man zu Aufgaben gelangt, die in der Tat unendlich viele Lösungen haben; in dieser Weise kann man fortfahren.

Das einfachste Beispiel zu diesen Bemerkungen wird die Bestimmung einer Fläche liefern, die durch r_1 Punkte gehen, r_2 Geraden und r_3 Ebenen berühren soll, wo $r_1 + r_2 + r_3 = r$ ist. Die ersten r_1 Bedingungen sind linear. Um die übrigen in Punktkoordinaten aus-

zudrücken, muß man sie folgendermaßen umschreiben: die Fläche soll r_2 Gerade je in zwei zusammenfallenden Punkten und r_3 Ebenen je in Kurven mit einem Doppelpunkt schneiden. Ein Büschel von Flächen m^{ter} Ordnung enthält $2(m-1)$ Flächen, die eine Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; er schneidet eine Ebene in einem Büschel von Kurven m^{ter} Ordnung und unter diesen haben nach [35] 1 $3(m-1)^2$ einen Doppelpunkt. Die Anzahl der gesuchten Flächen wird also $(2(m-1))^{r_2}(3(m-1)^2)^{r_3}$ oder unendlich sein. Letzteres wird eintreten, wenn $r_1 < \frac{1}{6}m(m-1)(m+1)+2$ ist, weil man dann durch die r_1 gegebenen Punkte unendlich viele Flächen legen kann, die aus einer Doppelebene und einer Fläche $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen — also unmittelbar die übrigen Bedingungen erfüllen, oder wenn

$$r_1 + r_2 < \tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3) - 3m + 2$$

ist, weil es dann unendlich viele Flächen mit einer Doppelgeraden gibt, die die ersten $r_1 + r_2$ Bedingungen erfüllen. Eine Fläche mit einer Doppelgeraden in der z-Achse wird nämlich, da in ihrer Gleichung alle Glieder wenigstens vom zweiten Grad in Beziehung auf x und y sein müssen, $\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3) - 3m - 2$ Parameter enthalten, und wenn die Lage der Doppelgeraden unbestimmt ist, noch vier weitere. Hat r_1 oder $r_1 + r_2$ eben den einen oder anderen hier genannten Wert, so gibt es eine endliche Zahl der genannten Ausnahmeflächen und die Anzahl der hiervon herrührenden Lösungen der durch die Formel wirklich gelösten punktgeometrischen Aufgabe muß man von der gefundenen Anzahl abziehen, um die Anzahl der Flächen zu erhalten, die eigentliche Berührungen haben. Die so gefundene Anzahl μ kann weiter benutzt werden zur Bestimmung der Anzahl von Flächen, die man erhalten wird, wenn ein gegebener Punkt mit einer Geraden oder einer Ebene vertauscht wird, die die Fläche berühren soll. Das durch die Wegnahme des gegebenen Punktes entstehende System wird dann beziehungsweise $\mu \cdot 2(m-1)$ und $\mu \cdot 3(m-1)^2$ Flächen enthalten, die die Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten oder die Ebene in einer Kurve mit einem Doppelpunkt schneiden, und da das System (für unter sich unabhängige Lagen der gegebenen Punkte, Geraden und Ebenen [158]) nur eine endliche Anzahl von Ausnahmeflächen, die übrigens dann auch andere Gestalt annehmen können, enthält, so sind nur die endlichen Anzahlen von den gefundenen abzuziehen, um die Anzahl von Flächen zu finden, die mit der neu eingeführten Geraden oder Ebene eine wirkliche Berührung haben. Auf dieselbe Weise kann man noch einen Punkt mit einer Geraden oder einer Ebene vertauschen usw. Dabei wird jedoch die Bestimmung sowohl der abzuziehenden Zahlen als auch der Koeffizienten, mit welchen sie auftreten, rasch steigende Schwierigkeiten bereiten, und wir werden die Rechnungen (in [183]) nur für $m = 2$ durchführen, wobei wir auch andere Hilfsmittel heranziehen müssen.



Ausnahmeflächen derselben Natur kommen bei der Einführung von Berührungen mit gegebenen Kurven oder Flächen vor. Derartige Bestimmungen werden jedoch, wie wir in [180] sehen werden, erleichtert, wenn man die Aufgaben bereits für gegebene Gerade und Ebenen gelöst hat.

Bei anderen Aufgaben sind andere Ausnahmeflächen zu beachten. In einem System von ∞^1 Flächen, von welchen μ durch einen gegebenen Punkt gehen, gibt es z. B. $A\mu$ — oder unendlich viele —, die eine gegebene Raumkurve in vier Punkten schneiden, die in derselben Ebene liegen, und $B\mu$ — oder unendlich viele —, die eine gegebene Fläche in einer Raumkurve schneiden, die eine vierfache Tangentialebene hat, wo A und B Ausdrücke sind, die von der gegebenen Kurve oder Fläche abhängen. Uneigentliche Lösungen wird man aber antreffen, wenn das System schon eine aus einer Ebene und einer Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammengesetzte Fläche enthält. Führt man sodann, ohne im voraus die uneigentlichen Lösungen auszuschließen, noch eine neue Bedingung derselben Art durch Multiplikation mit dem ihr entsprechenden Faktor ein, so bekommt man einen bedeutungslosen Ausdruck, weil die Anzahl der uneigentlichen Lösungen dann unendlich ist.

Die Bestimmung des hier genannten Ausdrucks B würde schwierig sein. Die Zahl A läßt sich dagegen durch wiederholte Anwendung des Korrespondenzsatzes bestimmen. Bei ihrer Bestimmung darf man, um eine Multiplikation aller Glieder durch μ zu vermeiden, voraussetzen, daß das System ein Büschel ist. Die gegebene Kurve c_n, der wir keine singulären Punkte beilegen werden, sei von der Ordnung n und dem Geschlechte p. Man findet dann (ungefähr wie in [133]) die folgenden Resultate: Durch zwei gegebene Punkte von c_n gehen

$$(mn-1)(n-3)-p$$

Ebenen, die c_n in zwei anderen Punkten schneiden, welche auf derselben Fläche des Büschels liegen; durch einen gegebenen Punkt von c_n gehen

$$\tfrac{1}{2}(mn-1)(mn-2)(n-3)-(mn-2)p$$

Ebenen, die c_n in drei anderen Punkten schneiden, die auf derselben Fläche des Büschels liegen; es gibt

$$\tfrac{1}{6}(mn-1)(mn-2)(mn-3)(n-3)-\tfrac{1}{2}(mn-2)(mn-3)p$$

Ebenen, die c_n in vier Schnittpunkten mit einer Fläche des Büschels schneiden. Letztere Zahl ist eben der gesuchte Wert von A.

[180] Berührungsaufgaben. Für die Anzahl der Flächen eines ∞^1-fachen Systems, die eine gegebene Fläche φ berühren, haben wir schon in [29] einen allgemeinen Ausdruck aufgestellt, in welchem das System nur durch drei „Charakteristiken“ vertreten wird, nämlich die Anzahlen μ, μ' und μ'' der Flächen, die beziehungsweise durch einen



Punkt gehen, eine Gerade berühren oder eine Ebene berühren. Der Ausdruck ist

$$m''\mu + m'\mu' + m\mu'', \tag{1}$$

wo m, m', m'' die Ordnung, den Rang und die Klasse der Fläche φ bezeichnen. Dieser Ausdruck ist von der Ordnung, dem Rang und der Klasse der Flächen des Systems unabhängig und läßt sich daher auch auf Fälle anwenden, in denen diese Zahlen unendlich groß sind, also zur Bestimmung solcher Punkte der Fläche φ, in welchen die Tangentialebenen zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen.

Für ein ∞^2-faches System bieten sich verschiedene Aufgaben über Berührungen mit einer gegebenen Fläche φ dar, nämlich 1. die Bestimmung der Kurve, längs welcher diese von Flächen des Systems berührt wird, sowie die dualistisch entsprechende Bestimmung, und 2. die der Anzahl der Flächen, die mit φ stationäre Berührung oder zwei einfache Berührungen haben. Auch diese Aufgaben kann man, wie es in [29] mit der Herleitung des Ausdrucks (1) geschah, durch die Betrachtung des Falles lösen, in welchem φ unendlich abgeplattet ist, also aus m zusammenfallenden ebenen Blättern besteht, die durch die Kontur, die von der Ordnung m' und der Klasse m'' ist, und die Rückkehrkurve, wenn es eine solche gibt, miteinander verbunden sind. Die Ebene dieser Blätter werden wir π nennen.

Man wird einen Ausdruck für die Ordnung der hier genannten Berührungskurve finden können, in welchem das ∞^2-fache System durch die folgenden Zahlen vertreten wird: die Ordnung ν der Kurve, längs der eine Ebene von Flächen des Systems berührt wird, oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Flächen, die eine gegebene Ebene in Punkten einer in ihr liegenden Geraden berühren, und die dualistisch entsprechende Zahl ν'' oder die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Flächen, die daselbst eine gegebene Gerade berühren. In dem genannten Grenzfalle wird eine Ebene ϱ die Fläche φ in einer m-fachen Geraden mit m' Scheiteln und daher die gesuchte Kurve in den folgenden Punkten schneiden: 1. m-fach in jedem der ν Punkte, in denen diese Gerade die Berührungskurve des Systems mit der Ebene π schneidet, und 2. ν''-fach in jedem der m' Schnittpunkte derselben Geraden mit der Kontur. Man findet also den Ausdruck

$$m\nu + m'\nu''. \tag{2}$$

Die Dualität ergibt die Klasse $m''\nu'' + m'\nu$ der abwickelbaren Fläche, deren Tangentialebenen φ längs der hier gefundenen Kurve berühren.

Stationäre Berührung[1]) hat eine Fläche mit φ, wenn ihre Schnitt-

1) Vgl. [88], wo wir jedoch nur die Singularitäten, die bei einer punktgeometrischen Darstellung allgemein sind, erklärt haben.



kurve eine Spitze hat, die nicht auf einer etwaigen Rückkehrkurve von φ liegt. Diese Bedingung entspricht sich selbst dualistisch, was man durch Betrachtung der Spur der Einhüllenden der den Flächen gemeinschaftlichen Tangentialebenen erkennt Um diese Dualität in der Formel hervortreten zu lassen, müssen wir der Fläche φ und dem System nicht nur solche Singularitäten beilegen, die bei einer punktgeometrischen Darstellung allgemein vorkommen, sondern auch die dualistisch entsprechenden. Wir nehmen daher an, daß φ eine Rückkehrkurve von der Ordnung c hat, während wir die Klasse der Umhüllungsfläche der stationären Tangentialebenen c'' nennen. Außer den schon genannten führen wir für das System noch die folgenden Bezeichnungen ein: die Rückkehrkurven von γ Flächen des Systems gehen durch einen gegebenen Punkt, und — dualistisch entsprechend — γ'' Flächen haben Berührung zweiter Ordnung mit einer gegebenen Ebene; weiter soll γ' die — zu sich selbst dualistische — Anzahl der Flächen bezeichnen, für welche eine gegebene Gerade Haupttangente ist.

Betrachten wir nun wieder den Grenzfall, in welchem φ aus m mit einer Ebene π zusammenfallenden Blättern besteht, so wird eine Fläche des Systems auf folgende Arten Berührung zweiter Ordnung mit ihr haben können:

1. Sie kann mit der Ebene π stationäre Berührung haben; dies gibt $m\gamma''$ Lösungen.

2. Sie kann mit der Kontur der Fläche Berührung zweiter Ordnung haben; die Kontur ist von der Ordnung m', von der Klasse m'' und hat c'' Wendetangenten. Setzt man die hier benutzten Bezeichnungen in [163] (2) ein, wo man nach einer *Plücker*schen Formel $3n_1' + e_1$ durch $3n_1 + e_1'$ ersetzen kann, so findet man, daß es

$$m'\gamma' + m''\gamma + (3m' + c'')\nu''$$

solche Auflösungen gibt.

3. und 4. Endlich ist es wenigstens denkbar (vgl. [163]), daß die Flächen des Systems, die π in den $m'\nu$ Schnittpunkten der Berührungskurve mit der Kontur und in ihren $c\nu$ Schnittpunkten mit der Rückkehrkurve der entarteten Fläche φ berühren, auch Grenzfälle der Flächen sind, die mit einer beliebigen Fläche φ stationäre Berührung haben. Man könnte zwar direkt untersuchen, ob dies wirklich der Fall ist; man kann sich aber auch hiervon überzeugen und gleichzeitig die Anzahlen der in diesen Grenzfällen zusammenfallenden Lösungen bestimmen, wenn man in den gesuchten Ausdruck die Glieder $Am'\nu + Bc\nu$ einführt, wo A und B noch unbekannte Koeffizienten sind. Da der Ausdruck notwendig zu sich selbst dualistisch sein muß, so wird man sogleich ersehen, daß $A = 3$, $B = 1$ ist.

Da eine nähere Untersuchung des hier behandelten Grenzfalles zu keinen anderen Lösungen führt (man könnte vielleicht erwarten, daß



Berührungen in den Spitzen der Kontur oder der Rückkehrkurve oder in Schnittpunkten dieser Kurven solche ergäben), erhält man für die Anzahl der Flächen des Systems, die mit φ stationäre Berührung haben, den Ausdruck

(3) $$m\gamma'' + m'\gamma' + m''\gamma + (3\,m' + c'')\,\nu'' + (3\,m' + c)\,\nu.$$

Da die Formeln (2) und (3) von der Ordnung, dem Rang und der Klasse der Flächen des Systems unabhängig sind, so gelten sie auch dann, wenn diese unendlich werden, d. h. wenn das Flächensystem durch eine algebraische partielle Differentialgleichung ersetzt wird.

Etwas weitläufiger ist die Bestimmung der Anzahl der Flächen eines ∞^2-fachen Systems, die zwei Berührungen mit φ haben. Dabei benutzt man sowohl die in [164] (3) gefundene Formel als auch einen daselbst angewandten Kunstgriff. Bezeichnen wir mit (μ^2), $(\mu\mu'')$, (μ''^2), $(\mu\mu')$, $(\mu''\mu')$, (μ'^2) die Anzahlen der Flächen des Systems, die beziehungsweise durch zwei Punkte gehen, durch einen Punkt gehen und eine Ebene berühren, zwei Ebenen berühren, durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren, eine Ebene und eine Gerade berühren, zwei Gerade berühren, sowie durch β, β', β'', die Anzahlen der Flächen, von welchen ein Doppelpunkt (Punkt der Doppelkurve), eine Doppeltangente oder eine doppelte Tangentialebene eine gegebene Lage hat, und benutzen wir im übrigen die schon eingeführten Bezeichnungen, so finden wir für die genannte Zahl den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} m\beta'' + m'\beta' + m''\beta + \tfrac{1}{2}\,m''(m''-1)\,(\mu^2) + \tfrac{1}{2}\,m'(m'-1)\,(\mu'^2) \\ + \tfrac{1}{2}\,m(m-1)\,(\mu''^2) + mm'(\mu''\mu') + mm''(\mu\mu'') + m''m'(\mu\mu') \\ - \tfrac{3}{2}\,(3\,m' + c'')\,\nu'' - \tfrac{3}{2}\,(3\,m' + c)\,\nu\,. \end{aligned}$$

Die Anzahlen der Flächen eines ∞^1- oder ∞^2-fachen Systems, die mit einer Raumkurve einfache Berührung, Berührung zweiter Ordnung oder zwei Berührungen haben, werden, wenn wir die Kurven durch ihre Projektion auf eine Ebene ersetzen, unmittelbar aus den in [162]—[164] gefundenen folgen.

[181] Zusammensetzung von Bedingungen, die sich nicht durch Faktoren ausdrücken lassen. Die Anzahl von Flächen, die gleichzeitig mehreren gegebenen Bedingungen unterworfen sind, läßt sich, wie es mit ebenen Kurven der Fall war, durch sukzessive Einführung dieser Bedingungen finden. Jede Bedingung wird auf Flächen eines Systems angewandt, das durch Zahlen charakterisiert wird, die selbst Anzahlen von Flächen bedeuten, die neben gewissen einfachen Bedingungen durch die übrigen gegebenen Bedingungen bestimmt werden. Diese Anzahlen müssen also im voraus bestimmt werden durch die Einführung je einer dieser Bedingungen usw. Einen übersichtlichen Ausdruck findet man in symbolischer Form, wenn die gesuchten Flächen außer den sogenannten elementaren Bedingungen: durch gegebene Punkte zu

gehen und gegebene Gerade und Ebenen zu berühren, nur noch solchen Bedingungen unterworfen sind, die man je für sich durch Anwendung eines Ausdruckes von der Form

$$\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu''$$

einführen kann. Als Beispiel hierfür dient die Bedingung, eine gegebene Fläche zu berühren, was wir eben in [180] sahen. Die Anzahl der Flächen, die r auf diese Weise durch die Zahlen $\alpha_1\alpha_1'\alpha_1''; \alpha_2\alpha_2'\alpha_2''; \cdots \alpha_r\alpha_r'\alpha_r''$ charakterisierte Bedingungen erfüllen, zu denen auch die elementaren Bedingungen (für die beziehungsweise $\alpha = 1, \alpha' = \alpha'' = 0; \alpha' = 1, \alpha = \alpha'' = 0$ und $\alpha'' = 1, \alpha = \alpha' = 0$ ist) gehören, läßt sich symbolisch durch

$$(\alpha_1\mu + \alpha_1'\mu' + \alpha_1''\mu'')(\alpha_2\mu + \alpha_2'\mu' + \alpha_2''\mu'') \cdots (\alpha_r\mu + \alpha_r'\mu' + \alpha_r''\mu'')$$

ausdrücken, wenn man nach der Multiplikation jedes Produkt wie $\mu^s\mu'^{s'}\mu''^{s''}$ durch die Anzahl der Flächen ersetzt, die durch s gegebene Punkte gehen, s' Gerade und s'' Ebenen berühren. Die Aufgabe wird also auf die Bestimmung letzterer Anzahlen zurückgeführt, die jedoch in den Fällen, in welchen sich die in [179] beschriebene multiplikative Methode nicht unmittelbar verwenden läßt, recht schwierig ist; läßt sich diese verwenden, so wird das symbolische Produkt selbst ein gewöhnliches Produkt sein, indem dann $\mu' = 2(m-1)\mu$ und $\mu'' = 3(m-1)^2\mu$ ist. Nur für Flächen zweiter Ordnung werden wir alle die Anzahlen der Flächen, die elementaren Bedingungen unterworfen sind, bestimmen.

[182] Systeme von Flächen zweiter Ordnung; entartete Flächen. Unter den Flächen zweiter Ordnung treffen wir drei solche entartete Formen, die von acht Parametern abhängen und entweder durch ihre Darstellung in Punktkoordinaten oder in Ebenenkoordinaten oder durch eine Verbindung beider Darstellungen vollständig bestimmt werden.

I. Kegelflächen. Diese Form wird eine als Punktgebilde dargestellte Fläche annehmen, wenn man ihr einen konischen Doppelpunkt beilegt, was eine einfache Bedingung ist. Da die Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung von neun Parametern abhängt, so wird die einer Kegelfläche von acht abhängen. Die Darstellung in Ebenenkoordinaten wird lediglich den Scheitel und zwar doppelt ergeben, aber sonst nichts über den übrigen Teil des Kegels aussagen. Die Anzahl der Kegelflächen in einem ∞^1-fachen System werden wir λ'' nennen und in diese Anzahl die etwa vorkommenden Flächen von den Formen IV, V und VII mitzählen.

II. Abgeplattete Flächen. Diese Form entspricht dualistisch der Form I. Sie läßt sich vollständig durch eine Gleichung in Ebenenkoordinaten darstellen, welche die Tangentialebenen an einen Kegelschnitt im Raum bestimmt. Punktgeometrisch reduziert sie sich auf die doppelt zu zählende Ebene, die diesen Kegelschnitt enthält. Punktgeo-



metrisch kann man also dlese Entartung auch Doppelebene nennen. Die Anzahl der abgeplatteten Flächen in einem ∞^1-fachen System werden wir λ nennen und darunter auch Flächen von den Formen IV, VI und VII einbeziehen.

III. Zusammengesetzte Flächen. Punktgeometrisch aufgefaßt bestehen sie aus zwei Ebenen. Diese hängen zwar nur von sechs Parametern ab. Zur vollständigen Bestimmung gehört aber noch die Bestimmung der auf der Schnittlinie der Ebenen liegenden zwei Scheitel, welche durch die Gleichung in Ebenenkoordinaten bestimmt werden. Dieses Gebilde ist zu sich selbst dualistisch. Jede ihrer zwei Reihen von Erzeugenden besteht aus zwei Ebenenbüscheln (siehe [27] und [32]). Die Anzahl der zusammengesetzten Flächen in einem System nennen wir λ', und in diese Zahl werden wir auch die etwa vorkommenden Flächen von den Formen V, VI und VII einbeziehen.

Die folgenden Formen lassen sich zwar, wenn man lediglich ihre Darstellungen in Punkt- und Ebenenkoordinaten beachtet, als Spezialfälle der vorhergehenden auffassen und hängen also dann von weniger als acht Parametern ab. Wie die *Halphen*schen Kegelschnitte ([169], [170] und [175]) entstehen sie aber durch das gleichzeitige Verschwinden von zwei oder drei Parametern. Auch hier muß man also bei den Grenzübergängen, auf denen die abzählenden Untersuchungen beruhen, die Verhältnisse der Ordnungen unendlich kleiner Werte dieser Parameter beachten, was unendlich viele Gattungen jeder dieser Ausartungen ergibt; die Einführung einer solchen wird ein oder zwei Parameter erfordern, so daß man im ganzen wieder acht Parameter erhält.

Die verschwindenden Parameter sind dieselben, die durch ihr einzelweises Verschwinden die drei ersten Ausartungen charakterisieren, nämlich 1. das Quadrat u des Stückes, das die Fläche auf einer sie nicht berührenden Geraden abschneidet, 2. das Quadrat v des Stückes, das zwei Tangentialebenen an die Fläche, die durch eine die Fläche nicht berührende Gerade gehen, auf einer anderen Geraden abschneiden, und 3. das Quadrat w des Stückes, das zwei Tangenten an die Fläche, die einem Büschel angehören, dessen Ebene die Fläche nicht berührt und dessen Scheitel nicht auf ihr liegt, auf einer Geraden in der Ebene des Büschels abschneiden (vgl. [170]). $u = 0$ charakterisiert die Ausartung II, $v = 0$ die Ausartung I und $w = 0$ die Ausartung III.

IV. Durch $u = 0$, $v = 0$ wird eine Ausartung charakterisiert, die man, wenn man zuerst $v = 0$ und sodann $u = 0$ setzt, als einen abgeplatteten Kegel, und wenn man zuerst $v = 0$ und sodann $u = 0$ setzt, als eine von zwei Geraden begrenzte abgeplattete Fläche bezeichnen muß. Der Grenzübergang kann aber auch so geschehen, daß für unendlich kleine Werte von u und v der Wert $v = Au^{\nu}$ wird. Die unendlich vielen rationalen Werte, die ν in algebraisch bestimmten Systemen von Flächen annehmen kann, ergeben also ∞^1 Gattungen dieser Ausartung.

Eine Gattung wird aber näher durch den Parameter A charakterisiert, und so erklärt sich das Vorkommen dieser (was die Lage betrifft) von sieben Parametern abhängenden Ausartung in ∞^1-fachen Systemen von Flächen zweiter Orduung, d. h. in solchen, die von acht beliebigen Parametern abhängen.

V. Durch $v = 0$, $w = 0$ wird eine Ausartung charakterisiert, die man, wenn man zuerst $v = 0$ setzt, als einen aus zwei Ebenen bestehenden Kegel bezeichnen muß, und wenn man zuerst $w = 0$ setzt, als eine zusammengesetzte Fläche (III), deren Scheitel zusammenfallen. Das gleichzeitige Verschwinden führt also auch hier ∞^1 Gattungen herbei, die je für sich durch einen Parameter näher charakterisiert werden. Dieser und die sieben, die die Lagen der Ebenen und des Scheitels bestimmen, machen also stets acht Parameter aus.

VI. Durch $u = 0$, $w = 0$ wird eine Ausartung charakterisiert, die der vorhergehenden dualistisch entspricht: eine abgeplattete Fläche, die von einer durch zwei Scheitel begrenzten Doppellinie begrenzt wird, oder eine zusammengesetzte Fläche, deren zwei Ebenen zusammenfallen. Das gleichzeitige Verschwinden führt aber auf ∞^1 Gattungen, die je von acht Parametern abhängen.

VII. $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ charakterisieren eine Ausartung, die man je nach der Reihenfolge des Verschwindens dieser Größen als Grenzfall jeder der vorhergehenden Ausartungen betrachten kann. Die Lage dieser Ausartung wird durch die Lage ihrer Doppelebene, die der Schnittlinie der zusammenfallenden Ebenen und die der zusammenfallenden, auf der Schnittlinie liegenden Scheitel bestimmt, und hängt also von sechs Parametern ab. Geschieht das Verschwinden aber nicht sukzessiv, sondern gleichzeitig, so wird sie durch die Gleichungen $v = Au^{\nu}$ und $w = Bu^{\pi}$ charakterisiert. ν und π, die alle rationalen Werte annehmen können, ergeben ∞^2 Gattungen dieser Ausartung; A und B sind neue Parameter, mittels deren sich eine solche Gattung einem ∞^1-fachen System von Flächen zweiter Ordnung einreiht.

Wenn wir auf die bereits erwähnte Weise die Ausartungen IV, V, VI und VII in die Zahlen λ, λ' und λ'' einbeziehen, so kann man aus den Gleichungen in [167] die folgenden herleiten:

(1) $$2\mu - \mu' = \lambda,$$

(2) $$2\mu'' - \mu' = \lambda'',$$

(3) $$2\mu' - \mu - \mu'' = \lambda'.$$

Die Gleichungen (1) und (3) ergeben sich durch Anwendung der genannten, ein System von Kegelschnitten betreffenden Gleichungen auf die Schnittkurven der Flächen des gegebenen Systems mit einer Ebene. Die Charakteristiken μ und μ' des Flächensystems werden nämlich auch dem System von Kegelschnitten zugehören, das übrigens λ Doppelgerade

und $\lambda' + \mu''$ Kegelschnitte mit Doppelpunkten enthält. Das Dualitätsprinzip oder die Betrachtung des Systems von Kegeln mit einem gegebenen Scheitel, die den Flächen des Systems umbeschrieben sind, oder der Spuren dieser Kegel in einer Ebene (Konturen der Flächen) ergibt die Gleichung (2) und aufs neue die zu sich selbst dualistische Formel (3).

Diese Herleitung der Formeln wird es auch erlauben, die Koeffizienten, mit welchen jede Ausnahmefläche in λ, λ' oder λ'' mitzuzählen ist, aus den entsprechenden Abzählungen der ebenen Geometrie herzuleiten.

[183] Bestimmung der Charakteristiken der elementaren Systeme von Flächen zweiter Ordnung. Ein elementares System von Flächen zweiter Ordnung besteht aus den Flächen, die durch r_1 gegebene Punkte gehen, r_2 Gerade und r_3 Ebenen berühren, wo $r_1+r_2+r_3=8$ ist; seine Charakteristiken sind also die Anzahlen der durch neun solche Bedingungen bestimmten Flächen. Um die einem solchen System angehörigen Ausnahmeflächen abzuzählen bemerken wir, daß eine abgeplattete Fläche 2^s-mal in λ mitzuzählen ist, wenn ihre Ebene durch s der gegebenen Punkte geht, ein Kegel 2^s-mal in λ'', wenn sein Scheitel auf s der gegebenen Ebenen liegt, und eine zusammengesetzte Fläche 2^s-mal in λ', wenn die Schnittlinie der zwei Ebenen (Verbindungsgerade der Scheitel) s gegebene Gerade trifft. Dies kann man aus den Abzählungen in [172] folgern. Läßt man nämlich die Ebene, dessen Schnitte zum Beweise der Formeln [182] (1) und (3) benutzt werden, durch einen der gegebenen Punkte oder durch eine der gegebenen Geraden gehen, so ersieht man daraus, daß ein solcher Punkt oder eine solche Gerade die hier genannte Verdoppelung der Koeffizienten in λ oder λ' verursacht.

Wenn man diese Regeln benutzt, so kann man leicht die Werte von λ finden, die solchen Systemen entsprechen, für welche wenigstens drei Punkte gegeben sind, und damit die dualistisch entsprechenden Werte von λ'', weiter alle Werte von λ'. Da wir noch die Anzahl 1 der durch neun gegebene Punkte gehenden Flächen kennen, und da die meisten anderen Anzahlen der durch neun elementare Bedingungen bestimmten Flächen Charakteristiken von zwei bis drei Systemen sind und auch den dualistisch entsprechenden gleich sein müssen, so besitzen wir mehr als hinreichende Mittel zur Bestimmung aller dieser Charakteristiken nebst den noch fehlenden Bestimmungen der solchen Systemen zugehörigen Werte von λ und λ''. Untersucht man die Systeme auf nachstehender Tafel von links nach rechts, so kann man jedesmal die Zahlen in Kursivschrift (oder drei von ihnen) als bekannt betrachten und die übrigen mittels der Gleichungen [182] (1), (2), (3) herleiten. In den Überschriften bezeichnen wir durch drei Zahlen $r_1 r_2 r_3$ das System von Flächen zweiter Ordnung, die durch r_1 gegebene Punkte gehen und r_2 Gerade und r_3 Ebenen berühren. Darunter schreiben wir die zu ihm gehörigen Werte von $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$.

	800	701	602	503	404	710	611	512	413	620	521	422	323	
λ	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*32*	λ''
λ'	*0*	*0*	*10*	*30*	*42*	*0*	*0*	*20*	*60*	*0*	*0*	*40*	*72*	λ'
λ''	4	12	16	*8*	*0*	8	24	32	*16*	16	48	64	*32*	λ
μ	*1*	*3*	*9*	*17*	*21*	*2*	*6*	*18*	*34*	*4*	*12*	*36*	*68*	μ''
μ'	2	6	18	34	42	4	12	36	68	8	24	72	104	μ'
μ''	3	9	17	21	*21*	*6*	*18*	*34*	*42*	*12*	*36*	*68*	*68*	μ
	008	107	206	305	404	017	116	215	314	026	125	224	323	

	323	530	431	332	440	341	242	350	251	260	161	170	080	
λ	*32*	*0*	*0*	*32*	*0*	*16*	96	*8*	56	32	104	68	92	λ''
λ'	*72*	*0*	*0*	*48*	*0*	*0*	*32*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	λ'
λ''	*32*	32	96	96	64	144	96	104	152	128	104	116	92	λ
μ	*68*	*8*	*24*	*72*	*16*	*48*	*112*	*32*	*80*	*56*	*104*	*80*	*92*	μ''
μ'	104	16	48	112	32	80	128	56	104	80	104	92	92	μ'
μ''	*68*	*24*	*72*	*104*	*48*	*112*	*112*	*80*	*128*	*104*	*104*	*104*	*92*	μ
	323	035	134	233	044	143	242	053	152	062	161	071	080	

Die noch fehlenden Systeme entsprechen dualistisch den hier betrachteten. Ihre Benennungen sind unter die Kolumnen geschrieben und rechts ist angegeben, welche Bedeutung die darüber geschriebenen Zahlen in Beziehung auf diese Systeme haben.

Diese Tafel enthält noch die Anzahlen der Kegelschnitte im Raum, die durch die Bedingungen bestimmt sind: in Ebenen zu liegen, die durch r_1 gegebene Punkte gehen, r_2 Gerade zu schneiden und r_3 Ebenen zu berühren, wo $r_1 + r_2 + r_3 = 8$ ist. Diese Anzahlen werden nämlich für jedes System $\frac{\lambda}{2^{r_1}}$ sein. Ebenso wird $\frac{\lambda''}{2^{r_3}}$ die Anzahl der Kegel sein, die durch r_1 gegebene Punkte gehen, r_2 Gerade berühren und ihre Scheitel auf r_3 Ebenen haben.

[184] Einführung neuer Bedingungen. Die Formeln [182] (1), (2), (3) lassen sich auch zur Bestimmung anderer Charakteristiken als der der elementaren Systeme anwenden. Die hierzu nötige Bestimmung der Zahlen λ und λ'' wird jedoch oft Schwierigkeiten verursachen; allein diese lassen sich in vielen Fällen in derselben Weise, wie bei mehreren der elementaren Systeme, umgehen.

Die Charakteristiken der elementaren Systeme bilden aber den Ausgangspunkt für jene Bestimmung durch sukzessive Einführung der Bedingungen, die hier, mit einer ganz bestimmten Ausnahme, durch Anwendung der Formel $\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu''$, also auf die in [181] beschriebene Weise geschehen kann. Die Ausnahme tritt dann ein, wenn das gegebene System Ausartungen von der Form *IV, V, VI, VII* enthält, und wenn diese zwar in Beziehung auf die Lage, aber nicht auf die in [182] genannten infinitesimalen Grenzübergänge die einzuführende

neue Bedingung erfüllen. Gibt es solche Ausnahmeflächen, so muß man (wie im analogen Falle bei Kegelschnitten in einer Ebene [169]) ihren Einfluß einer besonderen Untersuchung unterziehen. Hier werden wir aber voraussetzen, daß solche Ausnahmeflächen im betrachteten System nicht vorkommen, und dann die Richtigkeit der Formel $\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu''$ beweisen.

Wenn das System nur solche Flächen enthält, die durch ihre Gleichungen in Punktkoordinaten vollständig bestimmt werden, so wird es $\beta\mu$ Flächen enthalten, die eine neue Bedingung erfüllen, wo β die Anzahl der Flächen eines Büschels bezeichnet, die die Bedingung erfüllen. Um einen Ausgangspunkt für die Modifikationen zu haben, die etwa vorkommende abgeplattete oder zusammengesetzte Flächen (II und III) veranlassen, werden wir zur Aufstellung dieses schon [179] bekannten Resultates eine Erweiterung des Verfahrens anwenden, das wir in [168] auf Kegelschnitte in einer Ebene anwandten. Wir benutzen dabei eine feste Fläche zweiter Ordnung ψ_2. Die Flächen eines durch ψ_2 und eine willkürliche Fläche des Systems φ_2 bestimmten Büschels, die die neu einzuführende Bedingung erfüllen, nennen wir φ_2'. Eine willkürliche Gerade g wird dann entsprechende Flächen φ_2 und φ_2' in entsprechenden Punkten schneiden, die, außer den in die Schnittpunkte mit ψ_2 fallenden, $2\beta\mu$ Koinzidenzen haben; diese bestimmen $\beta\mu$ koinzidierende Flächen. Diese sind eben die gesuchten, insofern sie sich wirklich punktgeometrisch bestimmen lassen. Dies wird aber fürs erste mit den λ' zusammengesetzten Flächen φ_2 nicht der Fall sein: mit einer solchen kann punktgeometrisch eine Anzahl α'' von Flächen φ_2' zusammenfallen, deren Scheitel (wie in [168]) einer gegebenen Involution angehören und im übrigen durch die neue Bedingung bestimmt werden. Weiter sind die λ abgeplatteten Flächen φ_2 auszunehmen: mit diesen kann punktgeometrisch eine Anzahl γ von Flächen φ_2' zusammenfallen, deren Kegelschnitte je einem durch φ_2 und den Schnitt von ψ_2 bestimmten Büschel angehören und im übrigen durch die neue Bedingung bestimmt werden. Indem sich Einzelheiten der Abzählung ganz wie in [168] begründen lassen, findet man durch Benutzung der Formeln [182] (2) und (3), daß das System

$$\beta\mu - \alpha''\lambda' - \gamma\lambda = (\beta + \alpha'' - 2\gamma)\mu + (\gamma - 2\alpha'')\mu' + \alpha''\mu''$$

Flächen enthält, die die neue Bedingung erfüllen. Setzen wir hier

$$\beta + \alpha'' - 2\gamma = \alpha \quad \text{und} \quad \gamma - 2\alpha'' = \alpha',$$

so bekommt der Ausdruck die Form $\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu''$.

Da die bei der Bestimmung von α'' benutzte Involution eine beliebige ist, so kann man auch sagen, daß α'' die Anzahl der zusammengesetzten Flächen ist, deren zwei Ebenen nebst dem einen Scheitel gegeben sind, während der andere Scheitel durch die

gegebene Bedingung bestimmt wird. Aus dem Dualitätsprinzip folgt sodann, daß α die Anzahl solcher Flächen ist, deren zwei Scheitel nebst der einen Ebene gegeben sind, während die andere durch die gegebene Bedingung bestimmt wird. Diese Bedeutung der Zahlen α'' und α wird auch aus der Anwendung der gefundenen Formel auf Systeme von zusammengesetzten Flächen hervorgehen, zu deren vollständigen Bestimmung nur die Lage eines Scheitels auf einer bekannten Geraden oder einer durch eine bekannte Gerade gehenden Ebene fehlt. Die Charakteristiken dieser Systeme sind nämlich beziehungsweise

$$\mu = \mu' = 0, \quad \mu'' = 1 \quad \text{und} \quad \mu = 1, \quad \mu' = \mu'' = 0.$$

In ähnlicher Weise wird die vorhin genannte Bedeutung der Zahl γ aus der Betrachtung eines Systems von abgeplatteten Flächen hervorgehen, deren Kegelschnitte einen Büschel in einer gegebenen Ebene bilden. Die Charakteristiken eines solchen Systems sind nämlich $\mu=0$, $\mu'=1$, $\mu''=2$. Also ist

$$\gamma = \alpha' + 2\alpha''$$

die Anzahl der abgeplatteten Flächen, deren Kegelschnitte einem gegebenen Büschel angehören, und die die neue Bedingung erfüllen. Man könnte zur Bestimmung von α' auch die dualistisch entsprechende Zahl $\gamma'' = \alpha' + 2\alpha$ benutzen.

Beispiele. 1. Wenden wir diese Bedeutung von α, α'' und γ zu einer neuen Herleitung der Anzahl der Flächen an, die eine gegebene Fläche von der Ordnung m, dem Rang m' und der Klasse m'' berühren. Man sieht dann unmittelbar, daß $\alpha = m''$, $\alpha'' = m$ ist, und, da es in einem Büschel von Kegelschnitten in einer Ebene $m' + 2m$ gibt, die einen gegebenen Schnitt der Fläche berühren, hat $\alpha' + 2\alpha''$ diesen Wert, und α' wird gleich m' sein.

2. Wenden wir dieselbe Methode an, um die Anzahl von Flächen eines Systems zu bestimmen, die je einen Strahl einer gegebenen Kongruenz von der Ordnung n und der Klasse n' als Erzeugende enthält, so finden wir $\alpha = 2n$, $\alpha'' = 2n'$, und da ein Büschel von Kegelschnitten zwei enthält, die eine Gerade berühren, die als Erzeugende beider Scharen der von einem solchen Kegelschnitt begrenzten abgeplatteten Fläche zu zählen ist, so wird $\alpha' + 2\alpha'' = 4n'$, also $\alpha' = 0$. Da die Erzeugenden eines Systems von Flächen zweiter Ordnung mit den Charakteristiken μ, μ', μ'' eine Kongruenz von der Ordnung 2μ und der Klasse $2\mu''$ bilden, könnte man dasselbe Resultat aus dem *Halphen*schen Satz über Kongruenzen herleiten [144].

3. Aus der Bedeutung der Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$ folgt unmittelbar, daß es in einem System von Flächen zweiter Ordnung μ gibt, in Beziehung auf welche zwei Punkte, und μ'', in Beziehung auf welche zwei Ebenen konjugiert sind. Betrachtet man sodann die Bedingung, daß der Strahl,



der in Beziehung auf eine Fläche zu einer gegebenen Geraden konjugiert ist, einem Komplex erster Ordnung angehört, so läßt sich diese Bedingung überhaupt nicht von einer zusammengesetzten Fläche mit beliebig gegebener Doppelgeraden erfüllen. Daher ist $\alpha = \alpha'' = 0$. Dagegen enthält ein ebener Büschel von Kegelschnitten einen solchen, in Beziehung auf welchen die Spur der gegebenen Geraden und der feste Punkt der in der Ebene liegenden Geraden des Komplexes konjugiert sind. Daher wird $\alpha' = \alpha' + 2\alpha'' = 1$. Also werden μ' Flächen des Systems die Bedingung erfüllen. Dies kann man auch so ausdrücken: der Ort der Geraden, die in Beziehung auf ein System von Flächen zweiter Ordnung zu einer gegebenen konjugiert sind, ist eine Fläche von der Ordnung μ' (siehe 17).

Nicht nur die hier genannten und benutzten entarteten Systeme können zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \alpha', \alpha''$ dienen; vielmehr kann man immer, wenn man die Anzahlen der Flächen dreier Systeme mit bekannten Charakteristiken (und ohne die Singularitäten IV bis VII), die eine Bedingung erfüllen, gefunden hat, hieraus die ihr zugehörigen Werte von $\alpha, \alpha', \alpha''$ herleiten. Auch läßt sich oft der einer gegebenen Bedingung entsprechende Ausdruck $\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu''$ durch die Korrespondenzsätze finden, und in derselben Weise kann man auch oft einen ähnlichen Ausdruck für Systeme von Flächen höherer Ordnung herleiten.

[185] Übungen. 1. Die Punkte P_1 einer Raumkurve von der Ordnung n_1 sind auf die Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche von der Klasse n_2'' so bezogen, daß jedem Punkt P_1 α_2 Ebenen π_2 und jeder Ebene π_2 α_1 Punkte P_1 entsprechen. Wie viele Flächen enthält ein System von Flächen von der Ordnung m, dem Rang m' und der Klasse m'' mit den Charakteristiken μ, μ', μ'', die durch einen Punkt P_1 gehen und eine entsprechende Ebene π_2 berühren? Wie läßt sich dieses Resultat im Falle $m = 2$ aus der in [184] benutzten Bestimmung von $\alpha, \alpha', \alpha''$ herleiten? Wenn im Falle $m = 2$ der Punkt P_1 immer auf der entsprechenden Ebene π_2 liegt, wird das Resultat in dem in [184] 2 gefundenen inbegriffen sein.

2. Die Anzahlen der Flächen zweiter Ordnung zu finden, die einen gegebenen Kegelschnitt enthalten, (z. B. der Kugeln), und die noch vier elementaren Bedingungen unterworfen sind.

3. Die Anzahlen der Flächen zweiter Ordnung zu finden, die zwei oder eine gegebene Erzeugende enthalten und sonst elementaren Bedingungen unterworfen sind.

4. Für die Systeme von ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, die sieben elementare Bedingungen erfüllen, sucht man die Örter der Scheitel der im System enthaltenen Kegel, und der Scheitel der zusammengesetzten Flächen, sowie den Ort der Verbindungslinien dieser Scheitel.

5. Wie viele Flächen zweiter Ordnung gibt es, in Beziehung auf die zwei gegebene Gerade konjugiert sind und die drei andere gegebene Gerade und zwei gegebene Flächen berühren?

d) Bestimmung von Korrelationen.[1])

[186] Korrelationen ebener Gebilde. Eine von *Hirst* gegebene Verallgemeinerung der Lehre von Systemen von Kegelschnitten knüpft sich an *v. Staudts* Definition eines solchen durch ein beliebiges Polarsystem an: die einander entsprechenden Punkte und Geraden eines Polarsystems sind Pole und Polare in Beziehung auf den dadurch bestimmten Kegelschnitt, dessen Punkte und Tangenten die aufeinanderliegenden, entsprechenden Punkte und Geraden sind. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß man statt eines Polarsystems, das aus zwei involutorischen, korrelativen oder sich dualistisch entsprechenden Figuren in derselben Ebene gebildet wird, solche korrelative Figuren betrachtet, die keine besondere Lage in Beziehung zueinander einnehmen: die Punkte und Geraden einer Ebene entsprechen dann projektiv den Geraden und den Punkten einer anderen Ebene, wie man sich auch dann, wenn die beiden Ebenen ineinander liegen, ausdrücken kann. Die einem Kegelschnitt oder seinem Polarsystem auferlegte Bedingung, zwei gegebene Punkte sollen in Beziehung auf ihn konjugiert sein — eine Bedingung, die ja selbst eine Verallgemeinerung der Bedingung ist, daß der Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt gehen soll [171] 1 — wird jetzt für die allgemeine Korrelation durch die Bedingung ersetzt, daß zwei gegebene Punkte je auf der dem andern entsprechenden Geraden liegen. Auf dualistisch entsprechende Weise wird man zur Aufstellung der Bedingung geführt, daß zwei gegebene Gerade je durch den der anderen entsprechenden Punkt gehen. Diese Bedingungen werden wir elementar nennen und als (1) und (1′) bezeichnen.

Zur Bestimmung einer Korrelation ist eine Gesamtzahl von acht einfachen Bedingungen nötig, z. B. die vier doppelten, daß die vier Geraden der einen Ebene, die den vier beliebig gegebenen Punkten der anderen entsprechen, gegebene Lage haben sollen. Sieben einzelne Bedingungen geben also ein System von ∞^1 Korrelationen. Die Anzahlen der Korrelationen des Systems, die eine Bedingung (1) oder (1)′ erfüllen, nennen wir die Charakteristiken des Systems und bezeichnen sie beziehungs-

1) Eine ausführlichere Behandlung findet sich in *R. Sturm:* Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften II und III, Leipzig (1908—1909). Daher geben wir hier nur die Hauptzüge der *Hirst*schen Abzählungsmethode, ohne auf ihre Anwendungen näher einzugehen. — Zur Einübung der Methode kann man die vollständige Herleitung der am Schlusse kurz angegebenen Resultate benutzen.

weise durch μ und μ'. Man kann auch sagen, daß μ die Klasse der Kurve ist, die die einem gegebenen Punkt in den verschiedenen Korrelationen entsprechenden Geraden berührt, μ' die Ordnung des Ortes der einer gegebenen Geraden entsprechenden Punkte.

Statt der gewöhnlichen Ausartungen eines Systems von Kegelschnitten treffen wir in den ∞^1-fachen Systemen von Korrelationen die folgenden, auf welche man durch die bereits angegebene Verallgemeinerung geführt wird:

I. Wenn drei Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer Geraden d_1 in der einen Ebene drei Geraden a_2, b_2, c_2 in der andern, die nicht durch denselben Punkt gehen, entsprechen sollen, so wird der der Geraden d_1 entsprechende Punkt ganz unbestimmt, also ein beliebiger Punkt der anderen Ebene sein. Den Punkten der Geraden a_2 wird also im allgemeinen die Gerade d_1 entsprechen; nur erfordert die projektive Beziehung des Büschels (A_1) zu der entsprechenden Reihe von Punkten der Geraden a_2, daß es in diesem Grenzfall einen Punkt auf a_2 gibt, dem alle Strahlen des Büschels (A_1) entsprechen. Da jede Gerade der Ebene π_2 einen solchen Punkt enthält, wird der Ort dieser Punkte eine Gerade d_2 sein, die auch allen Punkten der Ebene π_1 entsprechen wird. Dem Punkt A_1 der Geraden d_1 werden auch alle Gerade des durch a_2 und d_2 bestimmten Büschels entsprechen. Die so verbundenen Punkte der Geraden d_1 und d_2 müssen auf einander projektiv bezogen sein. Die Lage der Geraden d_1 und d_2 und diese Projektivität erfordern im ganzen sieben Bedingungen. Die hier beschriebene Art von Korrelation wird im allgemeinen in einem System von ∞^1 Korrelationen vorkommen können; ihre Anzahl, die wir mit λ bezeichnen, kann jedoch null werden.

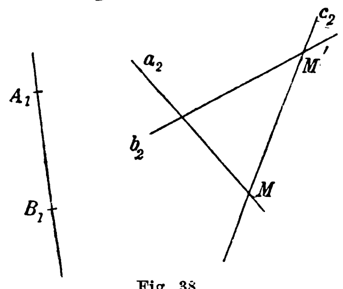


Fig. 38.

I'. Das Dualitätsprinzip liefert eine Ausartung, in welcher alle Geraden der einen oder anderen Ebene zwei Punkten D_2 und D_1 entsprechen, während nur jeder durch einen dieser Punkte z. B. D_1 gehenden Geraden alle Punkte einer durch D_2 gehenden Geraden entsprechen. Wir nennen die Anzahl der in einem ∞^1-fachen System vorkommenden Ausartungen dieser Art λ'.

Es sei nun ein ∞^1-faches System von Korrelationen gegeben; wir betrachten die Korrespondenz zwischen den Punkten M und M' (Fig. 38), in welchen die Geraden a_2 und b_2 der zweiten Ebene, die in einer der Korrelationen den festen Punkten A_1 und B_1 der ersteren entsprechen, eine Gerade c_2 treffen. Dann werden μ Punkte M' dem Punkte M entsprechen und umgekehrt. Die 2μ Koinzidenzen finden statt: 1. in den μ' Punkten der Geraden c_2, die in Korrelationen des Systems der Geraden

$A_1 B_1$ entsprechen, 2. in den λ Schnittpunkten der Geraden c_2 mit den singulären Geraden d_2 der Ausartungen I. Also ist

$$\lambda = 2\mu - \mu',$$

und dualistisch entsprechend

$$\lambda' = 2\mu' - \mu.$$

Man kann daher, ganz wie bei einem System von Kegelschnitten, die Charakteristiken μ und μ' eines ∞^1-fachen Systems von Korrelationen durch Abzählung seiner Ausartungen erhalten.

Um die Ausartungen eines sieben elementaren Bedingungen unterworfenen Systems zu finden, ist zu bemerken, daß, wenn eine Bedingung von der Form (1) gegeben ist und also zwei Punkte A_1 und A_2 der zwei Ebenen in Beziehung auf alle Korrelationen des Systems so mit einander verbunden sind, daß die A_1 entsprechende Gerade durch A_2 geht und umgekehrt, so muß für jede Ausartung I entweder die singuläre Gerade d_1 durch A_1 oder die singuläre Gerade d_2 durch A_2 gehen. Das dualistisch Entsprechende gilt für die Ausartung I′. Dadurch findet man leicht die Ausartungen und sodann die Charakteristiken der durch solche Bedingungen bestimmten Systeme. Bezeichnen wir mit r und r', wo $r + r' = 8$ ist, die Anzahlen der Bedingungen (1) und (1′), denen eine Korrelation unterworfen ist, und mit (rr') die Anzahl der dadurch bestimmten Korrelationen, so wird $(rr') = (r'r)$, und man findet durch Anwendung der beschriebenen Methode:

$$(80) = 1, (71) = 2, (62) = 4, (53) = 8, (44) = 10.$$

Sind zwei Bedingungen durch die zweifache Bedingung ersetzt, daß einem Punkt A_1 eine Gerade a_2 entsprechen soll, so gestaltet sich die Bestimmung noch einfacher.

[187] Räumliche Korrelationen. Eine Verallgemeinerung der Bestimmung von Flächen zweiter Ordnung führt auf die Bestimmung räumlicher Korrelationen. In einer solchen entspricht jedem Punkt eines Raumes eine Ebene eines anderen und umgekehrt. Jeder Geraden, die man in einem Raum als Ort ihrer Punkte betrachtet, entspricht im anderen eine Gerade, durch welche die entsprechenden Ebenen gehen. Die Punkte der ersten Geraden sind zu den Ebenen des entsprechenden Büschels projektiv.

Die Bestimmung einer räumlichen Korrelation hängt von 15 Bedingungen ab; die Lagen der fünf Ebenen, die fünf beliebig gegebenen Punkten entsprechen, geben z. B. fünf dreifache Bedingungen ab. 14 einzelne Bedingungen bestimmen ein ∞^1-faches System von Korrelationen, das durch die folgenden drei Zahlen charakterisiert wird: die Anzahl μ der Korrelationen, in welchen die einem gegebenen Punkt des einen Raumes entsprechende Ebene des anderen durch einen gegebenen

Punkt geht; die Anzahl μ'' der Korrelationen, in welchen der einer gegebenen Ebene des einen Raumes entsprechende Punkt des anderen in einer gegebenen Ebene liegt; die Anzahl μ' der einer gegebenen Geraden des einen Raumes entsprechenden Geraden des anderen, die einem gegebenen linearen Komplex angehören, z. B. eine gegebene Gerade schneiden (vgl. [184] 3).

Die in einem ∞^1-fachen System allgemein vorkommenden Ausartungen sind die folgenden:

I. λ Korrelationen, in welchen allen Punkten des einen oder des anderen Raumes feste Ebenen δ_2 beziehungsweise δ_1 entsprechen. Nur jedem Punkte P_1 der Ebene δ_1 entsprechen alle Ebenen des durch eine ihm zugeordnete Gerade p_2 von δ_2 gehenden Büschels, und jedem Punkte Q_2 der Ebene δ_2 alle Ebenen des durch eine ihm zugeordnete Gerade q_1 von δ_1 gehenden Büschels. Die Punkte P_1 und die Geraden q_1 der Ebene δ_1 sind dann korrelativ auf die Geraden p_2 und die Punkte Q_2 der Ebene δ_2 bezogen.

I''. λ'' Korrelationen, die die dualistisch entsprechenden Eigenschaften haben.

II. λ' Korrelationen, in welchen jedem Punkt des einen oder anderen Raumes eine Ebene entspricht, die durch eine feste Gerade d_2 beziehungsweise d_1 geht. Nur den Punkten P_1 von d_1 werden alle Ebenen des durch einen Punkt P_2 von d_2 gehenden Büschels entsprechen, und dem Punkt P_2 alle Ebenen, die durch P_1 gehen; die Punktreihen P_1 und P_2 sind projektiv aufeinander bezogen. Ebenso entsprechen einer Ebene π_1 durch d_1 alle Punkte einer Ebene π_2 durch d_2, und der Ebene π_2 alle Punkte von π_1, und die Büschel der Ebenen π_1 und π_2 sind projektiv aufeinander bezogen.

In einer räumlichen Korrelation wird eine Ebene im ersten Raume zu einem Bündel im anderen und also zu einem beliebigen ebenen Schnitte dieses Bündels im planimetrischen Sinne [186] korrelativ sein. Hat man ein ∞^1-faches System von räumlichen Korrelationen, so bekommt man auf diese Weise ein ∞^1-faches System von ebenen Korrelationen, auf welches man die in [186] gefundenen Formeln anwenden kann. Dadurch und durch Anwendung des Dualitätsprinzips findet man für ein System von räumlichen Korrelationen die folgenden drei Formeln:

$$2\mu - \mu' = \lambda$$
$$2\mu'' - \mu' = \lambda''$$
$$2\mu' - \mu - \mu'' = \lambda'.$$

Damit ist auch hier die Bestimmung der Charakteristiken auf die Abzählung der Ausartungen zurückgeführt.



Sechstes Kapitel.

Schuberts symbolischer Kalkül.[1]

[188] Symbolische Multiplikation. Die Formel in [165]

$$(\alpha_1\mu + \alpha_1'\mu')(\alpha_2\mu + \alpha_2'\mu')(\alpha_3\mu + \alpha_3'\mu')(\alpha_4\mu + \alpha_4'\mu')(\alpha_5\mu + \alpha_5'\mu')$$

mittels welcher man die Anzahl der Kegelschnitte, die fünf durch $\alpha_1, \alpha_1'; \alpha_2, \alpha_2'; \alpha_3, \alpha_3'; \alpha_4, \alpha_4'; \alpha_5, \alpha_5'$ charakterisierte Bedingungen erfüllen, symbolisch durch ein Produkt ausdrückt, ist ein erstes Beispiel einer symbolischen Ausdrucksweise, die allgemein auf solche Fälle anwendbar ist, in welchen ein geometrisches Gebilde durch verschiedene, unter sich unabhängige, einfache oder mehrfache Bedingungen zu bestimmen ist. Ein Faktor $\alpha_1\mu + \alpha_1'\mu'$ dieses Produkts bezeichnet erst nur die Anzahl der Kegelschnitte, die bereits vier nicht genannte Bedingungen erfüllen und noch die Bedingung (α_1, α_1') erfüllen sollen. Er ist die Summe zweier Glieder. Will man auch die vier willkürlich gelassenen Bedingungen oder einige derselben ausdrücklich angeben, so ist ihr Symbol B jedem Glied für sich hinzuzufügen. Diese Hinzufügung läßt sich eben wegen des distributiven Multiplikationsgesetzes symbolisch durch eine Multiplikation ausdrücken, umso mehr als die Reihenfolge der Einführung der unter sich unabhängigen Bedingungen willkürlich ist, so daß auch mit dem kommutativen Multiplikationsgesetz Übereinstimmung besteht. Im Gliede $\alpha\mu$ bezeichnet μ die Anzahl der Kegelschnitte, die durch einen willkürlichen Punkt gehen und noch die vier ungenannten Bedingungen erfüllen. Durch Multiplikation von μ (oder μ') mit dem Symbole B erhält man die Bezeichnung μB (oder $\mu' B$) der Anzahl der Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen (oder eine Gerade berühren) und B erfüllen, und, wenn B nur eine r-fache Bedingung bedeutet, wo $r < 4$ ist, noch $4 - r$ ungenannte Bedingungen erfüllen. Nun hat das Symbol für die Bedingung (α_2, α_2') die nämliche Form und die symbolische Multiplikation ergibt

$$\alpha_1\alpha_2\mu^2 + (\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1')\,\mu\mu' + \alpha_1'\alpha_2'\mu'^2$$

Kegelschnitte, die die genannten zwei und noch drei ungenannte Bedingungen erfüllen. Die Zahlen μ^2, $\mu\mu'$ und μ'^2 müssen wegen ihrer Bildung durch Multiplikation der Symbole μ und μ', deren Bedeutung schon bekannt ist, die Anzahlen der Kegelschnitte darstellen, die gleichzeitig zwei durch diese Symbole dargestellte Bedingungen erfüllen.

1) Die Darstellung schließt sich hauptsächlich an *Schuberts* Kalkül der abzählenden Geometrie an. Ihr entlehnen wir auch einige Beispiele.



Diesem Symbol zweier unter sich unabhängiger Bedingungen, oder dem entsprechenden Symbol einer zweifachen Bedingung [176]

$$\beta\mu^2 + \beta'\mu\mu' + \beta''\mu'^2$$

kann man neue Faktoren beifügen, die die vorläufig ungenannten Bedingungen darstellen. Wenn diese alle eingeführt sind, hat man einen homogenen Ausdruck fünften Grades in μ und μ', wo die Koeffizienten wirkliche Zahlen sind, die von den gegebenen Bedingungen abhängen, während $\mu^r\mu'^s$ die Anzahl der Kegelschnitte ist, die durch r Punkte gehen und s Gerade berühren.

Wir haben hier die sukzessive Bildung eines Ausdrucks betrachtet, der früher nur als eine symbolische Umformung eines bereits bewiesenen, unmittelbaren Ausdrucks hervortrat, um dadurch zu zeigen, wie man auch in anderen Fällen zu verfahren hat. Die so gewonnene Formelbildung kann mit den einfachsten Figuren anfangen. Geht man dann nach und nach weiter, so erhält man Formelsysteme, die auf die ganze abzählende Geometrie anwendbar sind. Wir haben bisher diese Formelbildung nicht benutzt, weil sie nichts zur Überwindung der eigentlichen Schwierigkeiten, die von der Abzählung zusammenfallender Lösungen herrühren, beiträgt, und weil ohne sie die Methoden mehr unmittelbar hervortreten. Sie ist aber selbst eine Methode, die dazu dient, die gewonnenen Resultate übersichtlich und dadurch für weitere Fortschritte nützlich zu machen. Sie wird unentbehrlich, wenn man die verschiedenen Resultate, namentlich auch solche, die sich auf Räume mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen beziehen, in allgemeinen Formeln aufstellen will. Hier, wo es sich nur darum handelt, die Methode selbst kennen zu lernen, beschränken wir uns jedoch, wie bisher, wesentlich auf Räume mit drei Dimensionen, und weisen nur gelegentlich darauf hin, wie man auch zu Räumen von mehr Dimensionen übergehen kann.

[189] Symbole für die Bestimmung der Grundelemente. Wir müssen damit anfangen, die symbolischen Grundformeln aufzustellen, die die Bestimmung der Grundelemente, im dreidimensionalen Raume Punkt, Gerade und Ebene, betreffen. Dabei bedeuten, wie bei den Systemen von Kegelschnitten, die Symbole für die Bedingungen die Anzahl der Gebilde, die durch die symbolisch ausgedrückten Bedingungen und eine hinreichende Anzahl von ungenannten Bedingungen, die nur in derselben Formel dieselben sein müssen, bestimmt werden. Das Produkt mehrerer Symbole bedeutet die Forderung, daß gleichzeitig die verschiedenen Bedingungen zu erfüllen sind. Hierauf kann man die vorläufig ungenannten Bedingungen durch Multiplikation in eine Formel einführen.

Für einen Punkt bedeuten die Symbole p, p_g, P beziehungsweise die Bedingungen, auf einer gegebenen Ebene, auf einer gegebenen Geraden zu liegen oder eine gegebene Lage zu haben. P ist also $= 1$,

wenn es sich nur um die Bestimmung des Punktes handelt. Der Punkt kann aber auch einem zusammengesetzten Gebilde angehören und dann bezeichnet P die Anzahl dieser Gebilde, bei welchen der Punkt eine gegebene Lage hat; p und p_g haben dann entsprechende Bedeutungen.

Aus den geometrischen Grundsätzen folgt, daß

$$p^2 = p_g$$

und weiter, nach symbolischer Multiplikation mit p, daß

$$p^3 = pp_g = P$$

ist. Um einen Ausdruck für den *Bézout*schen Satz zu erhalten, könnte man die Bedingung, auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung zu liegen, durch μp ausdrücken. Dieses stimmt damit überein, daß

$$\mu p \cdot p_g = \mu p \cdot p^2 = \mu p^3 = \mu$$

ist, weil hier $p^3 = 1$ ist, sowie auch damit, daß

$$\mu_1 p \cdot \mu_2 p \cdot \mu_3 p = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdot p^3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3$$

ist. $\mu_1 \mu_2 p_g$ würde hier die Bedingung darstellen, auf einer vollständigen Schnittkurve zu liegen. Ebenso kann man durch νp_g die Bedingung ausdrücken, auf einer willkürlichen Raumkurve von der Ordnung ν zu liegen. Multiplikation mit μp ergibt dann, daß die Raumkurve mit einer Fläche von der Ordnung μ

$$\mu p \cdot \nu p_g = \mu \nu$$

Schnittpunkte hat.

Diese symbolischen Rechnungen, deren Resultate durch bekannte Sätze gerechtfertigt sind, geben keineswegs neue Beweise dieser Sätze, die umgekehrt die Berechtigung der Symbole μp und νp_g beweisen. Diese schließen sich übrigens genau den in [26] und [27] angegebenen Beweisen der genannten Sätze an.

Ganz ebenso hat man, wenn die Symbole e, e_g und E die Bedingungen bezeichnen, daß eine Ebene durch einen gegebenen Punkt oder durch eine gegebene Gerade gehen oder eine gegebene Lage haben soll,

$$e^2 = e_g,\ e^3 = e \cdot e_g = E.$$

Für eine Gerade bezeichnen wir mit

$$g;\quad g_e,\ g_p;\quad g_s;\quad G$$

beziehungsweise die einfache Bedingung, eine gegebene Gerade zu schneiden, die doppelten Bedingungen, in einer gegebenen Ebene zu liegen oder durch einen gegebenen Punkt zu gehen, die dreifache, einem Strahlenbüschel anzugehören; die vierfache, eine gegebene Lage zu haben. Die Bedingung g^2, zwei Gerade zu schneiden, wird im Spezialfalle, in welchem sich diese selbst schneiden, sowohl von den durch den Schnitt-

punkt gehenden, als auch von den in der gemeinschaftlichen Ebene liegenden Geraden erfüllt. Also ist [vgl. 31]

$$g^2 = g_p + g_e.$$

Weiter ist

$$g g_p = g \cdot g_e = g_s.$$

Somit findet man durch Multiplikation, daß

$$g^3 = g \cdot g_p + g \cdot g_e = 2 g_s,$$

und, da $g \cdot g_s = G$ ist, daß

$$g^4 = 2G$$

ist. Man bemerke noch, daß $g_p \cdot g_e = 0$ ist, weil eine Gerade nicht gleichzeitig durch einen willkürlichen Punkt gehen und in einer willkürlichen Ebene liegen kann. Dies ist ein erstes Beispiel dafür, daß ein Produkt, dessen Dimensionszahl die Anzahl der bestimmenden Größen des gesuchten Gebildes nicht übersteigt, verschwinden kann, was oft die zu bildenden Produkte vereinfacht. Da $g_p^2 = g_e^2 = G$ ist, findet man z. B.

$$g^4 = g^2 \cdot g^2 = (g_p + g_e)^2 = g_p^2 + 2 g_p g_e + g_e^2 = 2G.$$

Hieran läßt sich auch eine weitere Bestimmung der Geraden in willkürlichen Geradensystemen anschließen. Wenn eine Gerade durch die Bedingung g bestimmt werden soll, so muß sie im voraus einer dreifachen Bedingung unterworfen sein, also einer Regelfläche angehören. g ist dann die Ordnung dieser Fläche oder die eines ebenen Schnittes. Die Anzahl der Erzeugenden dieser Fläche, die eine vierte, von der dreifachen unabhängige Bedingung erfüllen, ist dann μg, wo μ die Ordnung des auf diese Weise bestimmten Linienkomplexes ist, wie wir in [32] gesehen haben. μg darf daher als Symbol für die neue Bedingung dienen. Daraus findet man z. B. durch Multiplikation mit g^3, daß es 2μ Gerade im Komplexe gibt, die drei gegebene Gerade schneiden. Durch Multiplikation der Symbole $\mu_1 g$ und $\mu_2 g$ zweier einfacher Bedingungen findet man das Symbol

$$\mu_1 \mu_2 g^2 = \mu_1 \mu_2 g_p + \mu_1 \mu_2 g_e$$

für die doppelte Bedingung, den beiden durch jene Symbole bestimmten Komplexen oder einer Kongruenz, die den vollständigen Schnitt zweier Komplexe bildet, anzugehören.

N e h m e n w i r v o r l ä u f i g a n, daß man ebenso eine ganz willkürliche algebraische Kongruenz durch

$$\nu g_p + \nu' g_e$$

darstellen kann, so ergibt die Multiplikation mit g_p oder g_e beziehungsweise die Werte ν und ν'. Diese werden also Ordnung und Klasse der durch ν und ν' charakterisierten Kongruenz sein. Die Anzahl der

Geraden dieser Kongruenz, die auch der Kongruenz von der Ordnung ν_1 und der Klasse ν_1' angehören, wird nun

$$(\nu g_p + \nu' g_e)(\nu_1 g_p + \nu_1' g_e) = \nu\nu_1 + \nu'\nu_1'$$

sein, wodurch eben der früher bewiesene Kongruenzsatz von *Halphen* [144] und [149] ausgedrückt wird. Dieser findet übrigens schon durch die Annahme der Form $\nu g_p + \nu' g_e$ seinen Ausdruck, da die Zahlen g_p und g_e selbst die Ordnung und die Klasse einer Kongruenz sind, der die Gerade außer der Kongruenz $(\nu\nu')$ angehören soll. Der später [202] zu führende Beweis dieser Formel stellt sich denn auch nur als die Umsetzung unseres früheren Beweises des *Halphen*schen Satzes in die symbolische Form dar.

Anmerkung 1. Die vorliegenden Beispiele können schon dazu dienen, eine Beschränkung der Tragweite der symbolischen Formeln festzustellen. Daß sowohl Additionen als Subtraktionen erlaubt sind, folgt daraus, daß die Glieder wirkliche Zahlen sind, mit welchen man algebraisch operieren kann. Daher ist auch Multiplikation oder Division der symbolischen Gleichungen mit reinen Zahlen erlaubt. Nur die Multiplikationen sind symbolisch. Ihnen entsprechen daher nicht umgekehrt die Divisionen, die die algebraische Form der Ausdrücke vom algebraischen Standpunkt aus gestatten würde. Dies sieht man sogleich daran, daß die Glieder, die, wie $g_e g_p$, die Anzahlen der Lösungen unmöglicher Aufgaben angeben würden, wegfallen. So ergibt die Gleichung $g^2 = g_p + g_e$ durch die Multiplikation mit g_p, daß

$$g^2 \cdot g_p = g_p^2$$

ist, woraus man keineswegs durch Division mit g_p schließen darf, daß $g^2 = g_p$ ist. Ebenso würde das Ausziehen von Wurzeln auf sinnlose Gleichungen führen. Wegen $g_p \cdot g_e = 0$ hat man z. B.

$$(g_p + g_e)^2 = (g_p - g_e)^2,$$

woraus man aber nicht schließen darf, daß $g_p + g_e = g_p - g_e$ ist.

Die erlaubten Operationen mit den Bedingungssymbolen beschränken sich also auf Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Anmerkung 2[1]). Anwendung auf reduzible Bedingungen. Man wird sich zwar im allgemeinen bestreben, die Aufgaben, die man durch abzählende Methoden lösen will, so zu stellen, daß sie algebraisch irreduzibel werden. Es kann aber, um allgemeinere Gesichtspunkte zu erhalten, nützlich oder sogar notwendig sein, verschiedene Aufgaben in

1) Ich bemerke, daß diese Anmerkung geschrieben wurde, nachdem ich *Severis* Artikel in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XXXIII (1912): Sul Principio della Conservazione del Numero, mit dem meine Gesichtspunkte teilweise zusammenfallen, gelesen hatte.

einer Gesamtaufgabe zu vereinigen, und selbst wo solches nicht beabsichtigt ist, muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß, was nicht immer vorauszusehen ist, die Aufgaben reduzibel werden. Auch in den Spezialfällen, die bei Anwendungen der Methode der Erhaltung der Anzahlen benutzt werden, wird die gestellte Aufgabe häufig durch eine reduzible ersetzt. In dieser Hinsicht genügt es, auf Art. [3]—[8] zu verweisen und daran zu erinnern, auf wieviele Arten eine gesuchte Kurve eine gegebene in zusammenfallenden Punkten schneiden kann [158].

Die Möglichkeit, daß eine Bedingung reduzibel wird, bildet bei der Aufstellung einer Summe als Ausdruck für das Symbol kein Hindernis. Ist a das Symbol einer Bedingung, die sich auf zwei wesentlich verschiedene Bedingungen, die die Symbole b und c haben, reduzieren läßt, so drückt die Gleichung

$$a = b + c \tag{1}$$

einfach die Zusammensetzung aus, nämlich daß die Bedingung a erfüllt ist, wenn entweder b oder c erfüllt ist. Daraus soll man den Ausdruck für die Anzahl der Gebilde, die die Bedingung a und eine hinreichende Anzahl anderer Bedingungen erfüllen, durch symbolische Multiplikation mit dem Symbol k der Gesamtheit dieser Bedingungen finden, was die Formel

$$ka = kb + kc \tag{2}$$

ergibt.

Dabei kommt die Stufe oder die Anzahl der Dimensionen α, β, γ der durch die Bedingungen a, b, c definierten Gebilde in Betracht, d. h. die Anzahl der einzelnen Bedingungen, die das Symbol k umfassen muß, wenn das Gebilde durch diese neue Bedingung und beziehungsweise durch a, b oder c bestimmt werden, also das Produkt ka, kb oder kc einen endlichen Wert haben soll. Um eine wirkliche Bestimmung des gesuchten Gebildes zu ergeben, muß also k α einfache Bedingungen umfassen. Ist nun $\alpha > \gamma$, so wird, abgesehen von dem nachher zu betrachtenden Falle, wo einige der durch k auszudrückenden Bedingungen schon durch c erfüllt sind, $kc = 0$. kc kann übrigens auch null werden, wenn $\alpha = \gamma$ ist, oder selbst wenn k eine noch kleinere Anzahl von einfachen Bedingungen umfaßt; dazu genügt es nämlich, daß diese Bedingungen c widersprechen. In diesen Fällen ist in Übereinstimmung mit der Formel (2) $ka = kb$, wodurch gezeigt wird, daß die Gebilde, die die Bedingungen a und k erfüllen, allein die durch b und k bestimmten sind.

Dagegen kann, wenn, wie wir hier voraussetzten, $\gamma < \alpha = \beta$ ist, die Formel (2) im allgemeinen nicht dazu benutzt werden, solche Gebilde zu bestimmen, die dadurch die Bedingung a erfüllen, daß c erfüllt wird; aber die Formel täuscht nicht, sondern zeigt selbst, daß sie auf

einen solchen Fall nicht anwendbar ist. Läßt man nämlich in diesem Falle k lediglich γ einfache Bedingungen umfassen, so werden ka und kb unendlich, weil k und b dann nicht genügen, um das Gebilde zu bestimmen. Die Unbrauchbarkeit der Formel gibt sich also auf dieselbe Weise kund, wie überall in der abzählenden Geometrie, und eben der Versuch, die Formel (2) anzuwenden, wird dann zeigen, daß die Bestimmung der Gebilde durch die Bedingung c nicht durch diese Formel, sondern anders geschehen muß.

Wie schon angedeutet, schließt dies jedoch nicht aus, daß es, selbst wenn $\gamma < \alpha = \beta$ ist, einzelne Fälle geben kann, in welchen alle drei Glieder der Gleichung (2) endlich sind. Die Bedingung k, die für α einzelne Bedingungen gelten soll, kann nämlich eine solche sein, die durch die Bedingung c schon teilweise erfüllt ist, so daß kc nun nicht so viele Bedingungen umfaßt, daß sie einander widersprechen. Ja, es kann geschehen, daß $kc > 0$ ist, während $kb = 0$ ist.

Betrachten wir, um ein einfaches Beispiel dafür zu haben, die Bestimmung eines Kegelschnittes durch die Bedingung a, zwei Gerade je in zwei zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Diese doppelte Bedingung wird erfüllt sein, wenn (b) der Kegelschnitt mit den Geraden eigentliche Berührung (auch in der lineargeometrischen Bedeutung) hat, und wenn (c) der Kegelschnitt aus zwei zusammenfallenden Geraden besteht. Zwar kommt noch dazu der Fall, in welchem der Kegelschnit einen Doppelpunkt im Schnittpunkt der gegebenen Geraden hat; dieser ist aber ein Spezialfall desjenigen, in welchem b erfüllt ist und darf also nicht besonders aufgestellt werden. Man hat hier $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = 2$. Bezeichnet also k eine beliebige dreifache Bedingung, der man den Kegelschnitt unterwerfen kann, so wird im allgemeinen $kc = 0$, $ka = kb$. Z. B. werden die 4 Kegelschnitte, die durch drei beliebige Punkte gehen und zwei Gerade je in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, eigentliche Berührungen mit diesen haben. Anders geht es, wenn die dreifache Bedingung k die schon durch c erfüllte umfaßt: eine oder mehrere neue Linien in zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Verlangt die Bedingung k z. B., daß der Kegelschnitt noch eine dritte Gerade in zusammenfallenden Punkten schneiden und außerdem durch zwei Punkte gehen soll, dann wird $kc = 4$, indem wir [172] gesehen haben, daß die durch die zwei gegebenen Punkte gehende Doppelgerade für 4 Lösungen zu zählen ist. Die $ka = 8$ Kegelschnitte, die durch die Punkte gehen und drei Gerade je in zusammenfallenden Punkten schneiden, verteilen sich also auf diese 4 Lösungen und $kb = 4$ solche, die eigentliche Berührungen haben.

Verlangt die dreifache Bedingung, daß der Kegelschnitt durch einen Punkt gehen und zwei Gerade je in zusammenfallenden Punkten schneiden soll, so ist $kc = \infty$, ka wird dann auch ∞, und die Formel (2) liefert nun keine Bestimmung der Anzahl der Kegelschnitte mehr, die

eigentliche Berührungen haben. Diese in der Tat endliche Anzahl muß also anders bestimmt werden; sie wird einer Formulierung k' der Bedingungen entsprechen, die $k'c = 0$ macht und $k'a = k'b$ einen endlichen Wert gibt.

In diesen Beispielen begegnen uns dieselben Grenzen für die Anwendbarkeit der Formel (2), die uns früher für die multiplikative Bestimmung der Anzahl von Kurven, die durch punktgeometrische Bedingungen bestimmt werden, begegnet sind [160]. Andere könnte man den allgemeinen Bestimmungen entnehmen, die, wenn die Bedingungen *Halphen*sche Kegelschnitte ausschließen, durch symbolische Produkte von Faktoren $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ ausgedrückt werden [168]. Sind die *Halphen*schen Kegelschnitte nicht ausgeschlossen, so teilen sich die durch solche Produkte bestimmbaren Anzahlen in solche, die allgemeine Kegelschnitte, und solche, die *Halphen*sche Kegelschnitte betreffen.

Man wird hieraus ersehen haben, daß es nicht notwendig ist, sich vor der Anwendung der symbolischen Rechnung zu fragen, ob die behandelten Bedingungen irreduzibel sind oder nicht und in letzterem Falle, ob sie sich etwa in Bedingungen verschiedener Stufe spalten. Eine etwaige Unmöglichkeit der Anwendung wird sich von selbst zeigen, wenn man es nur nicht versäumt, darauf zu achten, ob eine Anzahl in der Tat unendlich ist, d. h. ob die Gleichung, deren Grad sie angeben sollte, identisch wird. Dies ist ja aber für abzählende Untersuchungen eine allgemeine Hauptregel. Man darf jedoch nicht versäumen, auf dieses Unendlichwerden besonders zu achten, das von der Möglichkeit herrührt, daß sich eine Bedingung in solche spaltet, von welchen einige von niedrigerer Stufe sind — und das ist früher eben bei den als Beispiele herangezogenen Aufgaben geschehen. (Vgl. übrigens [158].)

[190] Zusammengesetzte Figuren. Um auch die Bestimmung zusammengesetzter Gebilde in die symbolische Darstellung mit aufnehmen zu können, beachten wir, daß ihre Zusammensetzung durch die Verbindung zweier Grundelemente unter sich erreicht wird. Diese wird, wenn wir uns an die projektiven Verbindungen halten, darin bestehen, daß entweder zwei Elemente ineinander liegen: Punkt in Gerade oder Ebene, Gerade in Ebene oder zwei sich schneidende Gerade, oder darin, daß zwei gleichartige Elemente miteinander zusammenfallen: Punkt mit Punkt, Ebene mit Ebene, Gerade mit Gerade. Die erste Verbindung nennt man Inzidenz, die zweite Koinzidenz. Es gilt nun die Inzidenzformeln und die Koinzidenzformeln aufzustellen, die beziehungsweise die Bestimmung der durch die Inzidenz oder die Koinzidenz zweier Elemente entstehenden Gebilde betreffen. Die Anzahl noch weiter zusammengesetzter Gebilde wird nachher durch symbolische Multiplikation der Symbole für die Bedingungen bestimmt, welchen ihre einzelnen Elemente sowohl in Beziehung auf gegebene Gebilde als auch,

wegen der das Gebilde definierenden Inzidenzen und Koinzidenzen, in Beziehung aufeinander unterworfen sind.

[191] Inzidenzformeln für Punkt und Gerade. Wir betrachten zuerst einen Punkt p und eine Gerade g, die einander inzident sind und wenden auf sie die Symbole an, die wir beziehungsweise für einen Punkt und eine Gerade angegeben haben. Dann hat man als erste Inzidenzformel

(I) $$pg = p_g + g_e = p^2 + g_e.$$

Dieses Resultat erhält man dadurch, daß man die Gerade, welche die Gerade g zufolge der Bedingung g schneiden soll, in die Ebene, auf der der Punkt p zufolge der Bedingung p liegen soll, legt. Dann muß nämlich entweder p in der gegebenen Geraden oder g in der gegebenen Ebene liegen. $p^2 = p_g$ ist eine bereits bekannte Formel [189].

Aus (I) erhält man durch Multiplikation beider Seiten mit p

(1) $$p^2 g = p^3 + pg_e,$$

und, da $g^2 = g_e + g_p$ und $gg_e = g_s$ ist, durch Multiplikation beider Seiten mit g

(2) $$pg^2 = pg_e + pg_p = p^2 g + g_s,$$

sodann aus (1) und (2) die zweite Inzidenzformel

(II) $$pg_p = p^3 + g_s.$$

Da $p^4 = 0$ ist, so gibt Multiplikation der beiden Seiten von (II) mit p

(3) $$p^2 g_p = pg_s.$$

Durch Multiplikation der Formel (I) mit g_e erhält man weiter die dritte Hauptformel

(III) $$pg_s = p^2 g_e + G,$$

oder wegen (3)

(III′) $$p^2 g_p = p^2 g_e + G.$$

[192] Anwendung auf Raumkurven. Um sogleich die Anwendbarkeit und Allgemeinheit der Inzidenzformeln zu erkennen, wollen wir eine bereits benutzte Relation als Spezialfall der Formel (I) herleiten und daran die entsprechenden Anwendungen der übrigen Formeln anknüpfen. Diese Anwendungen betreffen den Fall, daß p ein Punkt einer Raumkurve, die durch ihn gehende Gerade g die Tangente in diesem Punkte ist. Ist die Kurve vollständig gegeben, so wird p die Ordnung, g der Rang der Raumkurve sein. Bilden die Raumkurven ein ∞^1-faches System, so wird pg die Anzahl der Raumkurven sein, welche eine gegebene Ebene so schneiden, daß die Tangente im Schnittpunkte eine gegebene Gerade schneidet. Diese Anzahl ist wegen (I) die Summe der Anzahl p^2 der Kurven, die eine gegebene Gerade

schneiden, und der Anzahl g_e derjenigen, die eine gegebene Ebene berühren. Gehören die Kurven einer festen Ebene an, so werden p^2 und g_e die Charakteristiken μ und μ' des ebenen Systems sein. Daß dann die Anzahl der Kurven, deren Tangenten in den Schnittpunkten mit einer festen Geraden durch einen festen Punkt gehen, oder die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der durch einen festen Punkt gehenden Tangenten gleich $\mu + \mu'$ ist, haben wir schon in [171] 4 durch ganz dieselbe Anwendung der Methode der Erhaltung der Anzahl, wie hier, bewiesen. Jetzt hat aber diese Betrachtung, die ja auch den Formeln (II) und (III) zugrunde liegt, auf einmal viel allgemeinere Resultate ergeben und erspart uns also die Mühe, bei jeder einzelnen der in ihnen enthaltenen Ergebnisse dieselbe Beweisführung zu wiederholen — was übrigens nicht schwierig wäre.

Die Formel (II) läßt sich auf ein System von ∞^2 Raumkurven anwenden. pg_p ist dann die Anzahl der Kurven, welche eine gegebene Ebene so schneiden, daß die Tangente im Schnittpunkte durch einen gegebenen Punkt geht; p^3 ist die Anzahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Kurven und g_s die Anzahl der Kurven, die Strahlen eines gegebenen Büschels berühren.

Ebenso läßt sich die Formel (III) auf ein System von ∞^3 Raumkurven anwenden. pg_s ist dann die Anzahl der Kurven, die eine gegebene Ebene so schneiden, daß die Tangente im Schnittpunkte Strahl eines gegebenen Büschels wird, p^2g_e die Anzahl derjenigen, die eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkt berühren, G die Anzahl derjenigen, die eine gegebene Gerade berühren.

[193] Anwendung auf Vielecke. Als Beispiel für die Anwendung der durch Multiplikation der Inzidenzformeln gebildeten neuen Formeln, suchen wir die Anzahl der räumlichen n-Ecke, deren Scheitel $a_1, a_2, \dots a_n$ auf gegebenen Ebenen liegen, während ihre Seiten $g_1, g_2, g_3, \dots g_n$ (die mit $a_1 a_2$, $a_2 a_3$ usw. identisch sind) durch gegebene Punkte gehen. Durch Multiplikation dieser Bedingungen ergibt sich die Anzahl

$$N = a_1 g_{1p} a_2 g_{2p} \dots a_n g_{np}.$$

Wegen der Inzidenz von a_1 und g_1, von a_2 und $g_2, \dots$ von a_n und g_n hat man ([191], II)

$$a_1 g_{1p} = a_1^3 + g_{1s},$$
$$a_2 g_{2p} = a_2^3 + g_{2s},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_n g_{np} = a_n^3 + g_{ns}.$$

Bei der Multiplikation dieser Ausdrücke ist zu bemerken, daß $a_2^3 g_{1s} = 0$ ist, weil die durch dieses Symbol ausgedrückten Forderungen nicht gleichzeitig von dem Punkt a_2 und der durch ihn gehenden Ge-

raden g_1 erfüllt werden können; ebenso ist $a_3^3 g_{2s} = \cdots = a_1^3 g_{ns} = 0$. Man findet also

$$N = a_1^3 a_2^3 \ldots a_n^3 + g_{1s} g_{2s} \ldots g_{ns}.$$

Hier ist $a_1^3 a_2^3 \ldots a_n^3 = 1$ weil das Vieleck durch seine Scheitel vollständig bestimmt sein wird. Bei der Bestimmung von $g_{1s} g_{2s} \ldots g_{ns}$ ist zu bemerken, daß die Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ immer ein geschlossenes n-Eck bilden sollen. Die Bestimmung wird so auf die der entsprechend gemeinsamen Punkte zweier projektiver Punktreihen eines gemeinschaftlichen Trägers zurückgeführt. $g_{1s} g_{2s} \ldots g_{ns}$ ist also 2.

Daß $g_{1s} g_{2s} \ldots g_{ns} = 2$ ist, läßt sich aber auch aus den Formeln (II) und (III') in [191] herleiten. Dies geschieht durch eine Umbildung des Produktes $g_{1s} \cdot g_{2s}$, die durch Einführung des Schnittpunktes p der Geraden g_1 und g_2 möglich wird. (Da wir hier eine neue Aufgabe besonders lösen, wollen wir diesen Punkt nicht mehr a_2, wie in der Hauptaufgabe nennen.) Dann ist wegen der genannten Formeln

$$\begin{aligned} g_{1s} g_{2s} &= (p \cdot g_{1p} - p^3)(p g_{2p} - p^3) = p^2 g_{1p} g_{2p} = (G_1 + p^2 g_{1e}) g_{2p} \\ &= G_1 g_{2p} + g_{1e}(G_2 + p^2 g_{2e}) = G_1 g_{2p} + G_2 g_{1e}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$G_1 g_{2p} g_{3s} \ldots g_{ns} = 1$$

und

$$g_{1e} G_2 g_{3s} \ldots g_{ns} = 1,$$

weil das n-Eck vollständig bestimmt ist, wenn eine Seite gegeben ist, und eine anliegende durch einen gegebenen Punkt geht oder in einer gegebenen Ebene liegt, während die übrigen gegebenen Büscheln angehören.

Man ersieht also, daß unsere ursprüngliche Aufgabe drei Auflösungen hat, oder daß es drei n-Ecke gibt, deren Seiten durch gegebene Punkte gehen, während ihre Scheitel auf gegebenen Ebenen liegen. Schneiden sich letztere in einem Punkt, was immer eintrifft, wenn $n = 3$ ist, so wird eine der drei Lösungen dadurch entstehen, daß alle Scheitel des n-Ecks in dem Schnittpunkt der gegebenen Ebenen zusammenfallen. Das gefundene Resultat läßt sich auch so ausdrücken: Wenn die Seiten eines räumlichen n-Ecks durch n feste Punkte gehen und die $n - 1$ Ecken sich auf $n - 1$ festen Ebenen bewegen, ist für $n > 3$ der Ort der letzten Ecke eine Raumkurve dritter Ordnung. Für $n = 3$ wird, abgesehen von der oben genannten uneigentlichen Lösung, die Figur durch eine ebene Figur ersetzt und der Ort wird ein Kegelschnitt.

[194] Andere Inzidenzformeln. Nach dieser Erörterung über die Bildung und Anwendung der Formeln für die Inzidenz von Punkt und Gerade deuten wir nur kurz an, wie man bei anderen Inzidenzen verfahren kann. Die Inzidenzformeln für Ebene und Gerade

lassen sich aus denjenigen für Punkt und Gerade mittels des Dualitätsprinzips herleiten. Aus der Formel [191] (I)

$$pg = p^2 + g_e,$$

folgt z. B., wenn die Ebene e die Gerade g enthalten soll:

$$eg = e^2 + g_p.$$

Aus diesen beiden Formeln kann man durch bloße symbolische Rechnung eine Inzidenzformel für Punkt und Ebene herleiten. Wenn sich nämlich der Punkt p in der Geraden g, diese in der Ebene e befindet, so muß sich auch p in der Ebene e befinden. Man muß also nur die Gerade g eliminieren. Zunächst erhält man also

$$p^2e + eg_e = e^2p + p \cdot g_p$$

Nun ist aber [191] (II)

$$pg_p = p^3 + g_s$$

und wegen des Dualitätsprinzips

$$eg_e = e^3 + g_s.$$

Durch Einsetzen findet man als erste Formel

(1) $$p^3 - p^2e + pe^2 - e^3 = 0.$$

Eine zweite ergibt sich durch Multiplikation mit p oder e

(2) $$p^3e - p^2e^2 + pe^3 = 0.$$

Nochmalige Multiplikation mit p oder e führt zu

(3) $$p^3e^2 = p^2e^3.$$

Letztere Gleichung folgt übrigens auch unmittelbar daraus, daß ein Punkt und eine mit ihm inzidente Ebene durch die durch die beiden Seiten der Gleichung ausgedrückten Bedingungen vollständig bestimmt sind.

Auch die Inzidenzformeln für zwei sich schneidende Geraden lassen sich durch die Formeln bilden und ersetzen, die ausdrücken, daß der Schnittpunkt sich auf beiden Geraden befindet, oder daß die gemeinschaftliche Ebene sie beide enthält. Ein Beispiel dafür ist unsere in [193] angegebene Umbildung des Produkts

$$g_{1s}g_{2s}.$$

Ebenso leitet man aus den gefundenen Formeln andere her, die anderen deskriptiven Verbindungen entsprechen. Wenn man z. B. durch [191] (I) ausgedrückt hat, daß die Punkte a, b, c in der Geraden g liegen, findet man durch Elimination von g die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

die stattfinden muß, wenn die drei Punkte überhaupt auf derselben Geraden liegen. Aus der eben bewiesenen Gleichung [194] (1) findet man ebenso die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = 0,$$

die stattfinden muß, wenn die vier Punkte a, b, c, d in derselben Ebene liegen.

[195] Koinzidenzformeln. Durch die sogenannten Koinzidenzformeln werden die verschiedenen Anwendungen des Korrespondenzprinzips in die Behandlung durch symbolische Rechnung hereingezogen. Auch hier begnügt man sich mit einmaliger Anwendung des genannten Prinzips; die übrigen einfachen Anwendungen gehen aus der so erhaltenen Formel durch Multiplikation mit verschiedenen Faktoren hervor, und die Auflösung komplizierterer Aufgaben, die sonst mehrmalige Anwendung des Korrespondenzprinzips erfordern würden, geschieht durch algebraische Kombinationen der verschiedenen Inzidenz- und Koinzidenzformeln.

Wir betrachten zuerst ein Paar Punkte p und q des Raumes, das auf irgendwelche, durch Einführung symbolischer Faktoren ausdrückbare Weise so bestimmt ist, daß zu einer vollständigen Bestimmung nur eine einfache Bedingung fehlt. Übereinstimmend mit der früheren Symbolik werden dann p und q die Anzahlen der Punktepaare bezeichnen, deren Punkt p beziehungsweise q in einer gegebenen Ebene liegt. Mit g bezeichnen wir sowohl die Gerade pq als auch die Anzahl der Punktepaare, deren Gerade g eine gegebene Gerade schneiden. Durch Anwendung des Korrespondenzprinzips auf die Ebenen, die eine feste Gerade mit den Punkten p und q verbinden, findet man dann

(1) $$\varepsilon = p + q - g,$$

wo ε die Anzahl der zusammenfallenden Punktepaare pq ist; denn die entsprechenden Ebenen fallen zusammen, wenn entweder die Punkte p und q zusammenfallen oder die Gerade g die Achse des Büschels schneidet (s. [107]).

Durch Multiplikation dieser Formel mit g, g_p, g_e, g_s, G und Anwendung der Fundamentalformeln und Inzidenzformeln findet man

$$\begin{aligned} \varepsilon g &= pg + qg - g^2 \\ &= (g_e + p^2) + (g_e + q^2) - (g_p + g_e) \end{aligned}$$

(2) $$= p^2 + q^2 + g_e - g_p$$



$$\varepsilon g_p = p g_p + q g_p - g \cdot g_p$$
$$= (p^3 + g_s) + (q^3 + g_s) - g_s$$
$$= p^3 + q^3 + g_s \tag{3}$$
$$\varepsilon g_e = p \cdot g_e + q \cdot g_e - g_s \tag{4}$$
$$\varepsilon g_s = p^2 g_e + q^2 g_e + G \tag{5}$$
$$\varepsilon G = pG + qG. \tag{6}$$

Letztere Formel drückt das eigentliche für zwei Punkte einer festen Geraden geltende Korrespondenzprinzip aus.

Ebenso kann man die Formel (1) wiederholt mit p oder mit q multiplizieren. Da es aber nach dem Zusammenfallen ganz gleichgültig ist, ob man den Koinzidenzpunkt p oder q nennt, werden die durch Multiplikation von ε mit p, p^2, p^3 erhaltenen Ausdrücke mit denjenigen identisch sein, die durch Multiplikation mit q, q^2, q^3 entstehen. Zeigt sich diese Identität nicht unmittelbar in der Form, so kann sie zu weiteren Reduktionen benutzt werden. Wir erhalten durch diese Multiplikation und Reduktion mittels der Inzidenzformeln [191]

$$\varepsilon p = p^2 + pq - gp = p^2 + pq - p^2 - g_e = pq - g_e, \tag{7}$$
$$\varepsilon p^2 = p^2 q - p g_e = p q^2 - q g_e, \tag{8}$$
$$\varepsilon p^3 = p^3 q - p^2 g_e = p q^3 - q^2 g_e = p^2 q^2 - p q g_e. \tag{9}$$

Ebenso kann man die übrigen Formeln (2) — (5) mit p multiplizieren und sämtliche erhaltenen Formeln weiter algebraisch miteinander verbinden.

[196] Systeme von ∞^1 und ∞^2 Punktepaaren. Die Formel [195] (1) ist dieselbe, die wir in [107] auf die gleiche Weise hergeleitet haben, indem wir statt p, q und g die Bezeichnungen α_1, α_2 und β benutzten. Ihre wichtigsten Anwendungen auf Systeme von ∞^1 Punktepaare haben wir daher auch im Anschluß an [107] dargelegt.

Auf Systeme von ∞^2 Punktepaare beziehen sich die Formeln (2) und (7). Wenn man diese Formeln auf Punkte in einer Ebene anwendet, so werden sie den früher bewiesenen Korrespondenzsatz für die Ebene [146] ausdrücken. Auf diesen Spezialfall kann man durch Multiplikation mit g_e kommen, aber einfacher dadurch, daß man in den Formeln (2) und (7) voraussetzt, daß alle Punktepaare in einer festen Ebene liegen. Dann wird $g_p = 0$, während g für die Ebene durch g_p, wo p einen Punkt der Ebene bezeichnet, und g_e durch G zu ersetzen ist. Dadurch wird man

$$\varepsilon g_p = p^2 + q^2 + G \tag{10}$$

und

$$\varepsilon p = pq - G \tag{11}$$



erhalten, wo p^2 und q^2 die Anzahlen der Punktepaare bedeuten, deren Punkt p beziehungsweise q gegeben ist, pq die Anzahl derjenigen, deren Punkte p und q in zwei gegebenen Geraden liegen, und G derjenigen, die in einer gegebenen Geraden liegen. p^2, q^2, pq und G sind also die Zahlen, die wir in [146] beziehungsweise α_2, α_1, β und γ nannten, εp ist die Ordnung η der Koinzidenzkurve und εg_p ist die Summe der Anzahl ξ der isolierten Koinzidenzpunkte und der Klasse ζ der Koinzidenzenveloppe. Die Formeln (10) und (11) sind also dieselben, wie die Formeln [146] (2') und (1), mit deren Anwendung wir uns schon beschäftigt haben.

[197] Singuläre Tangenten einer Fläche m^{ter} Ordnung. Hat man es mit ∞^2 Punktepaaren im Raume zu tun, so wird es oft bequem sein, diese durch Projektion mit Punktepaaren in der Ebene zu vertauschen. Zu ihrer unmittelbaren Untersuchung bieten sich aber die vollständigen Formeln [195] (2) und (7), nämlich

$$\varepsilon g = p^2 + q^2 + g_e - g_p \tag{2}$$

und

$$\varepsilon p = pq - g_e \tag{7}$$

dar. Als Beispiel wollen wir diese Formeln zur Bestimmung der singulären Tangenten einer allgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung anwenden. Wir fangen dann damit an, den Fall zu betrachten, in welchem die Punktepaare pq von verschiedenen Schnittpunkten, in denen Strahlen einer von der Fläche unabhängigen Kongruenz von der Ordnung r und der Klasse r' die Fläche treffen, gebildet werden. Dann wird

$$g_e = r'm(m-1),\; g_p = rm(m-1),\; p^2 = q^2 = mr(m-1).$$

Die Ordnung der Fläche, die von Strahlen der Kongruenz, welche noch eine gegebene Gerade schneiden, erzeugt wird, ist $r + r'$ (s. [31]), die Ordnung derjenigen, für welche die Gerade durch einen ebenen Schnitt der Fläche ersetzt wird, also $m(r + r')$. Diese wird einen anderen ebenen Schnitt in $m^2(r + r')$ Punkten schneiden, von welchen jedoch $m \cdot r$ in die m Schnittpunkte der beiden Schnitte fallen. Die übrigen liegen auf Strahlen der Kongruenz, die verschiedene Punkte p und q verbinden. Also ist

$$pq = rm(m-1) + r'm^2.$$

Die Formeln (2) und (7) geben also

$$\varepsilon g = (r + r')m(m-1),$$
$$\varepsilon p = rm(m-1) + r'm.$$

εp ist die Ordnung der Kurve, längs welcher die Fläche von Strahlen der Kongruenz berührt wird, εg die Ordnung der von den berührenden Strahlen erzeugten Fläche. Für $r = 0$, $r' = 1$ wird man die Ordnung

$\varepsilon p = m$ und die Klasse $\varepsilon g = m(m-1)$ eines ebenen Schnittes bekommen, für $r = 1$, $r' = 0$ die Ordnungen der Berührungskurve eines umbeschriebenen Kegels und dieses Kegels selbst ($\varepsilon p = \varepsilon g = m(m-1)$).

Hier setzten wir voraus, daß die Kongruenz von der Fläche unabhängig ist (und hätten daher auch *Halphen*s Kongruenzsatz anwenden können). Wir können aber dieselbe Methode auch dann anwenden, wenn diese Unabhängigkeit nicht stattfindet. Betrachten wir z. B. die Kongruenz der Geraden, die die Fläche in Punkten eines ebenen Schnittes berühren. Die Ordnung dieser Kongruenz ist $m(m-1)$, ihre Klasse m. Sei g ein Strahl der Kongruenz und p und q zwei seiner $m-2$ Schnittpunkte mit der Fläche. Dann ist

$$p^2 = q^2 = m \cdot m(m-1) \cdot (m-3) = m^2(m-1)(m-3),$$
$$pq = [(m(m-1) + m)m - 2m]m - 2m \cdot m - m \cdot m(m-1)$$
$$= m^2(m^2 - m - 3).$$

Das erste Glied ist nämlich die Anzahl der Schnittpunkte des ebenen Schnittes (q) mit der Fläche, welche von den Strahlen der Kongruenz erzeugt wird, die den Schnitt (p) in Punkten, die nicht auf ihrer Berührungskurve liegen, schneiden. Auszunehmen von diesen sind die $2m$ Schnittpunkte, die in jeden der m Schnittpunkte des gegebenen ebenen Schnittes und des Schnittes (q) fallen, und die $m(m-1)$, die in jeden der m Schnittpunkte der Schnitte (p) und (q) fallen. Weiter ist

$$g_e = m(m-2)(m-3),$$
$$g_p = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Aus den Formeln (7) und (2) folgt sodann, daß

$$\varepsilon p = m(m^3 - 2m^2 + 2m - 6),$$
$$\varepsilon g = m(m-3)(m^2 + 2m - 4)$$

ist. εg ist die Ordnung der Regelfläche, deren Erzeugende die gegebene Fläche in einem Punkt eines ebenen Schnittes und in einem weiteren Punkte berühren, εp ist die Ordnung des Ortes dieses Punktes.

Betrachten wir sodann den Fall, in welchem die Geraden g die Doppeltangenten der Fläche, die Punkte p und q ihre beiden Berührungspunkte sind. Die Kongruenz der Doppeltangenten hat [88] die Ordnung $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ und [70] die Klasse $\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+3)$. Um g_p und g_e zu erhalten, muß man das Doppelte dieser Zahlen nehmen, weil jeder Berührungspunkt der Doppeltangente g der Punkt p beziehungsweise q sein kann. Man findet dann, da pq den eben für εp gefundenen Wert hat:

$$p^2 = q^2 = m(m(m-1) - 6),$$
$$pq = m(m^3 - 2m^2 + 2m - 6),$$



$$g_e = m(m-2)(m-3)(m+3),$$
$$g_p = m(m-1)(m-2)(m-3),$$

und daraus mittels der Formeln (7) und (2)

$$\varepsilon p = m(11m-24),$$
$$\varepsilon g = 2m(m-3)(3m-2).$$

εg ist die Ordnung der Regelfläche, deren Erzeugende mit der Fläche Berührung dritter Ordnung haben (sie vierpunktig schneiden), εp ist die Ordnung der Berührungskurve dieser Fläche. Für $m = 3$ wird $\varepsilon p = 27$ die Anzahl der auf der Fläche liegenden Geraden sein.

Hieran knüpft man leicht die Bestimmung der Geraden, die Berührung vierter Ordnung mit der Fläche haben (sie fünfpunktig schneiden). Die eben genannte Regelfläche schneidet die gegebene Fläche in einer Kurve von der Ordnung $2m^2(m-3)(3m-2)$. Davon ist die Berührungskurve, die von der Ordnung $m(11m-24)$ ist, ein vierfacher Teil. Übrig bleibt eine eigentliche Schnittkurve von der Ordnung $2m(m-4)(3m^2+m-12)$. Man kann nun das einfache Korrespondenzprinzip (Formel (1)) auf den Fall anwenden, in welchem g eine Erzeugende der Regelfläche ist, p ihr Berührungspunkt, q einer der $m-4$ Schnittpunkte. Dann ist

$$p = m(11m-24)(m-4),$$
$$q = 2m(m-4)(3m^2+m-12),$$
$$g = 2m(m-3)(3m-2)(m-4),$$

also wird die gesuchte Anzahl

$$\varepsilon = 5m(m-4)(7m-12).$$

Auf ähnliche Weise und in ähnlicher Reihenfolge kann man auch die übrigen Anzahlen der Geraden finden, die mehrmals oder mehrpunktig eine algebraische Fläche von der Ordnung m berühren. Man kann auch der Fläche Doppelkurven und allerlei andere singuläre Kurven oder Punkte beilegen. Dabei kann es jedoch nötig werden, die Regeln in [105] zur Abzählung der zusammenfallenden Lösungen zu benutzen, die durch das in den Formeln enthaltene Korrespondenzprinzip angegeben werden (s. [205] 4).

[198] Systeme von ∞^3 Punktepaaren; Korrespondenzsatz für den Raum. Zur Bestimmung der Koinzidenzen von Punktepaaren eines ∞^3-fachen Systems (Systems dritter Stufe) dienen die Formeln [195] (3), (4) und (8), nämlich:

(3) $$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s,$$

(4) $$\varepsilon g_e = pg_e + qg_e - g_s,$$

(8) $$\varepsilon p^2 = p^2 q - pg_e = pq^2 - qg_e.$$

Aus diesen Formeln findet man durch Elimination von g_s, pg_e und qg_e die Formel

$$(12) \qquad \varepsilon g_p + \varepsilon g_e + 2\,\varepsilon p^2 = p^3 + p^2 q + pq^2 + q^3,$$

die man früher als Korrespondenzprinzip im Raume bezeichnet hatte. Als solches bezeichnet man *(Schubert)* jetzt die Gesamtheit der Formeln (3), (4) und (8) oder (3), (4) und (12). Um die linken Seiten dieser Formeln vollständig zu erklären, bemerken wir, daß der Umstand, daß es in einem Systeme von ∞^3 Punktepaaren ∞^2 — mehr oder weniger verschiedene — koinzidierende geben wird, auf die folgenden Arten von Koinzidenzen führt:

1. Die Koinzidenzen erster Art (oder volle Koinzidenzen) finden in isolierten Punkten (Koinzidenzpunkten) statt, und jede Gerade durch einen solchen Punkt ist als Verbindungsgerade koinzidierender Punkte zu betrachten. Diese Geraden bilden die erste Koinzidenzkongruenz; sie ist von der Klasse null (da sie aus Koinzidenzbündeln besteht).

2. Die Koinzidenzen zweiter Art finden in allen Punkten einer Kurve (Koinzidenzkurve) statt, und die Verbindungslinie der in einem Punkt dieser Kurve koinzidierenden Punkte erzeugen eine Kegelfläche; sämtliche Verbindungslinien koinzidierender Punkte bilden die zweite Koinzidenzkongruenz.

3. Die Koinzidenzen dritter Art finden in allen Punkten einer Fläche (Koinzidenzfläche) statt, und in jedem Punkt dieser Fläche hat die Verbindungslinie koinzidierender Punkte eine bestimmte Lage (sonst würde man die Fläche als mehrfache betrachten); zusammen bilden diese Verbindungslinien die dritte Koinzidenzkongruenz.

Die durch die Formel (3) bestimmte Anzahl εg_p ist die Summe der Ordnungen der drei Koinzidenzkongruenzen oder der Anzahl der Koinzidenzpunkte und der Ordnungen der zweiten und dritten Koinzidenzkongruenz.

Die durch die Formel (4) bestimmte Anzahl εg_e ist die Summe der Klassen der zweiten und der dritten Koinzidenzkongruenz. Erstere ist übrigens das Produkt der Ordnung der Kongruenzkurve und der Ordnung der zu ihr gehörigen Kongruenzkegel; wenn es mehrere Kongruenzkurven gibt, so ist sie die Summe solcher Produkte. Die durch die Formel (8) bestimmte Zahl εp^2 ist die Ordnung der Koinzidenzfläche. Wenn $\varepsilon p^2 = 0$ ist, werden die Koinzidenzen dritter Art ganz fehlen. Wenn auch $\varepsilon g_e = 0$ ist, werden die Koinzidenzen zweiter Art ebenfalls fehlen. Dann wird εg_p die Anzahl der Koinzidenzpunkte sein.

Als ein erstes Beispiel für die Anwendung der Formeln (3), (4), (8) können wir hier sogleich die Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte einer Raumkurve n^{ter} Ordnung und einer Fläche m^{ter} Ordnung anführen. Gehört p der Kurve, q der Fläche an, so hat man



$$p^3 = q^3 = p^2q = pg_e = 0,\ pq^2 = qg_e = g_s = mn,$$

und also

$$\varepsilon g_e = \varepsilon p^2 = 0,\ \varepsilon g_p = mn.$$

[199] Anwendung auf projektive Raumgebilde. Wenn p und q entsprechende Punkte zweier in demselben linearen Raume liegender und auf einander projektiv bezogener Räume sind, so ist

$$p^3 = q^3 = p^2q = pq^2 = 1.$$

Daß auch im allgemeinen $pg_e = qg_e = 1$ ist, folgt daraus, daß, wenn p und g in gegebenen Ebenen liegen, p in der Schnittlinie dieser Ebenen, q also in der dieser Geraden entsprechenden Geraden und folglich im Schnittpunkte der letzteren Geraden mit der g enthaltenden Ebene liegen muß. Um g_s zu bestimmen, bemerken wir, daß die gesuchten Strahlen des gegebenen Büschels entsprechende Punkte zweier projektiv aufeinander bezogener Geraden, nämlich derjenigen, in welchen die Ebene des Büschels die zwei ihr entsprechenden Ebenen schneiden, verbinden müssen. Also ist $g_s = 2$. Durch Einsetzen dieser Werte findet man zunächst $\varepsilon p^2 = \varepsilon g_e = 0$, d. h. es gibt nur Koinzidenzpunkte, sodann die Anzahl $\varepsilon g_p = 4$ dieser Punkte.

Man könnte die Gleichungen $pg_e = qg_e = 1$, $g_s = 2$ als Bedingungen für die allgemeine Lage, in welcher nicht alle Punkte einer Geraden oder einer Ebene sich selbst entsprechen, aufstellen.

Von den Spezialfällen merken wir uns zuerst jenen, in welchem alle Punkte einer Geraden l sich selbst entsprechen. Dann wird von den entsprechend gemeinsamen Strahlen, die wir eben zur Bestimmung von g_s benutzten, der eine derjenige sein, der durch den Schnittpunkt der Ebene des Büschels mit der singulären Geraden l geht. Dieser ist nicht eine Gerade g, also ist $g_s = 1$. Da, wie früher, $\varepsilon p^2 = 0$ und also $pg_e = qg_e = 1$ sein muß, wird $\varepsilon g_e = 1$. Die Klasse der Koinzidenzkongruenz zweiter Art ist also 1. Die von einem Punkte von l ausgehenden Geraden der Kongruenz (der zweiten Koinzidenzkongruenz) liegen also in einer Ebene, und da durch jeden Punkt von l nur eine solche Ebene geht, bilden diese Ebenen einen Ebenenbüschel, dessen Achse wir l' nennen werden. Die Geraden der Kongruenz sind also diejenigen, die l und l' schneiden. Somit ist auch die Ordnung der Kongruenz 1. Nun gibt die Formel (3), daß $\varepsilon g_p = 3$ ist, und in diesem Wert ist die eben genannte Ordnung der zweiten Koinzidenzkongruenz inbegriffen. Übrig bleiben zwei isolierte, entsprechend gemeinsame Punkte, welche sich ja auch in bekannter Weise auf l' bestimmen lassen.

Entsprechen auch alle Punkte der Geraden l' sich selbst, so wird $g_s = 0$, $\varepsilon g_e = 2$, $\varepsilon g_p = 2$. Die Kongruenz wird zwar auch dann aus den l und l' schneidenden Geraden bestehen; aber jede solche Gerade ist zweimal zu zählen, weil in ihren Schnittpunkten mit den beiden Geraden

l und l' Koinzidenzen stattfinden. Daher bleiben keine isolierten Koinzidenzpunkte übrig.

Sind alle Punkte einer Ebene entsprechend gemeinsam, (d. h. für die perspektivische Lage), so muß $\varepsilon p^2 = 1$, also $pg_e = qg_e = 0$ und daher auch, weil εg_e nicht negativ sein kann, $g_s = 0$, $\varepsilon g_e = 0$, $\varepsilon g_p = 2$ sein. Letztere Zahl umfaßt einen einzigen isolierten, entsprechend gemeinsamen Punkt und die Ordnung 1 der in diesem Fall existierenden dritten Koinzidenzkongruenz, die hier mit der ersten zusammenfällt.

In ähnlicher Weise kann man die Anzahl der entsprechend gemeinsamen Punkte zweier (in demselben linearen Raum liegender) mehrdeutig aufeinander bezogener Räume bestimmen. Wenn es hier nur isolierte Koinzidenzpunkte gibt und also $\varepsilon g_e = \varepsilon p^2 = 0$ ist, so wird die Anzahl dieser Punkte durch die Formel [198] (12) bestimmt. Die Fälle, in welchen es Koinzidenzen zweiter und dritter Art gibt, fordern aber besondere Untersuchungen, die sich nicht ausschließlich durch unsere Formeln (3), (4), (8) durchführen lassen, weil die Zahlen εg_e und εp^2 selbst aus verschiedenen Zahlen zusammengesetzt sind. Dies sahen wir eben bei dem einfachen Falle der projektiven Beziehung, wo wir auch andere Betrachtungen beiziehen mußten.

[200] Gegenseitige Berührungen von Flächen zweier einstufiger (∞^1-facher) Systeme. In der folgenden Anwendung werden wir den Formeln (3), (4), (8) die dualistisch entsprechende Bedeutung geben. p und q sind dann zwei homologe Ebenen, und gleichzeitig bezeichnen p und q die Bedingung, daß sie durch gegebene Punkte gehen; g ist die Schnittlinie der genannten Ebenen und g_p bezeichnet jetzt die Bedingung, daß sie in einer gegebenen Ebene liegt, g_e die Bedingung, daß sie durch einen gegebenen Punkt geht; dagegen bleibt die Bedeutung von g_s ungeändert. Die beabsichtigte Anwendung ergibt die Bestimmung des Ortes der Berührungspunkte zweier Flächen, die beziehungsweise den ∞^1-fachen Systemen $S_{\mu,\mu',\mu''}$ und $S_{\mu_1,\mu_1',\mu_1''}$ angehören, welche auf die in [17] dargelegte Weise beziehungsweise durch μ, μ', μ'' und μ_1, μ_1', μ_1'' charakterisiert werden. p und q sollen Tangentialebenen an Flächen der beiden Systeme in einem willkürlichen Punkte des Raumes bezeichnen. Man hat dann

$$p^3 = \mu''\mu_1, \quad q^3 = \mu_1''\mu.$$

Um g_s zu bestimmen, bemerken wir, daß die Flächen die Ebene des (durch s bezeichneten) Büschels in Systemen $S_{\mu,\mu'}$ und $S_{\mu_1,\mu_1'}$ schneiden. Die Örter der Berührungspunkte der Kurven dieser Systeme mit den Strahlen des Büschels werden beziehungsweise von den Ordnungen $\mu + \mu'$ und $\mu_1 + \mu_1'$ sein und beziehungsweise einen μ-fachen und einen μ_1-fachen Punkt im Zentrum des Büschels haben [18]. Die übrigen Schnittpunkte werden die Strahlen des Büschels bestimmen, die Schnittlinien entsprechender Ebenen p und q sind. Also ist

$$g_s = \mu\mu_1' + \mu'\mu_1 + \mu'\mu_1'.$$



Der gesuchte Ort wird eine Kurve von der Ordnung εg_p sein; denn die Schnittlinien der zusammenfallenden Ebenen werden alle Strahlen des durch den Berührungspunkt und die Berührungsebene bestimmten Büschels sein; also enthält jede durch einen Berührungspunkt gehende Ebene eine solche Gerade. Aus [195] (3) folgt daher, daß der Ort eine Kurve von der Ordnung

$$\mu\mu_1'' + \mu''\mu_1 + \mu\mu_1' + \mu'\mu_1 + \mu'\mu_1'$$

ist.

Aus dem Dualitätsprinzip (oder aus unmittelbarer Anwendung der Formel (3) auf die Paare, die von den Berührungspunkten willkürlicher Ebenen mit Flächen der beiden Systeme gebildet werden) folgt sodann, daß die Klasse der abwickelbaren Fläche, die von den Berührungsebenen der Flächen der Systeme erzeugt wird,

$$\mu''\mu_1 + \mu\mu_1'' + \mu''\mu_1' + \mu'\mu_1'' + \mu'\mu_1'$$

ist.

Letzteres Resultat könnte man aber auch im Anschluß an unsere erstere Bestimmung (durch die von Tangentialebenen mit demselben Berührungspunkte gebildeten Paare) aus der Formel [195] (4) herleiten. εg_e wird dann nämlich eben die gesuchte Klasse sein. Dabei brauchen wir die Anzahl pg_e der Ebenenpaare, deren Ebene p durch einen festen Punkt geht, während die Gerade g einen anderen festen Punkt trifft. Um diese zu bestimmen, bemerken wir erstens, daß dann die Ebene p durch die beiden festen Punkte, also durch eine feste Achse gehen muß, und daß der Ort der Berührungspunkte solcher Ebenen mit dem System $S_{\mu, \mu', \mu''}$ eine Kurve von der Ordnung $\mu' + \mu''$ ist. Weiter soll die durch einen festen Punkt gehende Gerade g auch eine Fläche des Systems $S_{\mu_1, \mu_1', \mu_1''}$ berühren. Der Ort dieser Berührungspunkte ist eine Fläche von der Ordnung $\mu_1 + \mu_1'$. Die Schnittpunkte dieser Fläche und jener Kurve bestimmen die gesuchten pg_e Ebenenpaare. Also ist

$$pg_e = (\mu' + \mu'')(\mu_1 + \mu_1'),$$

und ebenso

$$qg_e = (\mu_1' + \mu_1'')(\mu + \mu'),$$

und da

$$g_s = \mu\mu_1' + \mu'\mu_1 + \mu'\mu_1'$$

ist, wird die Formel (4) eben

$$\varepsilon g_e = \mu''\mu_1 + \mu\mu_1'' + \mu''\mu_1' + \mu'\mu_1'' + \mu'\mu_1'$$

ergeben. Da übrigens $\varepsilon p^2 = 0$ ist, wird $p^2 q = pg_e$, was man auch aus der direkten Bestimmung von $p^2 q$ sieht; hieraus kann man dann εp^2 bestimmen. In den beiden Fällen wird aber vorausgesetzt, daß die Flächen der Systeme nicht eben alle dieselbe feste Fläche längs Kurven berühren.

[201] Beispiele von Koinzidenzen von Punktepaaren, die Systemen höherer Stufe angehören; Anwendung zum Beweis von Inzidenzformeln. Die Formel (5) in [195]:

$$\varepsilon g_s = p^2 g_e + q^2 g_e + G \tag{5}$$

betrifft Systeme von ∞^4 Punktepaaren. Ein solches wird z. B. von den Punkten p einer Fläche m_1^{ter} Ordnung und den Punkten q einer Fläche m_2^{ter} Ordnung gebildet. Für dieses hat man offenbar

$$p^2 g_e = q^2 g_e = 0, \;\; G = m_1 m_2,$$

also

$$\varepsilon g_s = m_1 m_2.$$

Die Schnittkurve wird somit jede Ebene in $m_1 m_2$ Punkten schneiden, und die Grenzlage der Verbindungslinie g der in einem Punkte der Schnittkurve zusammenfallenden Punkte p und q ist eine ganz beliebige.

Das System von Formeln [195] umfaßt auch die Inzidenz der Punkte p mit ihnen entsprechenden Ebenen oder Geraden, Flächen oder Kurven. Man braucht nämlich nur den anderen Punkt q des Paares in beliebiger Lage auf das entsprechende Gebilde zu legen. Ebenso umfaßt es die Inzidenz von zwei entsprechenden Geraden oder Kurven im Raume; hier hat man nur für p und q zwei Punkte solcher entsprechender Gebilde zu nehmen. Wir können die Anwendung dieser Überlegung durch das folgende einfache Beispiel beleuchten: Jedem Punkte p lassen wir alle Punkte q einer Ebene entsprechen und umgekehrt jedem Punkte q alle Punkte p einer Ebene. Die Punkte p (beziehungsweise q) und die entsprechenden Ebenen bilden dann zwei korrelative (dualistisch entsprechende) Räume. Auf das fünfstufige System solcher Punktepaare können wir die Formel [195] (6)

$$\varepsilon G = pG + qG \tag{6}$$

anwenden. Man hat hier $pG = qG = 1$, also $\varepsilon G = 2$, oder der Ort der Koinzidenzpunkte — oder der Inzidenzpunkte der Punkte p (beziehungsweise q) und der ihnen entsprechenden Ebenen — ist eine Fläche zweiter Ordnung. Dieselbe Fläche wird aber auch der Ort der Inzidenzpunkte entsprechender Geraden sein. Den Punkten p einer beliebigen Geraden entsprechen nämlich die Punkte q einer entsprechenden Geraden, die eben die erste schneiden muß, wenn p und q koinzidieren. Die benutzte Formel (6) ist ja übrigens, wie wir schon bemerkt haben, die einfache Korrespondenzformel, und es ist offenbar, daß sie auch anwendbar ist, wenn den Punkten p (oder q) Punkte von Flächen höherer Ordnung entsprechen.

Bekanntlich können die korrelativen Räume involutorisch liegen, nämlich so, daß ein Punkt dieselbe entsprechende Ebene hat, sei es, daß man ihn als einen Punkt p, oder daß man ihn als einen Punkt q betrachtet. Die Figuren bilden dann ein Polarsystem in Beziehung auf die

gefundene Fläche zweiter Ordnung. In einem noch spezielleren Falle bilden sie ein Nullsystem, in welchem jeder Punkt auf der entsprechenden Ebene liegt. Insofern wird also jeder Punkt des Raumes ein Inzidenzpunkt sein, und statt zwei Inzidenzpunkten wird eine Gerade G unendlich viele Inzidenzpunkte enthalten; wie immer in solchen Fällen, gilt hier die ausgeführte Bestimmung nicht. Jedoch lassen sich die Koinzidenzformeln [195] auch auf diesen Fall anwenden, wenn man die Lage der Geraden g beachtet, die zwei entsprechende Punkte p und q verbindet. Diese Gerade soll in der p entsprechenden und durch p gehenden Ebene liegen. Mit einem Punkt p fallen also zwar Punkte q zusammen, aber immer so, daß die Gerade pq in einer bestimmten durch p gehenden Ebene liegt. Hält man dies fest, so wird in diesem Falle

$$pG = qG = 0$$

und also

$$\varepsilon G = 0,$$

d. h.: nicht eine willkürliche Gerade verbindet entsprechende und zusammenfallende Punkte. Weiter erhält man aus der Formel (8) in [195] durch Multiplikation mit g_e

(13) $$\varepsilon p^2 g_e = p^2 q g_e - p g_e^2 = p^2 q g_e - pG,$$

also, da $p^2 q g_e = 1$ ist, $\varepsilon p^2 g_e = 1$, d. h. in jedem Punkte findet eine Koinzidenz statt, für welche g eine beliebige Gerade des Büschels ist, der durch den Punkt und eine gewisse durch ihn gehende Ebene bestimmt wird.

Wir werden noch ein ganz einfaches Beispiel einer durch die Koinzidenzformeln bestimmten Inzidenz eines Punktes p mit einer Geraden betrachten, von welcher q dann ein beliebiger Punkt sein muß. Die Punkte p seien alle Punkte des Raumes; ihnen lassen wir die Geraden entsprechen, in welchen sich ihre Polarebenen in Beziehung auf zwei Flächen zweiter Ordnung schneiden. Die Punktepaare p und q sind dann diejenigen, die in Beziehung auf die beiden Flächen konjugiert sind. Sie bilden ein ∞^4-faches System. Für ein solches besitzen wir schon die Formeln [195] (5) und (9), nämlich

(5) $$\varepsilon g_s = p^2 g_e + q^2 g_e + G$$

und

(9) $$\varepsilon p^3 = p^3 q - p^2 g_e = p q^3 - q^2 g_e = p^2 q^2 - p q g_e.$$

Man hat hier unmittelbar

$$p^2 g_e = q^2 g_e = p^3 q = p q^3 = 1$$

und findet durch den einfachen Korrespondenzsatz, daß $G = 2$ ist. Also ist $\varepsilon g_s = 4$ und, was vorauszusehen war, $\varepsilon p^3 = 0$. Der Ort der Koinzidenzpunkte ist also eine Kurve vierter Ordnung, und in jedem Punkt

dieser Kurve findet eine volle Koinzidenz [198] statt. Die Kurve ist selbstverständlich die Schnittkurve der Flächen.

[202] Koinzidenzformeln für Strahlenpaare im Raume. Wie schon bemerkt, brauchen wir für die Koinzidenz eines Ebenenpaares keine besonderen Formeln aufzustellen. Es genügt, wie wir schon an einem Beispiel [200] gesehen haben, den Symbolen, die in die für Punktepaare aufgestellten Formeln eingehen, die dualistisch entsprechende Bedeutung beizulegen. Ebenso kann man die in erster Linie für Punktepaare in der Ebene geltenden Formeln auf Geradenpaare in der Ebene anwenden.

Die Bestimmung der Koinzidenzen der Geradenpaare oder, wie wir meistens sagen werden, der Strahlenpaare im Raum, läßt sich im allgemeinen auf diejenige, die Punktpaare betrifft, und auf die dualistisch entsprechende zurückführen. Dadurch kann man auch für Strahlenpaare ein ganzes System von Formeln aufstellen, in denen die Koinzidenzzahlen durch die Symbole der das Strahlenpaar bestimmenden elementaren, einfachen oder mehrfachen Bedingungen ausgedrückt werden. Wegen der Anzahl und der Verschiedenartigkeit dieser Bedingungen muß ein solches Formelsystem, um vollständig zu werden, auch recht weitläufig sein. Seine Anwendung wird auch oft dadurch etwas umständlich, daß es vier Arten von Koinzidenzen zweier Strahlen l und m gibt, nämlich:

1. volle Koinzidenzen, bei denen die zusammenfallenden Strahlen l und m keinen anderen Grenzbeziehungen als eben der Bedingung, zusammenzufallen, unterworfen sind;
2. die Koinzidenzen, bei welchen die zusammenfallenden Strahlen konsekutive Strahlen eines Komplexes sind;
3. die Koinzidenzen, bei welchen sie konsekutive Strahlen einer Kongruenz sind;
4. die Koinzidenzen, bei welchen sie konsekutive Erzeugende einer Regelfläche sind.

So kann es z. B. in einem System von ∞^4 Strahlenpaaren isolierte Gerade geben, in welchen volle Koinzidenzen stattfinden, eine Regelfläche, in deren Erzeugenden Koinzidenzen zweiter Art stattfinden, eine Kongruenz, in deren Strahlen Koinzidenzen dritter Art stattfinden, und ein Komplex, in dessen Strahlen Koinzidenzen vierter Art stattfinden. Übrigens würde selbst ein vollständiges System von Koinzidenzformeln keine getrennten Bestimmungen aller dieser Arten von Koinzidenzen enthalten.

Wir werden uns hier darauf beschränken, einige Formeln herzuleiten, die Systeme von ∞^4 Strahlenpaaren betreffen und aus den in [196] aufgestellten Formeln (10) und (11)

(10) $$\varepsilon g_p = p^2 + q^2 + G,$$

(11) $$\varepsilon p = pq - G$$



hervorgehen, deren Inhalt wir als den Korrespondenzsatz für die Ebene bezeichneten. p und q sollen dann die Spuren in der festen Ebene α bezeichnen, die zu solchen Strahlen l und m eines Paares des Systems gehören, die von einem Punkt einer anderen festen Ebene β ausgehen (vgl. [149] und [150]). Eine Koinzidenz ε der Punkte p und q wird dann stattfinden, wenn entweder die Strahlen des Paares von einem Punkte der Schnittlinie der beiden Ebenen α und β ausgehen, oder zwei von einem Punkt der Ebene β ausgehende Strahlen eines Paares zusammenfallen. Bezeichnen wir die Anzahlen dieser zwei Arten von Koinzidenzen beziehungsweise mit ζ und η, so müssen wir in die zitierten Formeln $\varepsilon = \zeta + \eta$ einsetzen. Übrigens behalten wir die Benennungen von [196] bei und bezeichnen also mit g die Verbindungslinie der Spuren p und q der zu einem Paare verbundenen und sich auf β schneidenden Strahlen l und m.

Da alle Koinzidenzen ζ auf der Geraden $\alpha\beta$ stattfinden, so wird diese (insofern ζp nicht 0 ist) eine Koinzidenzkurve sein, deren Multiplizität ζp die Anzahl der Strahlenpaare ist, die sich in einem beliebigen Punkte des Raumes schneiden. ζg_p bezeichnet die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden Ebenen, die zwei sich auf der Geraden $(\alpha\beta)$ schneidende, homologe Strahlen l und m verbinden. Legen wir den genannten Punkt auf die Gerade $(\alpha\beta)$ selbst, so sehen wir, daß

$$\zeta g_p = \zeta_p + \zeta G$$

ist, wobei wir mit ζG die Anzahl der Strahlenpaare bezeichnen, die einem, eine beliebige Gerade (hier $(\alpha\beta)$) enthaltenden Büschel angehören.

Zur Bestimmung der koinzidierenden Strahlen erhält man also aus (10) und (11) die Formeln

$$\eta g_p = p^2 + q^2 + G - \zeta p - \zeta G, \tag{14}$$

$$\eta p = pq - G - \zeta p. \tag{15}$$

In den Zahlen ηg_p und ηp sind folgende, den verschiedenen Arten von Koinzidenzen der Strahlenpaare zugehörigen Anzahlen mitzuzählen:

1. die Anzahl der Koinzidenzen erster Art in ηg_p, aber nicht in ηp;

2. in ηp die Ordnung der windschiefen Fläche, die von den Koinzidenzstrahlen zweiter Art erzeugt wird, und in ηg_p die Klasse der abwickelbaren Fläche, die von den Ebenen erzeugt wird, die längs dieser Koinzidenzstrahlen die ihnen entsprechenden Komplexkegel, mit Scheiteln in den Schnittpunkten mit einer beliebigen Ebene (β), berühren;

3. und 4. in ηp die Ordnung des Ortes solcher Koinzidenzstrahlen dritter und vierter Art, für welche die koinzidierenden Strahlen sich auf einer Ebene (β) schneiden, und in ηg_p die Klasse der abwickelbaren Fläche, die von den Ebenen, die die sich auf einer Ebene (β) schneidenden koinzidierenden Strahlen verbinden, erzeugt wird (oder was dasselbe ist,

die Ordnung des Ortes der Schnittpunkte solcher koinzidierenden Strahlen, die durch Ebenen verbunden werden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen).

Diese Angaben decken sich zwar für die Koinzidenzen dritter und vierter Art; aber die Bestimmungen selbst werden verschieden sein. Sie schließen sich allerdings in beiden Fällen an die Bestimmung einer gewissen Kurve in der beliebigen Ebene β an. Die Koinzidenzen dritter Art finden in den Strahlen der Koinzidenzkongruenz statt, und die Punkte, in welchen ein Strahl einen mit ihm koinzidierenden, entsprechenden Strahl schneidet, sind ihre Brennpunkte in einer den Strahl enthaltenden anderen Kongruenz.[1]) Der Ort dieser Brennpunkte ist eine Fläche, die β in der gesuchten Kurve schneidet. In diesem Falle wird der Beitrag zu ηp die Summe der Ordnung dieser Kurve und der doppelten Klasse der Koinzidenzkongruenz sein (vgl. [150]). Zu einem Koinzidenzstrahl vierter Art gehört eine durch ihn gehende Regelfläche, und die Strahlen einer im Koinzidenzkomplexe enthaltenen Kongruenz sind abwickelbare Elemente der zu ihnen gehörigen Flächen. Der Ort ihrer Schnittpunkte mit konsekutiven Erzeugenden der Flächen ist eine Fläche, die β in der gesuchten Kurve schneidet. In diesem Falle wird der Beitrag zu ηp die Summe der Ordnung dieser Kurve und der Klasse der eben genannten Kongruenz sein.

Wir werden jedoch die Anwendung der Formeln (14) und (15) auf solche Fälle beschränken, in welchen nur Koinzidenzen erster und zweiter Art vorkommen. Zunächst werden wir mit ihnen einen Beweis des in [144] und [149] bewiesenen *Halphen*schen Satzes über Kongruenzen führen, der jedoch nur der äußeren Form nach von dem abweicht, den wir schon [149] auf den Korrespondenzsatz für die Ebene stützten.

Der Satz betrifft die gemeinschaftlichen Strahlen zweier Kongruenzen (l) und (m), die nicht schon eine gemeinschaftliche Regelfläche haben. Wir nennen ihre Ordnungen l_p und m_p und ihre Klassen l_e und m_e, und suchen die Koinzidenzen eines Strahles der einen Kongruenz mit einem Strahl der anderen. Dann wird

$$p^2 = q^2 = l_p m_p,\ pq = (l_p + l_e)(m_p + m_e).$$

Wegen der eben genannten Voraussetzung ist $\eta p = 0$. Weiter ist $\zeta p = l_p m_p$, und durch Anwendung des Korrespondenzprinzips auf einen Ebenenbüschel, dessen entsprechende Ebenen zwei sich auf der Achse des Büschels schneidende Strahlen der gegebenen Kongruenzen enthalten, findet man, daß

$$\zeta G = l_e m_p + l_p m_e$$

1) In [150], wo wir auf dieselbe Weise die Doppelstrahlen einer gegebenen Kongruenz suchten, wurde diese Kongruenz selbst als eine Koinzidenzkongruenz behandelt, und die zu jedem Strahl gehörigen Kongruenzen waren da auch mit der gegebenen identisch.

ist. Setzt man diese Werte ein, so ergeben die Gleichungen (14), (15) nach Elimination von G,

$$\eta g_p = l_p m_p + l_e m_e,$$

wodurch eben *Halphens* Satz ausgedrückt wird. —

Sucht man die Anzahl der Erzeugenden l einer Regelfläche von der Ordnung l_g, die einem Komplexe (m) vom Grade m_s angehören, so muß man in (14) und (15) die folgenden Werte einsetzen:

$$p^2 = 0,\ q^2 = m_s \cdot l_g,\ pq = l_g \cdot m_s,\ \zeta p = 0,\ \zeta G = l_g \cdot m_s,\ G = l_g \cdot m_s$$

und findet dann für die gesuchte Anzahl den Wert $\eta g_p = l_g \cdot m_s$, und außerdem $\eta p = 0$.

[203] Entsprechend gemeinsame Gerade korrelativer Räume. Um die Geraden, die in zwei in demselben dreidimensionalen Raum liegenden, korrelativen Räumen sich selbst entsprechen, zu finden, erinnern wir daran, daß der Ort der Punkte, die auf den entsprechenden Ebenen liegen, eine Fläche zweiter Ordnung φ_2 ist, und daß die Ebenen eine andere solche Fläche ψ_2 berühren [201]. Wir beschränken diese Anwendung auf die Fälle, wo die Flächen φ_2 und ψ_2 nicht zusammengesetzt sind.

Suchen wir durch Anwendung der in [202] entwickelten Formeln (14) und (15) die Koinzidenzen der von zwei entsprechenden Geraden gebildeten Strahlenpaare, so findet man fürs erste

$$p^2 = 2, \quad q^2 = 2;$$

denn ein durch einen gegebenen Punkt der Ebene α gehender Strahl, der den entsprechenden Strahl in einem Punkt der Ebene β trifft, muß β in einem Schnittpunkt der Spur der Fläche φ_2 und der dem gegebenen Punkt entsprechenden Ebene treffen.

Die Zahl pq läßt sich zwar leicht direkt bestimmen; um aber ein Beispiel für ein Verfahren anzugeben, das auch in schwierigeren Fällen brauchbar ist, werden wir diese Bestimmung durch eine neue Anwendung der die Ebene betreffenden Korrespondenzformeln [196] (10) und und (11) ausführen. Dabei versehen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, die Bezeichnungen in diesen Formeln mit einem Strich. p' und q' seien also die Schnittpunkte der Ebene β mit zwei entsprechenden Strahlen l und m, die beziehungsweise die Geraden p und q in α schneiden. Dann ist $p'^2 = q'^2 = 1$. Durchläuft der Punkt p' eine Gerade G', so wird der entsprechende Punkt q' einen Kegelschnitt durchlaufen. Der Ort dieses Punktes geht nämlich durch die Spur der Geraden q in β und schneidet jede durch diese Spur gehende Gerade in β nochmals in einem Punkte, was alles aus der Bestimmung entsprechender Strahlen hervorgeht. Man findet dadurch $G' = 2$ und ebenso $p'q' = 2$. Also wird $\varepsilon' p' = 0$ und $\varepsilon' g'_{p'} = 4$. Diesen Wert wird pq also in unserer Hauptaufgabe haben; demnach ist

$$pq = 4.$$

Da ein Punkt des Raumes im allgemeinen nicht Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen ist, ist $\zeta p = 0$. Dagegen ist ein beliebiger Punkt P der Fläche φ_2 Scheitel zweier projektiver Büschel homologer Strahlen l und m. Ist der Punkt einer der zwei Schnittpunkte der Geraden $(\alpha\beta)$ mit φ_2, so gehen also durch $(\alpha\beta)$ zwei Ebenen, die entsprechende, durch P gehende Strahlen l und m enthalten. Je nachdem diese Strahlen, die in derselben Ebene durch $(\alpha\beta)$ liegen, koinzidieren oder nicht, wird dadurch ein Beitrag zu ηp oder ζG geleistet. Also ist

$$\zeta G + \eta p = 4\,.$$

Setzt man diese Werte in [202] (15) und (14) ein, so findet man

$$G + \eta p = 4$$

und

$$\eta g_p = 4\,.$$

Wir werden diese Resultate auf die verschiedenen Fälle anwenden:

1. In dem allgemeinen Falle, in welchem keine Koinzidenzen zweiter Art vorkommen, ist $\eta p = 0$, also $G = 4$, und die Zahl $\eta g_p = 4$ entspricht 4 vollen Koinzidenzen, d. h. es gibt vier Koinzidenzstrahlen erster Art. Diese liegen sowohl auf der Fläche φ_2 als auch auf der Fläche ψ_2. Diese Flächen gehen also durch ein windschiefes Viereck, dessen Seiten die Koinzidenzstrahlen sind.

2. Gibt es unendlich viele Koinzidenzstrahlen, so müssen auch diese auf den beiden Flächen liegen. Umgekehrt wird dieser Fall eintreten, wenn φ_2 und ψ_2 zusammenfallen. Einem Punkt P der Fläche werden dann nämlich zwei durch P gehende Tangentialebenen π und π' derselben Fläche entsprechen, und jede dieser, z. B. π, enthält eine durch P gehende Erzeugende. Wendet man diese Betrachtung auf den konsekutiven Punkt derselben Erzeugenden an, so sieht man, daß diese sich selbst entspricht. Also werden alle Erzeugende der einen Schar Koinzidenzstrahlen sein, die nach [202] zweiter Art sein müssen, und es muß $\eta p = 2$, $G = 2$ sein. Die Erzeugenden der anderen Schar werden einander eindeutig entsprechen; also enthält diese Schar zwei Koinzidenzstrahlen erster Art. Subtrahiert man diese Zahl von $\eta g_p = 4$, so findet man, daß die Umhüllungsfläche der Ebenen der sich in Punkten einer Ebene β schneidenden und koinzidierenden Strahlenpaare ein Kegel zweiter Klasse (und Ordnung) ist. Da seine Tangentialebenen alle die Fläche φ_2 berühren, wird dieser Kegel der Fläche φ_2 umbeschrieben sein.

3. φ_2 und ψ_2 fallen auch zusammen, wenn die korrelativen Räume ein Polarsystem bilden. Dann sind aber die Erzeugenden beider Scharen der Fläche $\varphi_2(\psi_2)$ Koinzidenzstrahlen. Ihre Ordnung zählt also doppelt in ηp; diese Zahl wird daher 4 und $G = 0$. Da der Wert $\eta g_p = 4$ den beiden getrennten Scharen von Erzeugenden entsprechen soll, so wird der jeder Schar entsprechende Teil von ηg_p, wie im

vorigen Fall, 2 sein und einen Kegel zweiter Klasse als Umhüllungsfläche der ebenso bestimmten Ebenen ergeben. Dies wird der φ_2 längs des Schnittes mit β berührende Kegel, zweimal gezählt, sein.

Wir übergehen hier die entsprechenden Untersuchungen der Fälle, in welchen die Flächen φ_2 und ψ_2 zusammengesetzt sind. Um aber auch ein Beispiel von Koinzidenzen vierter Art zu haben, könnte man versuchen, die Formeln (14) und (15) noch auf den Fall anzuwenden, in welchem das Polarsystem ein Nullsystem ist. Dies würde aber zu nichts führen, weil sich in einem solchen System konjugierte Linien, die nicht zusammenfallen, überhaupt nicht schneiden können, und daher die in die Formeln eingehenden Zahlen alle 0 sind.

[204] Symbole der Grundelemente eines vierdimensionalen Raumes. Der Vorteil der symbolischen Rechnung und der darauf gegründeten Formeln besteht namentlich in der größeren Übersichtlichkeit. Diese rührt davon her, daß diese Formeln, wie wir in unseren Beispielen gezeigt haben, viele der einfachsten und daher auch wichtigsten Ergebnisse der abzählenden Geometrie gleichzeitig umfassen. Dagegen haben wir es in den vorhergehenden Abschnitten für gut befunden, solche schwierigeren Untersuchungen, die Aufzählung verschiedenartiger Lösungen und Bestimmungen von Koeffizienten betreffen, mit welchen jene auftreten, unmittelbar an die Anwendung der Methoden zu knüpfen, die übrigens auch die Grundlage der symbolischen Rechnungen bilden. Die durch die neuen Formeln gewonnene Übersichtlichkeit kommt aber ganz besonders solchen Untersuchungen zugute, die Räume mit mehreren, ja mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen umfassen sollen. Was die weitere Anwendung der symbolischen Rechnung in dieser Richtung anlangt, die auch wesentliche Änderungen in dem Systeme der Bezeichnungen erfordert, so haben wir hier jedoch keinen Raum, die hierzu notwendigen geometrischen Voraussetzungen zu entwickeln. Nur ihre Möglichkeit werden wir aufzeigen und zwar dadurch, daß wir für einen vierdimensionalen Raum die Relationen zwischen den Symbolen der einem solchen zugehörigen Elemente aufstellen, was noch ohne wesentliche Änderungen in dem System der Bezeichnungen geschehen kann.

In einem linearen Raume mit vier Dimensionen ist ein Punkt durch vier Koordinaten bestimmt, die wir hier homogen annehmen und durch $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ bezeichnen. Eine lineare Gleichung in diesen Größen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 = 0$$

bestimmt einen linearen dreidimensionalen Raum, den wir hier kurz als Raum bezeichnen werden; zwei solche Gleichungen bestimmen eine Ebene, drei eine Gerade, vier einen Punkt. Ein Raum schneidet einen Raum in einer Ebene, eine Ebene in einer Geraden, eine Gerade in einem Punkte; eine Ebene schneidet eine Ebene in einem Punkt, sie



schneidet aber nicht eine beliebige Gerade. Ein Raum ist durch folgende ihm zugehörige (unabhängig voneinander gewählte) Elemente vollständig bestimmt: vier Punkte; zwei Punkte und eine Gerade; zwei Gerade; einen Punkt und eine Ebene; eine Ebene und eine sie schneidende Gerade; zwei Ebenen, die einander in einer Geraden schneiden.

Eine Ebene ist durch drei ihrer Punkte bestimmt; wegen der zwei Gleichungen der Ebene wird aber die Bedingung, durch einen Punkt zu gehen, durch zwei Gleichungen ausgedrückt; die drei Bedingungen sind also doppelt, und es sind daher 6 einfache Bedingungen nötig, um eine Ebene zu bestimmen. Eine einfache Bedingung ist es für eine Ebene, eine Gerade zu schneiden oder mit ihr in einem Raume zu liegen; eine doppelte ist es, eine Ebene in einer Geraden zu schneiden, also mit ihr in einem Raum zu liegen; die Bestimmung eines Raumes, der eine Gerade enthalten soll, erfordert nämlich noch 2 Bedingungen, die eines Raumes, der eine Ebene enthalten soll, noch 1 Bedingung, und die Bestimmung der Ebene im Raum erfordert immer 3 Bedingungen.

Da man in der Gleichung des Raumes $a_1 : a_2 : \ldots a_5$ als Koordinaten des Raumes auffassen und dann mit den Punktkoordinaten vertauschen kann, gilt das Prinzip der Dualität auch im vierdimensionalen Raum, so daß man in derartigen allgemeinen Angaben wie die eben erwähnten gleichzeitig

Raum, Ebene, Gerade, Punkt beziehungsweise
mit Punkt, Gerade, Ebene, Raum

vertauschen darf. Da sich weiter die Bestimmungen eines Punktes oder eines Raumes, wie im dreidimensionalen Raum, durch einfache Multiplikationen ausdrücken lassen, wird es hier genügen, die Fundamentalzahlen und die zwischen ihnen stattfindenden Gleichungen für die Gerade aufzustellen; was dann die entsprechenden Zahlen für die Ebene betrifft, können wir auf das Dualitätsprinzip verweisen.

Wir stellen nun die elementaren Bedingungen, denen man eine Gerade unterwerfen kann, durch die folgenden Symbole dar, die gleichzeitig die Anzahlen der Geraden bezeichnen sollen, die diese Bedingungen und eine hinreichende Zahl anderer Bedingungen erfüllen. Diese lassen sich nachher durch symbolische Multiplikation einführen. Die vorangestellten Zahlen geben an, für wieviele einfache Bedingungen die genannten Bedingungen zählen. Die dabei erwähnten Räume, Ebenen usw. bezeichnen gegebene Räume, Ebenen usw. Es bedeutet

1. g die Bedingung, eine Ebene zu schneiden;

2. g_r, in einem Raume zu liegen; g_g, eine Gerade zu schneiden;

3. g_p, durch einen Punkt zu gehen; g_{rg} in einem Raum zu liegen und eine in diesem liegende Gerade zu schneiden;

4. g_e, in einer Ebene zu liegen; g_{rp}, einem Strahlenbündel anzugehören, d. h. in einem Raume zu liegen und durch einen in diesem liegenden Punkt zu gehen;

5. g_{ep}, einem Strahlenbüschel anzugehören, d. h. in einer Ebene zu liegen und durch einen in ihr liegenden Punkt zu gehen;

6. G, eine gegebene Lage zu haben.

Um einen Ausdruck für das Produkt g^2 zu finden, legen wir die zwei gegebenen Ebenen in denselben Raum. Dann muß eine diese Ebenen schneidende Gerade entweder in demselben Raum liegen oder die Schnittlinie der Ebenen schneiden. Also ist

(1) $$g^2 = g_r + g_g.$$

Wenn eine in einem Raum liegende Gerade eine Ebene schneiden soll, muß sie die Schnittlinie des Raumes und der Ebene treffen. Also ist

(2) $$g \cdot g_r = g_{rg}.$$

Um das Produkt $g \cdot g_g$ zu finden, legt man die gegebene Ebene und die gegebene Gerade in denselben Raum. Eine diese Ebene und diese Gerade schneidende Gerade muß dann entweder in demselben Raume liegen oder durch ihren Schnittpunkt gehen. Also ist

(3) $$g \cdot g_g = g_{rg} + g_p.$$

Eine in einem gegebenen Raume liegende Gerade muß, um eine Ebene zu schneiden, die Schnittlinie des Raumes und der Ebene treffen. Das Produkt $g \cdot g_{rg}$ bestimmt also die in einem Raume liegenden Geraden, die zwei in diesem liegende Gerade treffen. Man darf daher hier unsere einen gewöhnlichen Raum betreffende Formel [189] ($g^2 = g_p + g_e$) anwenden und findet

(4) $$g \cdot g_{rg} = g_{rp} + g_e.$$

Eine Gerade, die eine gegebene Ebene schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht, muß dem durch den Punkt und die Ebene bestimmten Raum angehören. Also ist

(5) $$g \cdot g_p = g_{rp}.$$

Weil eine Ebene einen Raum in einer Geraden schneidet, findet man weiter

(6) $$g \cdot g_{rp} = g_{ep},$$

und weil eine Ebene eine andere in einem Punkt schneidet,

(7) $$g \cdot g_e = g_{ep}$$

und

(8) $$g \cdot g_{ep} = G.$$

Sukzessive Einsetzungen ergeben

(9) $$g^3 = 2g_{rg} + g_p$$

(10) $$g^4 = 3g_{rp} + 2g_e$$

(11) $$g^5 = 5g_{ep}$$

(12) $$g^6 = 5G.$$



Also gibt es im vierdimensionalen Raum 5 Gerade, die sechs gegebene Ebenen schneiden.

Weiter findet man leicht

$$g_r^2 = g_e, \quad g_g^2 = g_e + g_{rp}, \quad g_r \cdot g_g = g_{rp};$$
$$g_r \cdot g_p = 0, \quad g_r \cdot g_{rg} = g_g \cdot g_p = g_g \cdot g_{rg} = g_{ep};$$
$$g_p^2 = g_{rg}^2 = G, \qquad g_p \cdot g_{rg} = 0;$$
$$g_r \cdot g_e = g_g \cdot g_{rp} = G, \quad g_r \cdot g_{rp} = g_g \cdot g_e = 0.$$

Wir werden für den vierdimensionalen Raum noch einen Ausgangspunkt für die Bildung der Inzidenzformeln angeben. Dabei werden wir noch die Symbole p, p_e und p_g anwenden, um auszudrücken, daß der Punkt p in einem Raum, in einer Ebene oder in einer Geraden liegen soll. Sollen nun ein Punkt p und eine Gerade g inzident sein, so kann man die Anzahl pg der so entstehenden Gebilde, deren Punkt p in einem gegebenen Raume liegt, und deren Gerade g eine gegebene Ebene schneidet, dadurch bestimmen, daß man diese Ebene in jenem Raume liegend annimmt. Dann muß auch entweder der gesuchte Punkt in der gegebenen Ebene oder die gesuchte Gerade im gegebenen Raum liegen. Also wird

(13) $$pg = p_e + g_r = p^2 + g_r.$$

In ähnlicher Weise kann man eine Inzidenzformel für eine Gerade und eine Ebene bilden, wobei wir die einer zu bestimmenden Ebene zugehörigen Symbole aus denen, die einer Geraden entsprechen, dualistisch durch Vertauschung der Symbole g und e, p und r usw. bilden. Um dann einen Ausdruck für die Anzahl ge der Geraden g zu erhalten, die in der eine gegebene Gerade γ schneidenden Ebene e liegen und eine Ebene ε schneiden, betrachten wir den Fall, in welchem γ in ε liegt. Dann muß entweder g die Gerade γ in einem Punkt oder e die Ebene ε in einer Geraden schneiden. Also ist

(14) $$ge = g_g + e_e.$$

Durch Multiplikationen dieser Formeln miteinander und mit den Symbolen g, e usw. und durch dualistische Vertauschung kann man sodann ein System von Inzidenzformeln bilden.

Als Ausgangspunkt für die Koinzidenzformeln kann man jene Formel benutzen, die die Koinzidenz eines Punktepaares p, q ausdrückt. Durch Räume verbindet man diese Punkte mit einer gegebenen Ebene π. Diese schneiden eine beliebige Gerade γ in Punktepaaren $p'q'$, die koinzidieren, wenn entweder p und q koinzidieren oder die Gerade pq, die wir g nennen wollen, die Ebene π schneidet. Man findet daraus den folgenden Ausdruck für die Anzahl εp koinzidierender Punktepaare

(15) $$\varepsilon p = p + q - g.$$



Daraus lassen sich die übrigen Koinzidenzformeln durch symbolische Multiplikationen bilden.

[205] Übungen. 1. Die Koinzidenzformeln für ∞^2 Punktepaare einer Ebene anzuwenden, um die erste *Plücker*sche Formel zu beweisen.

2. Die Koinzidenzformeln für ∞^2 Punktepaare auf solche Paare anzuwenden, die auf einer gegebenen Raumkurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten liegen.

3. Die Koinzidenzformeln für ∞^4 Punktepaare auf solche Paare anzuwenden, die auf einer Fläche von der Ordnung m, die eine Doppelkurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten hat, liegen.

4. Als Übung in der Anwendung der Formeln [195] (1), (2) und (7) schlagen wir folgende Untersuchungen vor:

Eine Fläche m^{ter} Ordnung hat eine Doppelkurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten. Suche die Anzahlen der Trisekanten dieser Kurven, die die Fläche berühren, entweder in Punkten der Kurve oder in anderen Punkten.

Suche die Ordnungen der Regelflächen, deren Erzeugende Bisekanten der Doppelkurve sind und die Fläche auf oder außerhalb derselben berühren, und die Ordnungen ihrer Berührungs- und Schnittkurven.

Suche die Anzahlen der Bisekanten der Doppelkurve, die Doppeltangenten oder Haupttangenten der Fläche sind.

Natürlich sind bei der Lösung dieser Aufgabe die in [33] und [139] gegebenen Bestimmungen der Trisekanten und Quadrisekanten einer Raumkurve zu benutzen.

Verzeichnis

der geometrischen Gebilde, auf die in diesem Buche abzählende Methoden angewandt werden. Die beigefügten Zahlen geben die Artikel an, in denen die betreffenden Gebilde behandelt oder berücksichtigt werden.

I. Ebene Kurven.

II. Raumkurven und abwickelbare Flächen.

III. Flächen.

IV. Strahlengebilde.

V. Mehrdimensionale Räume [2].

PASCALS REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

ZWEITE VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE DER DEUTSCHEN AUSGABE, UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER MATHEMATIKER

HERAUSGEGEBEN VON

P. EPSTEIN UND **H. E. TIMERDING**
IN STRASSBURG IN BRAUNSCHWEIG

I. BAND:

ANALYSIS

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG · PH. FURTWÄNGLER IN AACHEN A. GULDBERG IN CHRISTIANIA · H. HAHN IN CZERNOWITZ E. JAHNKE IN BERLIN · H. JUNG IN HAMBURG · A. LOEWY IN FREIBURG · E. PASCAL IN NEAPEL · H. E. TIMERDING IN BRAUNSCHWEIG HERAUSGEGEBEN VON **PAUL EPSTEIN**

II. BAND:

GEOMETRIE

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. BERZOLARI IN PAVIA · R. BONOLA IN PAVIA · E. CIANI IN GENUA · M. DEHN IN MÜNSTER · F. DINGELDEY IN DARMSTADT F. ENRIQUES IN BOLOGNA · G. GIRAUD IN TURIN · G. GUARESCHI IN PAVIA · L. HEFFTER IN KIEL · W. JACOBSTHAL IN BERLIN H. LIEBMANN IN LEIPZIG · J. MOLLERUP IN KOPENHAGEN J. NEUBERG IN LÜTTICH · U. PERAZZO IN TURIN · O. STAUDE IN ROSTOCK · E. STEINITZ IN BERLIN · H. WIELEITNER IN PIRMASENS · K. ZINDLER IN INNSBRUCK HERAUSGEGEBEN VON **H. E. TIMERDING**

B. G. TEUBNER  LEIPZIG-BERLIN

AUS DER VORREDE DES VERFASSERS DER ITALIENISCHEN ORIGINALAUSGABE.

„Gerade bei einem Buch, wie demjenigen, welches ich hiermit dem mathematischen Publikum vorlege, scheint es notwendig zu sein, vor allen Dingen über die Absicht, in welcher es geschrieben ist, Aufklärung zu geben, damit Mißverständnisse unter allen Umständen ausgeschlossen sind."

„Das Buch hat den Zweck, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, als nötig ist, damit der Leser sich in ihr orientieren könne, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann."

„Es soll für den Studierenden, welcher während seiner Universitätszeit sich mit verschiedenen Zweigen der Mathematik beschäftigt hat, ein 'Vademecum', ein Taschenbuch sein, in welchem er, kurz zusammengefaßt, alle jene mathematischen Begriffe und Resultate wiederfindet, die er während seiner Studien sich nach und nach angeeignet hat oder doch hätte aneignen sollen. Man würde sich daher irren, wenn man der Ansicht wäre, ich hätte eine Enzyklopädie der Mathematik schreiben wollen; für eine solche Arbeit würden weder meine Kräfte ausgereicht haben, noch hätte der verhältnismäßig geringe Umfang dieses Buches genügt. Ich habe weiter nichts als ein bescheidenes *Repertorium* abfassen wollen, welches, wie ich glaube, den Studierenden der Mathematik Dienste zu leisten imstande ist."

„Das Buch kann den jungen Mathematikern auch insofern von großem Nutzen sein, als es ihnen die Möglichkeit bietet, ihre Kenntnisse mit verhältnismäßig geringer Mühe auch auf andere Gebiete der Mathematik auszudehnen, wenn sie, wie es so oft vorkommt, das große Unrecht begehen, sich zu ausschließlich in Einzelheiten einzulassen, d. h. sich mit zu großer Abschließung einem speziellen Teil der Wissenschaft zu widmen und alle übrigen Teile darüber zu vernachlässigen."

„Die Anordnung des Stoffes ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe; zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln ohne Beweis aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht."

„Da es nicht möglich war, alles zu bringen, habe ich mich sehr oft auf das Wichtigste beschränken müssen, und die Schwierigkeiten, bei der Auswahl des Stoffes den richtigen Prinzipien zu folgen, sind nicht geringe und nicht wenige gewesen; ich glaube auch nicht, daß es mir immer gelungen ist, sie auf die beste Art zu überwinden; jedenfalls bitte ich den Leser, bei der Beurteilung aller Einzelheiten dieses bescheidenen Buches die größte ihm mögliche Nachsicht zu üben."

„Man glaube nicht, daß ich alle Literaturangaben gemacht hätte, die zu machen möglich waren; das wäre übertrieben und nutzlos gewesen; es war, wie mir scheint, nur geboten, die wichtigsten Arbeiten, die einen bestimmten Gegenstand betreffen, hervorzuheben, d. h. diejenigen, welche den größten Eindruck hinterlassen haben und als die Grundlagen der übrigen zu betrachten sind; denn wollte man sich von der Sucht, möglichst viel zu zitieren, beherrschen lassen, so würde dem Leser schließlich die natürlichste und einfachste Orientierung verloren gehen."

„Bei der allgemeinen Anordnung der verschiedenen Teile war ich manchmal gezwungen, um eine gewisse Symmetrie einhalten zu können, von der logischen Aufeinanderfolge abzuweichen und Theorien vorauszuschicken, zu deren Beweis (aber wohlverstanden nicht zum Verständnis der Resultate) Begriffe nötig sind, die erst später gebrachten Theorien angehören. Bei dem Charakter des Buches scheint mir dies kein Mißstand zu sein."

„Der Verfasser hofft, daß die mühsame Arbeit bei der Herstellung des Buches nützlich und nicht umsonst gewesen sei, und daß der nachsichtige Leser berücksichtigen werde, daß dieses Werk, in welchem die sämtlichen so verschiedenartigen Teile der reinen Mathematik behandelt werden, nicht das Resultat des Zusammenwirkens vieler Verschiedener, sondern die Arbeit eines einzigen ist."

AUS DEM VORWORT DES HERAUSGEBERS DER ZWEITEN AUFLAGE DES ERSTEN BANDES.

In der oben wiedergegebenen Vorrede hatte der Verfasser als Zweck des Buches bezeichnet, „auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, als nötig ist, damit der Leser sich in ihr orientieren könne und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann". Diesem Zweck ist das